KA matematika alapjai, 1. előadás

Kornai András

BMETE91AM35 2023-24 Őszi Félév

A KURZUSRÓL

- Ez megalapozó kurzus, nincsenek előfeltételek
- Cél: megtanulni hogy készül a matematika: mik azok az axiómák, állítások (lemmák, tételek) és hogy bizonyítjuk ezeket
- Az 'alap' tárgyakat fogjuk körbejárni, elsősorban problémamegoldással: halmazok, logika, kategóriák, algoritmusok
- Lesznek alapkészségek: LaTeX, bibtex, ...
- Az óra honlapja https://nessie.ilab.sztaki.hu/~kornai/2023/MatematikaAlapjai
- A tankönyv ChartrandPolimeniZhang.pdf innen letölthető
- A feladatok többnyire ebből lesznek (angolul), lehet hogy a diák is angolul lesznek

Osztályzás

- 0. ZH (legutóbb) 0% -ot fog beszámítani!
- Heti házik 50%
- Órai aktivitás 25%
- A maradék 25%-ot a vizsga adja

Mikről lesz szó (nem pont ebben a sorrendben)

- Halmazelmélet bevezető: halmazok, függvények, relációk, műveletek
- Logika bev: formulák, axiómák, dedukció, modellek
- Kategóriaelmélet bev: objektumok, nyilak, funktorok, természetes transzformációk
- Algoritmusok bev: bemenet, kimenet, számítás
- Számok: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
- Struktúrák: csoportok, gyűrűk, testek, modulusok
- Valószinűség: az elemi alapok

Miért van ez így?

1. A matematika két tőből nőtt ki: a számolásból és a mértanból
2. Az axiomatikus módszer eredetileg Euklidész védekezése volt a szofisták ellen (Pāṇini ugyanezt az axiomatikus módszert használta a nyelvtan megalapozására)
3. A modern alapokat $\sim$ 1850-1950 fektették le

A felmérőről

- Az első feladatot majdnem mindenki jól csinálta, a másodikat is sokan, a harmadikra csak részmegoldások voltak, az is csak kevesektől
- Az 1. feladatban a ZFC-ből fogunk kiindulni és megnézzük hogy jön ki az axiómákból
- A 2. feladatnál a megoldásból megyünk visszafelé, azt nézzük hogyan juthatunk el az axiómákhoz
- Belevágunk a LaTeXelsajátításába, elsőnek a ZFC-t fogjuk áttenni

Zermelo-Fraenkel Axioms

1. Axiom of Extensionality: If X and Y have the same elements, then $X = Y$.

$$\forall u\,(u \in X \equiv u \in Y) \Rightarrow X = Y. \tag{1}$$

2. Axiom of the Unordered Pair: For any a and b there exists a set $\{a,\ b\}$ that contains exactly a and b. (also called Axiom of Pairing)

$$\forall a\,\forall b\,\exists c\,\forall x\,(x \in c \equiv (x = a \vee x = b)). \tag{2}$$

3. Axiom of Subsets: If φ is a property (with parameter p), then for any X and p there exists a set $Y = \{u \in X : \varphi(u,\ p)\}$ that contains all those $u \in X$ that have the property φ. (also called Axiom of Separation or Axiom of Comprehension)

$$\forall X\,\forall p\,\exists Y\,\forall u\,(u \in Y \equiv (u \in X \wedge \varphi(u,\ p))). \tag{3}$$

4. Axiom of the Sum Set: For any X there exists a set $Y = \bigcup X$, the union of all elements of X. (also called Axiom of Union)

$$\forall X\,\exists Y\,\forall u\,(u \in Y \equiv \exists z\,(z \in X \wedge u \in z)). \tag{4}$$

5. Axiom of the Power Set: For any X there exists a set $Y = P(X)$, the set of all subsets of X.

$$\forall X\,\exists Y\,\forall u\,(u \in Y \equiv u \subseteq X). \tag{5}$$

6. Axiom of Infinity: There exists an infinite set.

$$\exists S\,[\emptyset \in S \wedge (\forall x \in S)\,[x \bigcup \{x\} \in S]]. \tag{6}$$

7. Axiom of Replacement: If F is a function, then for any X there exists a set $Y = F[X] = \{F(x) : x \in X\}$.

$$\begin{aligned} &\forall x\,\forall y\,\forall z\,[\varphi(x,\ y,\ p) \wedge \varphi(x,\ z,\ p) \Rightarrow y = z] \\ &\Rightarrow \forall X\,\exists Y\,\forall y\,[y \in Y \equiv (\exists x \in X)\,\varphi(x,\ y,\ p)]. \end{aligned} \tag{7}$$

8. Axiom of Foundation: Every nonempty set has an $\in$-minimal element. (also called Axiom of Regularity)

$$\forall S\,[S \neq \emptyset \Rightarrow (\exists x \in S)\,S \bigcap x = \emptyset]. \tag{8}$$

9. Axiom of Choice: Every family of nonempty sets has a choice function.

$$\forall x \in a\,\exists A(x,\ y) \Rightarrow \exists y\,\forall x \in a\,A(x,\ y(x)). \tag{9}$$

Latex basics

- Tegyél latex-et a laptopodra. A https://www.latex-project.org/get/ lapon lehet választani (TexLive a Linuxhoz, MacTex a Machez, vagy MikTex a Windowshoz).
- Ezekhez van GUI, de a terminál mindenütt elég, ha valaki tud síma szövegszerkesztővel (emacs, vi, vim, nano, etc) dolgozni
- write-compile-debug ciklus: megírjuk file.tex-et, a rendszer ezt file.pdf-fé kompilálja, tesztelés, úra.
- Az első HF megírni a ZFC-t LaTeX-ben! Ezt a levai.math@gmail.com címre kell küldeni, a Subject: Matalap2. Most még küldje el mindenki a latex–et (.tex), innentől elég lesz a pdf is.
- Aki akarja az magyarul csinálja, de angolul érdemes kezdeni
- A honlapról letölthető `zfcskel.tex` jó kiindulópont

A dokumentum alapszerkezete

```
\documentclass{article}
\usepackage{colortbl}
\author{YOUR NAME}
\title{The ZFC axioms of set theory}
\date{}
\begin{document}
\maketitle

\begin{enumerate}

\item {\color{green} Extensionality} If $X$ and $Y$ ...
\begin{equation}
\forall u ...
\end{equation}

\item {\color{green} Unordered Pair} For any $a$ and $b$
\begin{equation}
\forall a \forall b
\end{equation}
...

\item {\color{green} Choice}  Every family of nonempty sets...
\begin{equation}
\forall x \in a \exists A(x,y) \Rightarrow ...
\end{equation}
\end{enumerate}

\end{document}
```

Miért használ minden matematikus LaTeX-et?

1. A képletírás máshogy nehéz, LaTeX-ben könnyű
2. A matematikusok túl sok szimbólumot használnak, sokkal könnyebb a nevüket megtanulni, pl. `\forall` a $\forall$ és `\exists` a $\exists$, ...
3. Forma és tartalom világos különválasztása
4. “Tárgynyelv” és “metanyelv” világos különválasztása
5. Mindenfélét tud, platformfüggetlenül
6. Sokkal szebb tipográfia mint Word-ben vagy máshol
7. Az ekoszisztéma többi részével jól integrálva (pl. weblapokhoz MathJax)

Mi létezik valójában?

- Talán ez a filozófia legnehezebb kérdése
- Léteznek háromszögek? Hogyan? Találunk háromszögeket a természetben?
- Léteznek a foci szabályai? Hogyan? Megtalálhatóak a természetben?
- Fogadjuk el, hogy a *tárgyak* (fák, házak) valóban léteznek! [Sokan nem fogadják ezt el, ld. https://en.wikipedia.org/wiki/Phenomenalism]
- A foci szabályai olyanok mint a házak, a természetben nem találhatóak, az emberek hozzák létre őket
- A matematika olyan mint a foci: játék. Szórakoztató, és hasznos is (HF: írjuk le, miért hasznos a foci, ha ugyan hasznos egyáltalán)
- A matematikusok elfogadják a halmazok létezését

Hogy léteznek a halmazok?

- Úgy, hogy elfogadjuk a ZF(C) axiómákat
- Megengedhetnénk éppenséggel más létezőket is, pl. számokat, háromszögeket, függvényeket ...
- De nem kell! Ha egyszer a halmazokat feltételezzük, a többi már ingyen van
- Mennyit kell axiomatikusan megkövetelni? Kezdjük az üres halmazzal
- Be tudjuk bizonyítani az $\emptyset$ létezését?
- Az olcsó trükk: legyen ez axióma

Az üres halmaz

- $\exists x \forall y \neg (y \in x)$
- Lehet hogy több is van belőle? Lehet hogy ez hülye kérdés?
- Nem, mert a legtöbb ember egyetért, hogy a kerek háromszögek és a rózsaszín elefántok halmaza egyaránt üres, de ezek mégsem ugyanazok a halmazok!
- De a halmazelméletben csak egy üres halmaz lehet. Miért?
- Tegyük fel, hogy u és v üres halmazok. Mit mond az 1. axióma?
- Ha tehát létezik, akkor egyértelmű. De létezik-e vajon?
- Nézzük meg újra az axiómákat

Még mindig az üres halmaz

- Az $\emptyset$ az egy olyan x ami teljesíti a $\forall y \neg (y \in x)$ feltételt.
- De ez a $\forall y \neg (y \in x)$ egy *tulajdonság*, és a 3. Axióma (részhalmaz) garantálja, hogy ha ϕ egy tulajdonság p paraméterrel, akkor minden X halmazra létezik egy olyan Y részhalmaz ami pontosan azokat az elemeit tartalmazza X-nek amik a ϕ tulajdonságnak örvendenek
- Ha tehát létezik egy halmaz, bármilyen halmaz, mondjuk X, akkor abból ZFC3 segítségével meg tudjuk konstruálni az üres halmazt!
- De mi van, ha semmilyen halmaz nem létezik? (A) Menj haza, tanulj valami mást (B) Ismerd el, hogy legalább *valamilyen* halmazok léteznek!
- Voltak nagyon komoly kisérletek arra, hogy ellentmondást találjanak a ZFC-ben, de eddig mindegyik kudarcot vallott. Ezért azt gondoljuk, hogy a ZFC megfelelően megbízható alapja a matematikának

Még egy szót az üres halmazról

- Vannak másfajta halmazelméletek, mert vannak másfajta axiómarendszerek. A ZF C nélkül más, mint a ZF C-vel. Sokat tanulmányozott axiómarendszerek a von Neumann-Gödel-Bernays (NGB), Morse-Kelley (MK), és Kripke-Patek – lehet, hogy mi is beszélünk majd ezekről egy kicsit. Vannak nagyon izgalmas rendszerek mint Aczel-é, amiben a ZFC8-at az AFA (Anti-Foundation Axiom) helyettesíti.
- Nézzük meg még egy kicsit alaposabban a ZFC-t. Ki tudjuk hozni az üres halmazt máshogy is? Hát persze, ott van ZFC6, mit mond ki?
- Előszöris garantálja egy bizonyos végtelen halmaz létezését
- De ennél többet tesz, eleve garantálja az $\emptyset$ létezését is!
- Attól függően, hogy milyen axiómarendszert használunk, vagy (A) axiomatikusan garantáljuk az üres halmaz létezését vagy (B) bizonyítjuk azt más axiómákból
- Lehetséges (C), valahogy megélni $\emptyset$ nélkül. Lehet, de nagyon

The first problem from the 0th test

Three subsets A, B, and C of $\{1,2,3,4,5\}$ have the same cardinality. Furthermore

- A 1 belongs to A and B but not to C
- B 2 belongs to A and C but not to B
- C 3 belongs to A and exactly one of B and C
- D 4 belongs to an even number of A, B, and C
- E 5 belongs to an odd number of A, B, and C
- F The sums of the elements in two of the sets A, B, and C differ by 1

	1	2	3	4	5
A	$+$	$+$	$+$	$0/2$	$1/3$
B	$+$	$-$	$\vee$	$0/2$	$1/3$
C	$-$	$+$	$\wedge$	$0/2$	$1/3$

Applying the other conditions

- So far, we know that A has at least 3 elements. Can it have 5?
- No, because in that case B and C must also have 5 elements, so they all would be the same set by Axiom 1.
- Can they all have four? No, because that would require 4 and 5 to appear in both B and C, and that would still not be enought, because 3 appears in only one of these!
- So we are done with A, and we now know that 5 cannot appear in A, so condition E means we must have 1 occurrence of 5 (either in B or in C, not both)

	1	2	3	4	5
A	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
B	$+$	$-$	$\vee$	0/2	$\wedge$
C	$-$	$+$	$\wedge$	0/2	$\vee$

Applying the other conditions

Since B will have one of 3 and 5, and C will have the other, we must have 4 both in B and C. This leaves us two possibilities:

	1	2	3	4	5
A	+	+	+	−	−
B	+	−	+	+	−
C	−	+	−	+	+

	1	2	3	4	5
A	+	+	+	−	−
B	+	−	−	+	+
C	−	+	+	+	−

So the sums of the numbers in the sets will be

	1	2	3	4	5	
A	+	+	+	−	−	6
B	+	−	+	+	−	8
C	−	+	−	+	+	10

	1	2	3	4	5	
A	+	+	+	−	−	6
B	+	−	−	+	+	10
C	−	+	+	+	−	9

HF

- Készíts .tex és .pdf fájlt a ZFC axiómákról a zfcskel.tex alapján
- Oldd meg az 1-9 problémák mindegyikét Chartrand-Polimeni-Zhang 1.1-ből (pp 17–18). Ezt még be lehet adni kézírással (nem papiron, fényképet és emailt kérek) de aki LaTeX-et használ az plusz pontot kap
- Innentől viszont már minden LaTeXkell legyen!