A matematika alapjai, 3. előadás

Kornai András

BMETE91AM35 2023-24 Őszi Félév

Partíciók

- Egy A halmaz *partíciója* egy A_α halmazcsalád melyre teljesül, hogy ha $\alpha \neq \beta$ akkor $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ és hogy $\bigcup_\alpha A_\alpha = A$. Definíció szerint az üres halmaz soha nem része semmilyen partíciónak, tehát azt is írhattuk volna, hogy 'nemüres halmazok olyan családja' stb.
- Egy partíció lehet véges (pl. az egészeket a *páros* és a *páratlan* számok halmazaira bontjuk, de lehet végtelen is
- Van két *triviális* partíció, amikor minden elem ugyanabba a halmazba kerül és amikor minden elem a saját halmazába kerül
- A partíciók egy-egy megfeleltetésben vannak az *ekvivalencia-relációkkal*

Függvények: speciális relációk

- A függvények olyan relációk ahol $y = f(x), z = f(x) \Rightarrow y = z$ (nem kell mindenhol definiálva legyen, de ahol igen ott egyértelműen). Példa: $\sqrt{x}$ felső ága
- Figyelem: legyen $f(x) = \sqrt{x}$ ha x racionális, $-\sqrt{x}$ ha x irracionális. Függvény ez?
- Minden függvény reláció, de nem minden reláció függvény
- Egy egyváltozós függvény kétváltozós reláció! Nem úgy írjuk, hogy 30° cos $\sqrt{3}/2$ hanem úgy, hogy $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$
- CPZ 10. fejezet HF elolvasni
- Függvénykompozíció pont úgy, mint relációk kompozíciója, ha $f : A \to B$ és $g : B \to C$ akkor $g \circ f : A \to C$
- *Implicit függvény:* a bemenetet és a kimenetet egyaránt tartalmazó képlettel adjuk meg

Függvények mint relációk folyt.

- Itt is: kiindulási halmaz, érkezési halmaz, értelmezési tartomány, értékkészlet. Általában: halmazból halmazba
- A függvénytan (analízis) nagyon gazdag tudomány, kiindulási/érkezési halmaz alapján szokták felosztani
- Valós számokra: valós függvénytan, egyváltozós, többváltozós
- Komplex függvénytan, ha a bemenet/kimenet komplex szám
- A bemenet nemcsak szám lehet, hanem fügvény is (funkcionálanalízis)
- Nagyon fontosak a *logikai függvények* (bemenet: logikai formula, kimenet: igazságérték)
- Elő fognak jönni az aritmetikai függvények (bemenet: természetes szám, kimenet: komplex szám)

Műveletek mint függvények

- A megszokott műveletek (pl. összeadás) kétváltozós (bináris) függvények, azaz három-változós (ternáris) relációk
- Vannak egyszerűbb műveletek, pl. minusz, reciprok: ezek egyváltozós függvények, azaz kétváltozós relációk
- Lesznek még ezeknél is egyszerűbb műveletek, ezek nullváltozós (konstans) küggvények, ezeket *kitüntetett elem*eknek hívjuk. Példa: nulla, egy, igaz, hamis
- A *struktúra* egy halmaz, amin műveletek adottak, melyek különféle axiómákat teljesítenek
- Az első példa $\mathbb{N}$, a természetes számok struktúrája
- Először csak egy kitüntetett elem: 1, és egyetlen egyváltozós művelet, a *rákövetkezés* ami x bemenetre $x+1$ kimenetet ad

A Peano axiómák

- $1 \in \mathbb{N}$
- $\forall i \in \mathbb{N}\ \exists! i' \in \mathbb{N}$
- $\nexists i \in \mathbb{N}\ i' = 1$
- $i' = j' \to i = j$
- $\forall P \subset \mathbb{N}\ 1 \in P \wedge (i \in P \to i' \in P) \to P = \mathbb{N}$

A megszokott $\mathbb{N}$

- A rákövetkezés csak technikai eszköz, minket a megszokott aritmetikai műveletek (összeadás kivonás szorzás osztás) érdekelnek
- Ezeket *definiáljuk*. Az összeadást (is) induktíve: (i) $x + 1 = x'$ (ii) $x + y' = x + y + 1$
- Konvencionálisan 1+1-et 2-nek hívjuk, 2+1-et 3-nak, stb.
- HF4.1 Bizonyítsuk be, hogy 2+3=3+2
- HF4.2–7 CPZ 2.21–2.26
- HF4.8 Ha már adott az összeadás definíciója, definiáljuk a szorzást ennek felhasználásával

Logika

- A matematika alapjai két pilléren nyugszanak, ezek a halmazelmélet és a logika
- A halmazelmélet felépítését már elkezdtük (de lesznek még függvények, műveletek, struktúrák, modellek) de most a logikát is elkezdjük
- A halmazelméletnek van néhány változata (ZFC, NGB, KP ...), a logikának sokkal több
- Ahhoz hogy egy logikát definiáljuk az alábbi dolgok kellenek:
    1. Valami nyelv, amiben a formulákat le tudjuk írni
    2. Valami igazságfogalom
    3. Valami elképzelés arról, hogy a formulák mit jelentenek 'modellelmélet'
    4. Valami bizonyítási módszer 'bizonyításelmélet'
- A nyelvvel kezdjük
- A Σ halmazt *ábécének* hívjuk, elemet *betűknek*
- Több betű egymás után rakásával kapjuk a *sztringeket (láncok, füzérek)*

A formális nyelvelmélet alapjai

- Egy adott Σ ábécé betűiből képzett összes láncot Σ^* -gal jelöljük. Van egy kitüntetett elem amiy λ-val jelölünk, ez az *üres sztring*
- λ hossza 0, az $a \in \Sigma$ hossza 1, általában ha α hosszát $|\alpha|$ jelöli fenn fog állni $|\alpha\beta| = |\alpha| + |\beta|$
- A sztringeken végzett legfontosabb művelet as *konkatenáció* (egymás után írás). Pl. ha $\alpha = abc$ és $\beta = AB$ akkor $\alpha\beta = abcAB$
- A konkatenáció *nem* kommutatív, $\beta\alpha = ABabc \neq \alpha\beta$
- Az $\alpha\alpha$-t α^2-nek rövidítjük, hasonlóan α^3 etc.
- Egy **nyelv** a Σ ábécé fölött Σ^* valamely részhalmaza