A matematika alapjai, 2. előadás

Kornai András

BMETE91AM35 2021-22 Őszi Félév

LATEX-ÜGYEK

- Állatorvosi lovak
- Hogyan kell debuggolni?
- Ellenőrzés!!!
- Mostantól kötelező a latex használata, .pdf a beadandó
- Szókoz és magyar karakterek *nélküli* fájlnevek

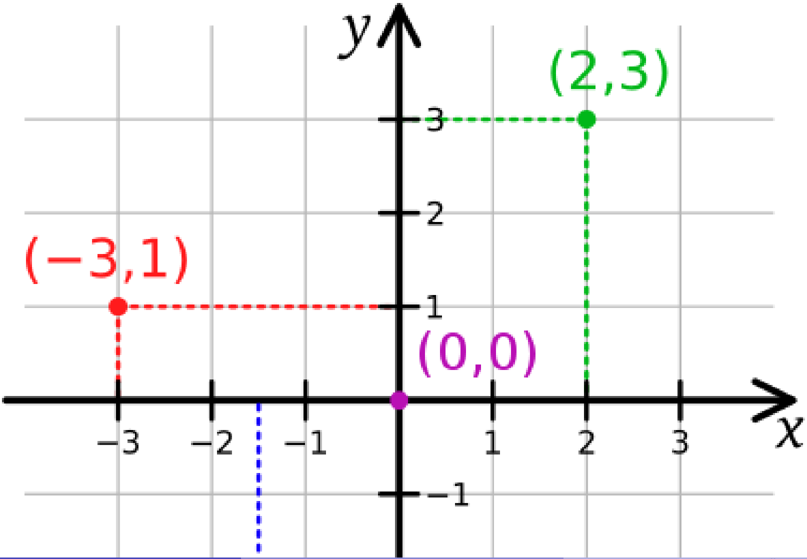
Építkezünk

- Rendezetlen párokból rendezett párokat
- Rendezett párokból relációkat
- Relációkból függvényeket
- Függvényekből műveleteket
- Műveletekből struktúrákat
- Struktúrákból modellstruktúrákat
- Modellstruktúrákból szemantikát

Rendezett párok

- $\{1,2\} = \{2,1\}$ (párhalmaz) de nekünk *rendezett* párok kellenek, amikre $(1,2) \neq (2,1)$
- Az első megközelítés (Haussdorf 1914): beszámozni a koordinátákat, (x,y)-t mint $\{\{x,1\},\{y,2\}\}$ tekintjük. Ez nehézkesebb, amikor x, y maguk is számok, és előfeltételezi a számok koncepcióját!
- A standard megközelítés (Kuratowski 1921): $(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{x\},\{x,y\}\}$
- Vannak változatai, de nem sok újdonságot hoznak https://en.wikipedia.org/wiki/Ordered_pair
- A Descartes avagy *direkt* szorzat $A \times B$ tetszőleges A és B halmazokra mint $\{(a,b)|a \in A, b \in B\}$ van definiálva
- Hogy csinálunk ezekből n-eseket?

Descartes-szorzat: az eszme



Hogyan tovább?

- Megvan az alapok fele, a halmazelmélet, ahhoz hogy ez vízmentesen zárjon fog még kelleni *matematikai logika* is
- **Relációk** Egy (bináris) reláció R az indulási X és az érekezési Y halmazok direkt szorzatának tetszőleges részhalmaza.
- Általában az indulási halmaz (domain) és az értelmezési tartomány nem ugyanaz: a relációnak nem kell minden $x \in X$-ben értelmezve lennie, az értelmezési taromány $\forall a \in X \exists b \in Y : (a, b) \in R$.
- Hasonlóan az érkezési halmaz lehet bővebb az értékkészletnél
- A legfontosabb relációk az **egyenlőség** $=$; a **hasonlóság** $\sim$; és a **rendezés** $>$ vagy $\geq$
- A halmazelméletben csak egyetlen reláció primitív: $\in$ (eleme), az $=$-t ZFC1 definiálja

Relációk

- Az emberi nyelvben sok példa van *x okozza y-t; x testvére y; x egyfajta y ...*
- Az un. logikai szintaxisban a tárgyas igéket az alany és a tárgy közti relációnak szokás tekinteni:*x szereti y-t* mint xLy vagy L(x,y) írjuk
- Az összetettebb igékhez ternáris relációk is kellenek (*Ad(x,y-t,z-nek); Kibérel(x,y-t,z-től,t időre,p bérleti díjért)*)
- A rendezett hármasokat meg lehet csinálni *bal asszociációval* as ((a,b),c) vagy *jobb asszociációval* as (a,(b,c))
- Kuratowski kóddal: $\{\{\{a\}\{ab\}\}\{\{\{a\}\{ab\}\}\{\{a\}\{ab\}\}\{c\}\}\}$ vagy $\{\{a\}\{\{a\}\{\{b\}\{bc\}\}\}\}$
- HF 3.1 Próbálja meg definiálni mikor lesz két kódolás "ugyanaz" (izomorf) és bizonyítsa be, hogy ez teljesül a jobb/bal asszociativitás esetén.

Bináris relációk főbb tulajdonságai

- Minden $R \subset (X \times Y)$ relációhoz elkészíthető a *megfordítása* R^T és a *komplementuma* R^C
- Ez két külön dolog! Pl. az egyenlőségre $=^T$ is $=$ de $=^C$ pedig $\neq$ lesz
- HF 3.2 Írja fel R^T -t R^C-t képlettel!
- Az R reláció **reflexív** iff $\forall a \in X : aRa$
- Az R reláció **irreflexív** iff $\nexists a \in X : aRa$
- Az R reláció **szimmetrikus** iff $\forall ab : aRb \Rightarrow bRa$
- Az R reláció **antiszimmetrikus** iff $\forall ab : aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$
- Az R reláció **tranzitív** iff $\forall abc : aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$
- A relációk halmazok: van únió, metszet, komplementum (az $X \times Y$ univerzumban).
- A relációk kompozíciója is definiálható, ha a típusok illeszkednek: $R \subset X \times Y, S \subset Y \times Z$. Azt mondjuk, hogy $a(S \circ R)c \Leftrightarrow \exists b : aRb \wedge bSc$

A bináris relációk főbb típusai

1. Azon relációkat amelyek reflexívek, szimmetrikusak, és tranzitívak **ekvivalencia-relációk**
2. Azon relációk amelyek reflexívek, antiszimmetrikusak, és tranzitívak **rendezési relációk**
3. Az ekvivalencia-relációkkal foglalkozik CPZ 9. Fejezete
4. Ezek a partíciókhoz kapcsolódnak
5. Az órán: CPZ 9.1-3
6. HF 3.3: CPZ9.4
7. Oszthatóság (CPZ9.6). $a|b \Leftrightarrow b/a \in \mathbb{N}$
8. Mi csak természetes számokra $\{1, 2, \ldots\}$, de könnyen kiterjeszthető egész számokra ($\mathbb{Z}$ -re).
9. HF 3.4: CPZ9.8,10,12,14,16,18,20,22