Analízis fizikusoknak/mérnököknek - 3. gyakorlat

1. Igazoljuk, hogy az $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{4}{x_n})$ sorozat tetszőleges $x_0 > 0$ esetén konvergens. Adjuk meg a határértékét. (Hogyan lehetne egy szám köbgyökéhez konvergáló sorozatot megadni?)

2. Ábrázoljuk az $f(x) = -\cos(2x - \pi) + 1$ függvényt, adjuk meg az értelmezési tartományát és az értékkészletét, vázoljuk a grafikonját. Invertálható-e ez a függvény? Ha igen, határozzuk meg az inverzét. Ha nem, adjunk meg egy maximális intervallumot, amelyre megszorítva $f(x)$ invertálható, írjuk fel a megszorított függvény inverzét, és adjuk meg az inverz függvény értelmezési tartományát és értékkészletét. Ábrázoljuk az inverz függvényt is.

3. (a) Mutassuk meg, hogy $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$. (b) Fejezzük ki $\sin(\operatorname{arctg} x)$-et egyszerűbben.

4. Határozzuk meg a következő határértékeket: $\lim\limits_{x\to-5} \frac{x^2-25}{x+5}$, $\lim\limits_{x\to1} (\frac{1}{x-1} - \frac{A}{x^3-1})$, $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to2} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{1+4x}-\sqrt{5x-1}}$.
   $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{tg}(4x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$, $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - x)\operatorname{tg} x$. (Felhasználhatjuk azt, hogy $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$.)

5. Tegyük folytonossá a paraméterek megfelelő megválasztásával: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(4x)}{\operatorname{tg}(7x)} & \text{, ha } -0,01 < x < 0, \\ B & \text{, ha } x = 0, \\ Ce^{3x} & \text{, ha } x > 0. \end{cases}$

6. $b_0 = 1, b_{n+1} = \frac{1}{1+b_n}$. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat konvergens. Mi a határértéke?

7. Legyen $0 < a < b$ rögzített, $a_1 = a, b_1 = b, a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. Bizonyítsuk be, hogy mindkét sorozat konvergens, és ugyanoda tartanak.

Analízis fizikusoknak/mérnököknek - 3. gyakorlat

1. Igazoljuk, hogy az $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{4}{x_n})$ sorozat tetszőleges $x_0 > 0$ esetén konvergens. Adjuk meg a határértékét. (Hogyan lehetne egy szám köbgyökéhez konvergáló sorozatot megadni?)

2. Ábrázoljuk az $f(x) = -\cos(2x - \pi) + 1$ függvényt, adjuk meg az értelmezési tartományát és az értékkészletét, vázoljuk a grafikonját. Invertálható-e ez a függvény? Ha igen, határozzuk meg az inverzét. Ha nem, adjunk meg egy maximális intervallumot, amelyre megszorítva $f(x)$ invertálható, írjuk fel a megszorított függvény inverzét, és adjuk meg az inverz függvény értelmezési tartományát és értékkészletét. Ábrázoljuk az inverz függvényt is.

3. (a) Mutassuk meg, hogy $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$. (b) Fejezzük ki $\sin(\operatorname{arctg} x)$-et egyszerűbben.

4. Határozzuk meg a következő határértékeket: $\lim\limits_{x\to-5} \frac{x^2-25}{x+5}$, $\lim\limits_{x\to1} (\frac{1}{x-1} - \frac{A}{x^3-1})$, $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to2} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{1+4x}-\sqrt{5x-1}}$.
   $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{tg}(4x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$, $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - x)\operatorname{tg} x$. (Felhasználhatjuk azt, hogy $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$.)

5. Tegyük folytonossá a paraméterek megfelelő megválasztásával: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(4x)}{\operatorname{tg}(7x)} & \text{, ha } -0,01 < x < 0, \\ B & \text{, ha } x = 0, \\ Ce^{3x} & \text{, ha } x > 0. \end{cases}$

6. $b_0 = 1, b_{n+1} = \frac{1}{1+b_n}$. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat konvergens. Mi a határértéke?

7. Legyen $0 < a < b$ rögzített, $a_1 = a, b_1 = b, a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. Bizonyítsuk be, hogy mindkét sorozat konvergens, és ugyanoda tartanak.