A matematika alapjai, 5. előadás

Kornai András

BMETE91AM35 2023-24 Őszi Félév

A számkörök felépítése

- Múlt előadáson: $\mathbb{N}$-ből $\mathbb{Z}$, abból $\mathbb{Q}$
- Ahhoz hogy $\mathbb{R}$-hez jussunk, kell egy új trükk, ez a Dedekind-szelet
- $\mathbb{Q}$ olyan (A,B) particióit, amikre teljesül hogy $\forall a \in A\, \forall b \in B\; a < b$ Dedekind-szeletnek hívjuk
- Példa: legyen A a negatív racionálisak halmaza, B pedig a nemnegatívaké
- Általában, ha q racionális szám, akkor a q-nál kisebb racionálisok A_q halmaza és a q-nál $\geq$ racionálisok B_q halmaza Dedekind-szelet lesz

$\sqrt{2}$

- Legyen
  $A = \{x \in \mathbb{Q} | x < 0 \vee x^2 < 2\},\ B = \{y \in \mathbb{Q} | y > 0 \wedge y^2 > 2\}$
- Ez is Dedekind szelet, ez lesz $\sqrt{2}$!
- Igazoljuk, Dedekind-szeletekkel is lehet számolni
- Igazoljuk, hogy racionális p, q esetén $D_p + D_q = D_{p+q}$ és szorzásnál is $D_p \cdot D_q = D_{pq}$
- Összességében a $\mathbb{Q}$-ból készített Dedekind-szeletek lesznek $\mathbb{R}$
- Ha $\mathbb{R}$-ból készítenénk Dedekind-szeleteket, az már nem adna hozzá, de miért?
- Készíthető $\mathbb{R}$-nél bővebb $\mathbb{R}^*$ de nem így

Arkhimédész

- $\mathbb{N}$ elemei közt van egy természetes rendezés: $1 < 2 < 3 < 4 \dots$
- Ez kiterjeszthető $\mathbb{Z}$-re: $\dots - 4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1$
- Ez tovább terjeszthető $\mathbb{Q}$-ra: $p, q, r, s > 0$ esetén $p/q > r/s \Rightarrow ps > qr$, a többit előjelek mentén szétválasztva esetekre
- Arkhimédészi Axióma: $\forall p, q > 0 \exists n \; qn > p$
- Fontos spec eset: $q = 1$ 'minden számnál van nagyobb egész szám'
- Ha a valós számokat Dedekind-szeletekkel konstruáljuk, akkor ez nem axióma, hanem tétel!

Supremum

- Igazoljuk, hogy racionálisok közt minden korlátos halmaznak van legkisebb felső korlátja (más néven supremuma).
- Ebből következik, hogy minden két racionális szám közt van irracionális, és minden két irracionális közt van racionális
- Az is következik, hogy 0 és az $1/n$ sorozat határértéke közt nincs valós szám.
- Ez utóbbi kijelentés egyenértékű az Archimédeszi Axiómával
- De fordítva nincs így: tudunk olyan számokat csinálni, amik közt vannak *infinitézimálisok* is

Test-tulajdonságok

- Egy F struktúra *test*, ha van benne 1, 0, összeadás, kivonás, szorzás, és 0 kivételével osztás, és ezek teljesítik a megszokott azonosságokat
- Vannak véges testek is!
- A legkisebb végtelen test $\mathbb{Q}$, ezt sokféleképp lehet bővíteni
- $\mathbb{R}$ nemcsak test, hanem rendezett test (van benne ¡)
- A rendezés megfelel a szokásos tulajdonságoknak, *trichotóm*: $a < b$ $a > b$ $a = b$ e háromból mindig pontosan egy lesz igaz
- A rendezés jól együtt dolgozik az eltolással: ha $a < b$ akkor $a + r < b + r$ minden r-re igaz (és persze fordítva)
- Ajánlott irodalom: Pugh__RealMathematicalAnalysis1-67.pdf

Gyakorlatok

- Órán: CPZ-ből p216
- HF: 5.1-7 = CPZ8.30,32,34,34,36,38,40