A matematika alapjai, 4. előadás

Kornai András

BMETE91AM35 2023-24 Őszi Félév

A számkörök felépítése

- A természtes számokat $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ a Peano axiómákkal definiáltuk. Induktíve definiáltuk az összeadást (az órán) és a szorzást (HF), de nem volt se kivonás se osztás
- Most megcsináljuk a nullát és a negatív számokat, így lesz $\mathbb{Z}$
- Készítsünk (a, b) számpárokat, de legyen $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$
- Milyen reláció ez a $\sim$? Ekvivalencia-reláció!
- Az egész számokat ennek a relációnak az ekvivalencia-osztályaival modelláljuk

$\mathbb{Z}$

- Bizonyítsuk be, hogy $\sim$ tényleg ekvivalencia-reláció!
- Definiáljunk műveleteket ezeken az osztályokon
- Igazoljuk, hogy ezek jól vannak definiálva
- Igazoljuk, hogy megvannak a kívánt tulajdonságaik: (i) az összeadás kommutatív, asszociatív; (ii) a szorzás kommutatív és asszociatív; (iii) 0, 1 a kívánt tulajdonságokkal
- Igazoljuk, hogy ez valóban $\mathbb{N}$ kiterjesztése
- Definiáljuk a kivonást is, igazoljuk, hogy ez jól definált
- Igazoljuk, hogy úgy viselkedik, ahogy szeretnénk
- https://www.math.wustl.edu/˜freiwald/310integers.pdf

$\mathbb{Q}$

- Ugyanez a trükk, legyen $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$ Bizonítandó: ez ekvivalencia-reláció
- Definiáljunk műveleteket ezeken az osztályokon
- Igazoljuk, hogy ezek jól vannak definiálva
- Igazoljuk, hogy megvannak a kívánt tulajdonságaik: (i) az összeadás kommutatív, asszociatív; (ii) a szorzás kommutatív és asszociatív; (iii) 0, 1 a kívánt tulajdonságokkal
- Igazoljuk, hogy ez valóban $\mathbb{Z}$ kiterjesztése
- Definiáljuk az osztást is, igazoljuk, hogy ez jól definált
- Igazoljuk, hogy úgy viselkedik, ahogy szeretnénk

Indukciós feladatok

- CPZ 6. fejezet
- Itt helyben: jólrendezés, $\sum_{i=i}^{n} i$ és $\sum_{i=1}^{n} i^2$
- HF 4.1 Találjuk meg, és bizonyítsuk be a $\sum_{i=1}^{n} i^3$ képletét!
- HF 4.2-5 $=$ CPZ 6.18, 6.20, 6.22, 6.24