

# A MATEMATIKA ALAPJAI, 6. ELŐADÁS

Kornai András

BMETE91AM35 2023-24 Őszi Félév

# SZÁMOSSÁG

- Már vannak számaink, ezt még egy kicsit továbbfejlesztjük
- Definíció: két halmaz számossága ugyanaz, jelben  $|A| = |B|$ , ha van köztük bijekció. Ha van  $A \rightarrow B$  injekció, akkor  $|A| \geq |B|$ , ha van szürjekció, akkor  $|A| \leq |B|$
- Amiknek ugyanaz a számossága, mint  $\mathbb{N}$ -nek, azokat *megszámlálhatónak* hívjuk
- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$
- $|\mathbb{N}| < |2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$
- Kontinuum hipotézis:  $\nexists \kappa |\mathbb{N}| < \kappa < |\mathbb{R}| = c$
- HW6.1: bizonyítsuk be, hogy a számosságok egyenlőségéhez elég kétoldali injekció

# LOGIKA

- A matematika alapjai két pilléren nyugszanak, ezek a halmazelmélet és a logika
- A halmazelmélet kész (persze nem, de a számosságoknál mi megállunk) most a logika jön
- A halmazelméletnek van néhány változata (ZFC, NGB, KP ...), a logikának sokkal több
- Ahhoz hogy egy logikát definiáljunk az alábbi dolgok kelljenek:
  - 1 Valami nyelv, amiben a formulákat le tudjuk írni
  - 2 Valami igazságfogalom
  - 3 Valami elképzelés arról, hogy a formulák mit jelentenek 'modellelmélet'
  - 4 Valami bizonyítási módszer 'bizonyításelmélet'
- A nyelvvel kezdjük
- A  $\Sigma$  halmazt *ábécének* hívjuk, elemet *betűnek*
- Több betű egymás után rakásával kapjuk a *sztringeket* (láncok, füzérek)

# A FORMÁLIS NYELVELMÉLET ALAPJAI

- Egy adott  $\Sigma$  ábécé betűiből képzett összes láncot  $\Sigma^*$ -gal jelöljük. Van egy kitüntetett elem amiy  $\lambda$ -val jelölünk, ez az *üres sztring*
- $\lambda$  hossza 0, az  $a \in \Sigma$  hossza 1, általában ha  $\alpha$  hosszát  $|\alpha|$  jelöli fenn fog állni  $|\alpha\beta| = |\alpha| + |\beta|$
- A sztringeken végzett legfontosabb művelet az *konkatenáció* (egymás után írás). Pl. ha  $\alpha = abc$  és  $\beta = AB$  akkor  $\alpha\beta = abcAB$
- A konkatenáció *nem* kommutatív,  $\beta\alpha = ABabc \neq \alpha\beta$
- Az  $\alpha\alpha$ -t  $\alpha^2$ -nek rövidítjük, hasonlóan  $\alpha^3$  etc.
- Egy **nyelv** a  $\Sigma$  ábécé fölött  $\Sigma^*$  valamely részhalmaza

# A FORMÁLIS NYELVEK FŐBB TÍPUSAI

- A legegyszerűbbek azok, ahol expliciten felsoroljuk az elemeket pl.  
 $L = \{a, ab, ba, baab\}$
- A **szabályos** (más néven *reguláris* vagy *racionális* nyelveket ezekből építjük Boole- és Kleene-műveletekkel
- Mik azok a Boole-műveletek? Miután a nyelvek halmazok, képezhető az úniójuk, metszetük, komplementumuk
- Mik azok a Kleene-műveletek? Konkatenáció (szorzásnak is hívjuk):  $KL = \{kl \mid k \in K, l \in L\}$ , ebből  $K^2, K^3, \dots$
- Lezárás:  $K^+ = \{K \cup K^2 \cup K^3 \cup \dots\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} K^i$
- Ehhez  $K^*$  még hozzá teszi a  $K^0 = \{\lambda\}$  halmazt

# A LEGBONYOLULTABB NYELVEK

- 1 Ezeket úgy hívjuk, hogy **rekurzíve felsorolható** vagy 0-típusu nyelvek. Definíció: van hozzájuk Turing gép ami *valamilyen sorrendben* kiírja az összes szavukat
- 2 Vannak ezeknél rosszabbak is, amikhez még Turing-gép sincs, ezekkel nem nagyon foglalkozunk, mint ahogy a nem kiszámítható számokkal se szoktunk (lehetne -1 típusu, de nem szokás)
- 3 De vannak jobbak is, amiknél a Turing-gép *hosszúság szerinti sorrendben* sorolja fel őket, (ezeket hívhatnánk 0.5 típusúnak, de ez sem szokás)
- 4 Felsorolás helyett sokszor praktikusabb *eldöntéssel* dolgozni: ilyenkor a szalagon beadunk egy szót és a gép kijelzi, hogy ez  $\in L$  vagy sem. A 0 típusnál nem tudjuk, hogy a gép mikor áll meg!
- 5 1-es típus: Olyan Turing gép, ami nem írhatja az üres szalagrészt

# EGYSZERŰBB NYELVEK

- 1 2-es típus: féloldalas szalag “veremautomata” (programozási nyelvek, a logika legnagyobb része, kivéve kvantorok)
- 2 1.5-ös típus ‘mildly context sensitive’ a legtöbb logika nyelve ilyen, az emberi nyelvekről is ezt gondoljuk
- 3 A 3-as típus analóg a reacionális számokkal, a 2-es típus az algebrai számokkal, a 0-ás típus a kiszámítható számokkal
- 4 Honnan tudjuk, hogy vannak nem kiszámítható számok? Számossági megfontolásokból!
- 5 Órán: CPZ 11.1-2 HF6,2-7 = CPZ 11.20,22,24,32,46