



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Babcsányi - Gyurmánczi - Szabó - Wettl

**MATEMATIKA FELADATGYŰJTEMÉNY I.**



**Műegyetemi Kiadó, 2009**

Lektor:  
**Szász Gábor**

Szerkesztő:  
**Wetli Ferenc**

Szerzők:  
**Babcsányi István** (1., 7., 8. fejezet)  
**Gyurmánczi János** (6., 12., 13. fejezet)  
**Szabó Lajos** (2., 3., 4., 5. fejezet)  
**Wetli Ferenc** (9., 10., 11. fejezet)

Rajzoló:  
**Lukács Erzsébet**

Műszaki szerkesztő:  
**Babcsányi István**  
**Wetli Ferenc**  
**Zibolen Endre**

(Tizennegyedik utánnnyomás)

egyetemi jegyzet  
oktatási célra

Azonosító: **075001**

**A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem**

**Természettudományi Karának**  
megrendelése alapján kiadja a

**Műegyetemi Kiadó**  
[www.kiado.bme.hu](http://www.kiado.bme.hu)

Felelős vezető: Wintermantel Zsolt

Terjedelem: 30 (A/5) ív

Nyomdai munkák

**Műegyetemi Nyomda**

Munkaszám: 778/09

## Előszó

Ez a kötet az első abból a négykötetes feladatgyűjteményből, melyet a Közlekedésmérnöki Kar Matematika Tanszékének oktatói készítenek Szász Gábor Matematika I-II-III című tankönyvéhez. A kötet tizenhárom fejezetének címei — az első fejezet kivételével — megegyeznek a tankönyv első kötetében lévő fejezetcímekkel. A fejezetek sorszámozatlan alfejezetekre oszlanak. Minden alfejezet tipográfiaiilag is elkülönülő elméleti összefoglalóval kezdődik; ez tartalmazza a felhasználandó ismeretek legfontosabb elemeit: definíciókat, tételeket, esetleg számítási technikákat, módszereket, melyek azonosítója egy betűvel kezdődik (ezek jelentése: **D** definíció, **T** tétel, **P** példa, **J** jelölés, **M** megjegyzés), majd a fejezet sorszáma, végül a fejezeten belüli saját sorszám következik. Például:

**T 3.2** Ez itt a harmadik fejezet elméleti bevezetőjének kettes sorszámú tétele.

Az elméleti bevezető után következnek a feladatok; ezek csak a fejezeten belüli sorszámukat viselik. Azonos fejezetből való hivatkozásnál ez a sorszám (pl.: **56.**), más fejezetből való hivatkozásnál a fejezet és a feladat sorszáma együtt szerepel (pl.: **7.56.**). A feladat sorszámának felső indexében szerepelhet egy jel, melyet az alábbi példákban magyarázunk:

- 51.\* Ez az 51. feladat, megoldását fontosnak tartjuk.
- 52.<sup>P</sup> Ehhez a feladhoz részletes útmutató tartozik a megoldásoknál.
- 53.\* Ez a feladat a nehezebbek közé tartozik.
- 54.<sup>K</sup> Ehhez a feladathoz kalkulátor használata szükséges.
- 55.<sup>P</sup> Ehhez a feladathoz programozható számoló- vagy számítógép használata szükséges.

A végeredményt, néhány kivétellel, minden feladatnál közöljük. Az ábráknak nincs saját sorszámuk, de minthogy közvetlenül a feladat mellett szerepelnek, a szövegből mindig egyértelmű, hogy melyikhez tartoznak.

A kötet szerzői köszönetet mondanak Szász Gábornak rendkívül gondos lektori munkájáért és hasznos javaslataiért.

A feladatgyűjtemény szövegét a  $\text{\LaTeX}$ , rajzait az AUTOCAD programcsomaggal szerkesztettük. Ez könnyebbé teszi egy javított kiadás elkészítését. Ezért kérünk minden olvasót, hogy a megtalált hibákat, javítási ötleteiket juttassák el a Közlekedésmérnöki Kar Matematika Tanszékére.

Budapest, 1992. május 20.

A szerkesztő

## 1. fejezet

### Bevezetés

#### Algebrai feladatok

**J 1.1** A számok gyakran használt halmazaira a következő jelöléseket vezetjük be:  $\mathbf{N}$  a nemnegatív egész számok,  $\mathbf{N}^+$  a pozitív egész számok,  $\mathbf{Z}$  az egész számok,  $\mathbf{Q}$  a racionális számok,  $\mathbf{R}$  a valós számok és  $\mathbf{R}^+$  a pozitív valós számok halmaza.

**J 1.2** Az  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  összegre a  $\sum_{k=1}^n a_k$  vagy a  $\sum_{k=1}^n a_k$  jelölést használjuk (kiejtés: szumma  $k = 1$ -től  $n$ -ig  $a_k$ ).

**D 1.3** Vezessük be az  $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$  szorzatra az  $n!$  (kiejtés:  $n$  faktoriális) jelölést. Legyen továbbá  $0! = 1! = 1$ .

**D 1.4** Legyenek  $a, b \in \mathbf{Z}$ ,  $a \neq 0$ . Az, hogy  $a$  osztója  $b$ -nek, azt jelenti, hogy van olyan  $c \in \mathbf{Z}$ , hogy  $ac = b$ . Jelölése:  $a|b$ .

#### Feladatok

Legyen  $a, b \in \mathbf{R}$  és  $n \in \mathbf{N}^+$ . Bizonyítsuk be a következő azonosságokat:

1.  $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ .
2.  $a^{2n-1} + b^{2n-1} = (a + b)(a^{2n-2} - a^{2n-3}b + a^{2n-4}b^2 - \dots - ab^{2n-3} + b^{2n-2})$ ,
3.  $a^{2n} - b^{2n} = (a + b)(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + a^{2n-3}b^2 - \dots + ab^{2n-2} - b^{2n-1})$ .
4. Mutassuk meg, hogy ha  $a + b + c = 0$  ( $a, b, c \in \mathbf{R}$ ), akkor  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ .

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

5.  $|x| = x + 1$ ,      6.  $|2x + 3| = x^2$ ,      7.  $|\sin x| = \sin x + 2$ ,
8.  $|\sin x| = \sin x + 3$ ,      9.  $|\operatorname{tg} x| = \operatorname{tg} x + 2\sqrt{3}$ ,      10.  $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| = \frac{x-1}{x+1}$ ,
11.  $|x^2 + 6x + 6| = |x^2 + 4x + 9| + |2x - 3|$ ,      12.  $|x^4 - x^2 - 6| = |x^4 - 4| - |x^2 + 2|$ ,
13.  $x\sqrt{x} = \sqrt{x^x}$ .

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

14.  $\frac{3x+5}{4x-7} < 0$ ,      15.  $\frac{2x+3}{x-3} \leq 5$ ,      16.  $1 < \frac{3x-2}{4x+5} < 4$ ,



17.  $\frac{5x-2}{|2x+1|} < 3$ ,      18.<sup>o</sup>  $|3x-7| < 1$ ,      19.<sup>p</sup>  $|x| < |x+6|$ ,  
 20.  $|x+2| + |x-2| \leq 12$ ,      21.  $|4x-3| < x < |4x+3|$ ,  
 22.  $||x+1| - |x-1|| < 1$ ,      23.  $\left| \frac{x}{x+1} \right| > \frac{x}{x+1}$ ,  
 24.  $\frac{2x+1}{x-4} < \frac{x+5}{x+1}$ ,      25.<sup>p</sup>  $\frac{3x^2+7x-4}{x^2+2x-3} \leq 2$ ,  
 26.  $|2-x^2| > 3$ ,      27.  $|x(1-x)| < 0,05$ ,  
 28.  $|x^2-7x+12| > x^2-7x+12$ ,      29.  $|x^2-5x| > |x^2| - |5x|$ ,  
 30.<sup>p</sup>  $\sqrt{3-2x-x^2} > x+2$ ,      31.  $\sqrt{2-x} - \sqrt{x} > 1$ .

Oldjuk meg valós  $x$  ismeretlenre az alábbi egyismeretlenes egyenlőtlenségrendszereket:

- 32.<sup>p</sup>  $4 < (2x+3)^2 < 9$ ,      33.  $(a-1)x > 2a$ ,  $ax < a+1$ .

Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azoknak az  $(x, y)$  pontoknak a halmazát, amelyek koordinátáira a következő egyenletek, illetve egyenlőtlenségek teljesüljenek:

- 34.<sup>p</sup>  $|y| \leq |x|$ ,      35.  $|y| < |x+2|$ ,  
 36.<sup>o</sup>  $|x| + |y| \leq 2$ .      37.<sup>o</sup>  $|x| + |y| = 1$ ,  
 38.  $|x| - |y| = 1$ ,      39.<sup>o</sup>  $|x+y| = |x| + |y|$ ,  
 40.  $|x-y| = |x| - |y|$ ,

Oldjuk meg a következő kétismeretlenes egyenlőtlenségrendszereket a valós szám-párok halmazán:

41.  $x-y-2 < 0$       42.  $3x-y-2 < 0$   
 $3x-y-8 > 0$ ,       $5x-4y+6 < 0$ ,  
 43.  $x-y-2 < 0$       44.  $4x+y-2 = 0$   
 $3x-3y+10 < 0$ ,       $x-2y-14 < 0$ ,  
 45.  $x-5y+7 < 0$       46.  $3x-7y+13 = 0$   
 $x-y-1 < 0$        $2x+5y-1 > 0$   
 $x-2y+4 > 0$ ,       $5x-2y-17 < 0$ ,  
 47.  $y^2-4x < 0$       48.  $25x^2+9y^2-225 \leq 0$   
 $x^2+y^2-2x \geq 0$   $x \leq 2$ ,       $9y^2-16x^2-144 \geq 0$ .

Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenségeket. Ahol lehet, állapítsuk meg, hogy milyen feltételek mellett áll fenn az egyenlőség:

- 49.<sup>o</sup>  $|x+y| \leq |x| + |y|$  ( $x, y \in \mathbf{R}$ ) (háromszög-egyenlőtlenség, l. még 125.),  
 50.<sup>p</sup>  $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ),      51.<sup>p</sup>  $|a-b| \geq ||a| - |b||$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ),  
 52.  $\left| \frac{1}{a-b} \right| < \frac{2}{|a|}$ , ha  $|b| < \frac{|a|}{2}$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ),  
 53.<sup>o</sup>  $a + \frac{1}{a} \geq 2$  ( $a \in \mathbf{R}^+$ ),      54.  $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$  ( $x \in \mathbf{R}$ ),

1. Bevezetés — Algebrai feladatok

55.  $\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2} \quad (x \in \mathbf{R}),$
- 56.\*  $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad (a, b \in \mathbf{R}^+)$  (a harmonikus, a mértani és a számtani közép közötti összefüggés; l. még a 128. feladatot!)
- 57.\* Bizonyítsuk be, hogy ha  $a, b \geq 0$  és  $\alpha > \beta > 0$  ( $a, b, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ), akkor
- $$(a^\alpha + b^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \leq (a^\beta + b^\beta)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Az alábbi feladatokban értelmezzük a (nem üres)  $S$  halmazon a megadott  $*$  vagy  $\circ$  műveleteket. Vizsgáljuk meg, hogy a halmaz zárt-e ezekre a műveletekre nézve, azaz a műveletek eredménye mindig benne van-e a halmazban? Ha igen, akkor a műveletek kommutatívok-e, asszociatívok-e? Ahol két műveletet is megadtunk, ott disztributív-e valamelyik művelet a másikra nézve?

58.  $S = \mathbf{R}, \quad x * y = y, \quad x, y \in \mathbf{R},$
59.  $S = \mathbf{R}, \quad x * y = \max(x, y), \quad x, y \in \mathbf{R},$
60.  $S$  a páratlan számok halmaza,  $*$  a számok összeadása,
61.  $S$  a páros számok halmaza,  $*$  a számok összeadása,
62.  $S$  a páratlan számok halmaza,  $*$  a számok szorzása,
- 63.\*  $S = \mathbf{R}, \quad x \circ y = x + 2y, \quad x, y \in \mathbf{R},$
- 64.\*  $S = \mathbf{R}, \quad x \circ y = ax + by + c, \quad x, y \in \mathbf{R},$  ahol  $a, b, c$  adott valós számok,
65.  $S = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbf{Z}\},$  a  $*$  és a  $\circ$  művelet a valós számok halmazán értelmezett összeadás és szorzás,
66.  $S = \{a + b\sqrt[3]{2}; a, b \in \mathbf{Z}\},$  a  $*$  és a  $\circ$  művelet a valós számok halmazán értelmezett összeadás és szorzás,
- 67.\*  $S = \mathbf{R}, \quad a * b = a + b - 1, \quad a \circ b = a + b - ab \quad (a, b \in \mathbf{R}).$

Számítsuk ki az alábbi összegeket:

- 68.\*  $\sum_{k=0}^5 (2k+1),$
- 69.\*  $\sum_{k=-3}^1 k^3,$
70.  $\sum_{k=0}^5 (-1)^k (2k+1),$
- 71.\*  $\sum_{k=0}^5 (-1)^k,$
72.  $\sum_{k=7}^{20} \pi,$
- 73.\*  $\sum_{k=1}^4 k \sin \frac{k\pi}{2}.$

Írjuk fel a szumma jel alkalmazásával a következő összegeket:

- 74.\*  $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4,$
- 75.\*  $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5},$
76.  $15 + 24 + 35 + \dots + (n^2 - 1),$
77.  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$
- 78.\*  $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$
79.  $a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5.$

Melyek igazak az alábbi összefüggések közül minden  $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k$  és  $c$  valós számra?

1. Bevezetés — Algebrai feladatok

- 80.\*  $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k,$       81.\*  $\sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k,$   
 82.  $\sum_{k=1}^n a_k b_k = \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k \right),$       83.\*  $\left( \sum_{k=1}^n a_k \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j.$   
 84. Írjuk fel az  $x$ -ben másodfokú  $\sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2$  függvény diszkriminánsát, ahol  $a_k, b_k \in \mathbf{R}.$

85.\* (Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenség) Az előző feladat eredményét felhasználva bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenséget, ahol  $a_k, b_k \in \mathbf{R}:$

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 \right).$$

86. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges  $a$  és  $b$  valós számra:

$$(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \geq (a^3 + b^3)^2.$$

87. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges  $a, b$  és  $x$  valós számra:

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \cos x + b \sin x \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Számítsuk ki a következő összegeket:

88.  $\sum_{k=0}^0 (-3),$       89.  $\sum_{k=m}^n c \quad (n \geq m); c \text{ konstans},$

90.  $\sum_{k=1}^{50} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right),$       91.  $\sum_{k=2}^{20} \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k-1)^2} \right),$

92.\*  $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}),$

93.  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)},$  (Útmutatás:  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ ),

94.\*  $\sum_{k=1}^n \sin kx$  (Útmutatás: szorozzunk  $2 \sin \frac{x}{2}$ -vel),

95.  $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl},$  ahol  $a_{kl} = 0,$  ha  $k \neq l$  és  $a_{kl} = 1,$  ha  $k = l,$

96.  $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl},$  ha  $a_{kl} = k,$       97.  $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl},$  ha  $a_{kl} = k - l.$

Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket:

98.  $\frac{10!}{8!} + \frac{10!}{3!7!} - \frac{1!}{0!},$       99.  $\frac{(n+3)!}{(n-2)!} \quad (n \geq 2),$

100.\*  $\frac{n!(2n+1)!}{(n-1)!(2n+3)!} \quad (n \in \mathbf{N}^+),$       101.  $\frac{(n-k)!(2n+1)!}{n!(n+k)!} \quad (n, k \in \mathbf{N}; k \leq n).$

102.\* Bizonyítsuk be, hogy ha  $k|m$  és  $k|(m+n),$  ahol  $k, m, n \in \mathbf{Z}$  és  $k \neq 0,$  akkor  $k|n.$  Igaz-e az állítás megfordítása?

## Teljes indukció

**D 1.5** A teljes indukció a direkt bizonyítás egyik fontos típusa. Jelöljön  $A(n)$  olyan állítást, amely az  $n$  egész számtól függ. A bizonyítás két lépésből áll. Először megmutatjuk, hogy van olyan  $n_0$  egész szám, hogy az  $A(n_0)$  állítás igaz. Azután feltesszük, hogy valamely  $n$  egész számra  $A(n)$  igaz, s ennek alapján bebizonyítjuk, hogy  $A(n+1)$  is igaz. Ezekből már következik, hogy  $A(n)$  igaz minden  $n \geq n_0$  esetben.

### Feladatok

Teljes indukcióval bizonyítsuk be, hogy a következő állítások igazak, ha az  $n$  pozitív egész szám nagyobb vagy egyenlő valamely  $n_0$  pozitív egész számnál (adjuk meg a legkisebb ilyen  $n_0$ -t):

$$103. \bullet 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad 104. 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2,$$

$$105. \bullet \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$106. \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3},$$

$$107. \bullet \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^2 = 1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2},$$

$$108. \sum_{k=1}^n (k-1)k^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}, \quad 109. \sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1},$$

$$110. \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2},$$

$$111. \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$

$$112. \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) \dots (k+t-1) = \frac{n(n+1) \dots (n+t)}{t+1}, \quad t \in \mathbb{N}^+,$$

$$113. \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \quad 114. \sum_{k=1}^n k(k!) = (n+1)! - 1,$$

$$115. \bullet \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}, \quad 116. \bullet \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} > \frac{13}{24},$$

$$117. \bullet \sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n},$$

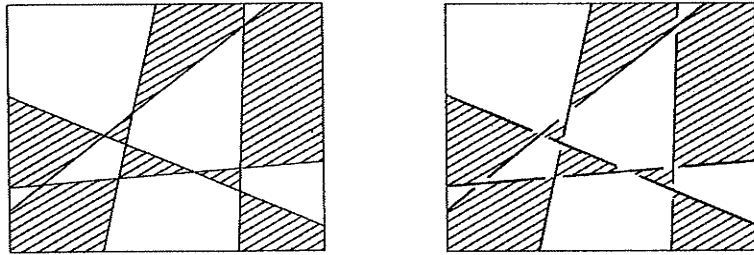
118.  $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < n$ , 119.  $3^n > 2^n + 7n$ ,

120.  $\frac{(2n)!}{(n!)^2} < 4^{n-1}$ ,

121.  $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$  (a bal oldalon  $n$  darab gyökjel van),

122.  $3 + 33 + \dots + 33 \dots 3 = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}$  (a bal oldalon  $n$  tagú összeg van).

123.  $\triangleright$  Egy síkbeli tartományt  $n$  darab egyenessel részekre osztunk. Mutassuk meg, hogy az így kapott "térkép" két színnel színezhető úgy, hogy a közös oldallal rendelkező részek különböző színűek legyenek (l. bal oldali ábra).



124.  $\star$  Egy országban úgy építenek autópályákat, hogy mindegyik autópálya egyenes, egyik kereszteződésben sem találkozik kettőnél több út, és minden kereszteződésben az egyik út a másik fölött halad. Mutassuk meg, hogy bármely ilyen úthálózatban elérhető az, hogy minden úton felváltva alul majd felül haladjunk át a kereszteződésen. (Útmutatás: Használhatjuk az előző feladat eredményét és a jobb oldali ábrát.)

125.  $\star$  Mutassuk meg, hogy ha  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ , akkor

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|,$$

és az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha  $a_1, a_2, \dots, a_n$  számok között nincsenek különböző előjelűek. (l. a 49. feladatot!)

126.  $\star$  Mutassuk meg, hogy ha  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}^+$  és  $x_1 x_2 \dots x_n = 1$ , akkor  $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$ , és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$ .

127. Bizonyítsuk be, hogy ha  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}^+$ , akkor  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$ .

128.  $\triangleright$  Bizonyítsuk be, hogy ha  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}^+$ , akkor

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n},$$

azaz pozitív számok mértani közepe nem nagyobb a számtani közepüknél, egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

129. Igazoljuk, hogy  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}^+$  esetén  $nx_1x_2 \dots x_n \leq x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n$ .

130. Bizonyítsuk be az  $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$  ( $n \geq 2$ ) egyenlőtlenséget.

Igazoljuk az alábbi oszthatóságokat ( $n \in \mathbf{N}^+$ ):

131.<sup>p</sup>  $8 \mid 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ ,    132.<sup>p</sup>  $6 \mid n(2n^2 - 3n + 1)$ ,    133.<sup>p</sup>  $133 \mid 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ .

134.\* Bizonyítsuk be, hogy minden 1-nél nagyobb pozitív egész szám sorrendtől eltekintve egyértelműen bontható fel prímszámok szorzatára (a számelmélet alaptétele).

Keressük meg a hibát a következő bizonyításokban:

135. Bebizonyítjuk, hogy minden egész szám egyenlő. Ehhez megmutatjuk, hogy minden egész szám egyenlő a rákövetkező egész számmal. Tegyük fel, hogy az állítás igaz az  $n$  egész számra, azaz  $n = n + 1$ . Adjunk 1-et az egyenlet mindkét oldalához, ekkor azt kapjuk, hogy  $n + 1 = n + 2$ , tehát a tulajdonság öröklődik.

136.\* Bebizonyítjuk, hogy a sík minden pontja egy egyenesen van. Ehhez megmutatjuk, hogy véges sok pont a síkon mindig egy egyenesen van. Az állítás  $n = 2$  esetén igaz, hiszen bármely két pont egy egyenesen van. Tegyük fel, hogy bármely  $n$  pont egy egyenesen van. Bizonyítjuk, hogy akkor bármely  $n + 1$  pont is egy egyenesen van. Ha ugyanis nem volna, az azt jelentené, hogy van a síkon  $n$  olyan pont, amelyek egy egyenesen vannak, és egy  $(n + 1)$ -edik pont, amely nincs ezen az egyenesen. Ekkor elhagyva az egy egyenesen lévő  $n$  pont valamelyikét, ezzel a ponttal olyan  $n$  pontot kapnánk, amelyek már nincsenek egy egyenesen, ez pedig ellentmond az indukciós feltevésnek.

## 2. fejezet

### Halmazelmélet

**D 2.1** Két halmazt akkor és csak akkor tekintünk **egyenlőnek**, ha elemeik ugyanazok. A halmazt, melynek nincs eleme, **üres halmaznak** nevezzük. Jele:  $\emptyset$ .

**D 2.2** Az  $A$  halmazt a  $B$  halmaz **részalmazának** nevezzük ( $A \subseteq B$ ), ha az  $A$  minden eleme  $B$ -nek is eleme.  $A$  **valódi része**  $B$ -nek ( $A \subset B$ ), ha  $A \subseteq B$ , de  $A \neq B$ .

**T 2.3** A halmazok közötti tartalmazásra teljesül a következő három tulajdonság:

Reflexivitás: minden  $A$ -ra  $A \subseteq A$ .

Antiszimmetria: ha  $A \subseteq B$  és  $B \subseteq A$ , akkor  $A = B$ .

Tranzitivitás: ha  $A \subseteq B$  és  $B \subseteq C$ , akkor  $A \subseteq C$ .

**D 2.4 Halmazműveletek:** Az  $A$  és  $B$  halmaz  $A \cap B$  **metszetén** (közös részén) azoknak az elemeknek a halmazát értjük, amelyek mindkét halmazban benne vannak;  $A \cup B$  **egyesítettjén** (unióján) azoknak a halmazát, amelyek a két halmaz közül legalább az egyikben benne vannak. Az  $A$  és  $B$  halmaz  $A - B$  **különbségén** értjük az  $A$  összes olyan elemeinek halmazát, amelyek nincsenek benne  $B$ -ben;  $A \ominus B$  **szimmetrikus különbségén** azoknak a halmazát, amelyek a két halmaz közül pontosan az egyikben vannak benne;  $A \times B$  **szorzatán** az  $(a, b)$  alakú rendezett pároknak a halmazát, ahol  $a \in A$ ,  $b \in B$ . A  $H$  halmaz valamely  $A$  részalmazának  $H$ -ra vonatkozó **komplementerén** a  $H - A$  halmazt értjük. Jele  $\overline{A}_H$ . Halmazokról mindig csak mint egy adott **alaphalmaz** részalmazairól beszélünk, még ha ezt az alaphalmazt nem is nevezzük meg. Ilyenkor az alaphalmazra vonatkozó komplementert egyszerűen  $\overline{A}$  jelöli.

**T 2.5  $\subseteq$  tulajdonságai:** Tetszőleges  $A, B, C$  halmazokra igazak az alábbiak:

- ha  $A \subseteq B$ , akkor  $A \cap C \subseteq B \cap C$  és  $A \cup C \subseteq B \cup C$ ;

-  $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$  és  $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$ ;

- ha  $A \subseteq B$ , akkor  $A \cap B = A$ , és  $A \cup B = B$ .

**T 2.6** Bármely  $A, B, C$  halmazra fennállnak az alábbi **azonosságok**:

Asszociativitás:  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ,  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ;

Kommutativitás:  $A \cap B = B \cap A$ ,  $A \cup B = B \cup A$ ;

Idempotencia:  $A \cap A = A$ ,  $A \cup A = A$ ;

Elnyelési tulajdonságok:  $A \cap (A \cup B) = A$ ,  $A \cup (A \cap B) = A$ ;

Distributivitás:  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ,  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

**D 2.7** Egy  $H$  halmaz összes részalmazainak halmazát a  $H$  halmaz **hatványalmazának** nevezzük. Jele:  $P(H)$ . (Megjegyzés: Az üres halmaz minden halmaznak részalmazza, így az üres halmaz minden halmaz hatványalmazának eleme.)

**T 2.8** Ha  $A$  és  $B$  olyan halmazok, melyekre  $A, B \subseteq H$  teljesül, akkor  $A - B = A \cap \overline{B}_H$ .

**T 2.9 De Morgan-képletek:** bármely  $A, B$  halmazra:  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$  és  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ .

## Feladatok

Mik az elemei az alábbi halmazoknak?

1.  $\{x \in \mathbf{N}^+; 2|x \text{ és } 100 \leq x < 1000\}$ ,
2.  $\{x \in \mathbf{Z}; 3|x \text{ és } |x| < 100\}$ ,
3.  $\{k \in \mathbf{N}^+; x = 3k + 1\}$ ,
4.  $\{x \in \mathbf{R}; x^2 + 2x + 1 = 0\}$ ,
5.  $\{x \in \mathbf{R}; x^2 - 2 = 0\}$ ,
6.  $\{x \in \mathbf{Z}; x^2 - 2 = 0\}$ ,
7.  $\{x \in \mathbf{R}; x^2 + 1 = 0\}$ ,
8.  $\{x \in \mathbf{R}; \sin^2 x + \cos^2 x = 1\}$ ,
9.  $\{x \in \mathbf{R}; 2 \lg x = \lg x^2\}$ ,
10.  $\{x \in \mathbf{R}; \lg x = \lg(-x)\}$ .

Az  $(x, y)$ , illetve az  $(x_n, y_n)$  számpárokat az  $xy$  koordinátásík pontjainak tekintve, milyen geometriai alakzatokat alkotnak az alábbi halmazok?

11.  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ ,
12.  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,
13.  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; xy = yx\}$ ,
14.  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; |x| < y \leq 1\}$ ,
15.  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 - 2x - 4y = 4\}$ ,
16.  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = 4 \text{ és } y \geq 0\}$ ,
- 17<sup>▷</sup>  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; 0 \leq y \leq 4, 0 \leq x \leq 6 \text{ és } 3x + 4y \leq 22\}$ ,
18.  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; 0 \leq x \leq 2, \text{ és } 0 \leq y \leq x + 2\}$ ,
19.  $\{(x_n, y_n); n \in \mathbf{N}^+, x_n = 2^{-n} \text{ és } y_n = 0\}$ ,
20.  $\{(x_n, y_n); n \in \mathbf{N}^+, x_n = \frac{1}{n} \text{ és } y_n = \frac{1}{n^2}\}$ ,
- 21<sup>▷</sup>  $\{(x, y); x = t^2, y = 3t^2, t \in \mathbf{R}\}$ ,
22.  $\{(x, y); x = t^3, y = 3t^3, -1 \leq t \leq 2\}$ ,
23.  $\{(x, y); x = \cos t, y = \sin t, 0 < t \leq 2\pi\}$ .

24. Az első évfolyamos hallgatók közül jelöljük  $M$ -mel a második tanköröseket,  $F$ -fel a fiúkat,  $A$ -val az angolul,  $N$ -nel a németül tudó (nyelvvizsgával rendelkező) diákokat. Az előbbi halmazok segítségével (a **D 2.4**-ben definiált halmazműveleteket felhasználva) fejezzük ki a következő halmazokat:

- a) A második tankörös fiúk. b) Az angolul és németül tudók.
- c) Az angolul vagy németül tudók. d) Az angolul vagy németül tudó fiúk.
- e) A vagy angolul vagy németül tudók. f) A második tankörös lányok.
- g) A németül tudó lányok. h) A németül nem tudó, második tankörös lányok.

25. Legyen  $M = \{m, 2m, 3m, \dots\}$  és  $N = \{n, 2n, 3n, \dots\}$ , ahol  $m$  és  $n$  adott pozitív egész számok.

- a) Milyen  $m$  és  $n$  esetén valódi része az  $M$  halmaz az  $N$  halmaznak?
  - b) Milyen  $m$  és  $n$  esetén része az  $M$  az  $N$ -nek?
  - c) Képezzük a két halmaz közös részét és egyesítését!
26. A következő egyenlőség jobb oldalát egészítsük ki a megfelelő halmazműveleti jellel úgy, hogy fennálljon az egyenlőség:

$$\{x; x \in (A - B) \cup (B - A)\} = A \ B.$$



27<sup>o</sup> Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak. Válaszunkat igazoljuk!

a) Minden  $A, B$  halmazpárra  $A - B = (A \cup B) - B = A - (A \cap B)$ .

b) Minden  $A$  halmazra  $A \subseteq A$ .

c) Minden  $A$  halmazra  $\emptyset \subset A$ .

d) Van olyan  $A$  halmaz, hogy  $A \subset \emptyset$ .

28<sup>o</sup> Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges  $A, B$  és  $C$  halmazok esetén

$$A - B \subseteq C \text{ és } A \subseteq B \cup C$$

ekvivalens állítások (vagyis bármelyik teljesülése esetén a másik is fennáll).

29<sup>o</sup> Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges  $L$  és  $M$  halmazok esetén az alábbi  $A, B, C$  állítások ekvivalensek:

$$A: L \subseteq M;$$

$$B: L \cap M = L;$$

$$C: L \cup M = M.$$

30<sup>o</sup> Legyen  $A, B$  és  $C$  három halmaz. Fejezzük ki a

$$D := A - (A - (B - (B - C)))$$

halmazt az  $A, B, C$  halmazokkal, valamint a metszés és egyesítés jelével! Ennek alapján döntsük el, mivel egyenlő  $D$  a következő esetekben:

a) Az  $A, B$  és  $C$  halmazok páronként közös elem nélküliek (diszjunktak).

b) Pontosan két diszjunkt halmaz van közöttük.

c) Nincs közöttük diszjunkt halmazpár.

31<sup>o</sup> A következő egyenlőség igaz-e tetszőleges  $K, L$  és  $M$  halmazokra:

$$(M \cup K) \cap L = (M \cup L) \cap K.$$

Ha igaz, akkor bizonyítsuk be, ha nem, akkor adjunk meg három olyan halmazt, melyekre nem teljesül az előbbi egyenlőség.

32<sup>o</sup> Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások tetszőleges  $K, L$  és  $M$  halmazok esetén teljesülnek:

$$\text{a) } (K \cup L) - L \subseteq K, \quad \text{b) } (K \cap L) - L \subseteq M.$$

33<sup>o</sup> Bizonyítsuk be, hogy az  $A, B, C$  halmazokra  $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$  akkor és csak akkor teljesül, ha  $A \subseteq C$ .

34<sup>o</sup> Igazoljuk, hogy az  $A$  és  $B$  halmazokra  $A - B = B - A$  akkor és csak akkor teljesül, ha  $A = B$ .

35<sup>o</sup> Mely  $A, B$  halmazpárokra igaz az, hogy  $A - B = A \cap B$ ?

36<sup>o</sup> Mely  $A, B$  halmazpárokra igaz az, hogy  $A - B = A \cup B$ ?

Bizonyítsuk be, hogy az alábbi feladatokban adott összefüggések tetszőleges  $K, L$  és  $M$  halmazok esetén teljesülnek! Ábrázoljuk Venn-diagrammokkal az egyenlőség mindkét oldalán álló kifejezéseket.

37<sup>o</sup>  $K - (K - L) = L - (L - K),$

38<sup>o</sup>  $K - (L - M) = (K - L) \cup (K \cap M),$

2. Halmazelmélet — Feladatok

39.  $(K \cap L) - (K - M) = K \cap L \cap M$ ,  
 40.  $(K - L) - M = (K - M) - (L - M)$ ,  
 41<sup>†</sup>  $K = (K \cup L) \cap (K \cup \bar{L})$ ,      42<sup>†</sup>  $K = (K \cap L) \cup (K \cap \bar{L})$ ,  
 43<sup>†</sup>  $K = (K \cap L \cap M) \cup (K \cap L \cap \bar{M}) \cup (K \cap \bar{L} \cap M) \cup (K \cap \bar{L} \cap \bar{M})$ ,  
 44<sup>†</sup>  $(K - L) \cup (L - M) \cup (M - K) \cup (K \cap L \cap M) = K \cup L \cup M$ ,  
 45.  $(K \cup L) \cap (L \cup M) \cap (K \cup M) = (K \cap L) \cup (L \cap M) \cup (K \cap M)$ .  
 46<sup>†</sup> Mutassuk meg, hogy az  $A$  és  $B$  halmazokra  $A - B = A$  pontosan akkor teljesül, ha  $B - A = B$ .  
 47<sup>†</sup> Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges  $A$ ,  $B$  és  $C$  halmazok esetén

$$A \ominus B \subseteq (A \ominus C) \cup (B \ominus C).$$

- 48<sup>†</sup> Bizonyítsuk be, hogy  $A \ominus B = A \cup B$  akkor és csak akkor teljesül, ha  $A$  és  $B$  diszjunkt halmazok!

Igazoljuk, hogy tetszőleges  $A$ ,  $B$  halmazokra fennállnak az alábbi azonosságok:

49<sup>†</sup>  $(A \cap \bar{B}) \ominus (\bar{A} \cap B) = A \ominus B$ ,      50.  $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = A \ominus B$ .

- 51<sup>†</sup> Bizonyítsuk be, hogy a  $K$ ,  $L$ ,  $M$  és  $N$  halmazokra az alábbi egyenlőségek ekvivalensek, azaz vagy mindkettő fennáll, vagy egyik sem:

$$K \ominus L = M \ominus N \quad K \ominus M = L \ominus N.$$

Adott  $A$  és  $B$  halmazokhoz határozzuk meg az összes olyan  $X$  halmazt, amelyre az alábbi egyenlet teljesül:

- 52<sup>†</sup>  $A - (B - X) = A$ ,      53<sup>†</sup>  $(A - X) \cup B = X$ ,  
 54<sup>†</sup>  $(A - X) \cap (B - X) = A$ ,      55<sup>†</sup>  $(A \cap X) \cup B = X$ ,  
 56<sup>†</sup>  $(A \cap B) \cup X = B \cup X$ ,      57<sup>†</sup>  $A - X = X - A$ .

58. Írjuk fel a  $H = \{a, b, c\}$  halmaz hatványhalmazát!

- 59<sup>†</sup> Adjuk meg a  $P(P(P(\emptyset)))$  halmaz elemeit!

Igazoljuk, hogy bármely  $A$  és  $B$  halmaz esetén

- 60<sup>†</sup>  $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ ,      61<sup>†</sup>  $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$ ,  
 62<sup>†</sup>  $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$  akkor és csak akkor, ha  $B \subseteq A$  vagy  $A \subseteq B$ .

Az alábbi feladatokban lévő halmazok mindegyikének véges sok eleme van. Jelölje  $|M|$  az  $M$  halmaz elemeinek számát! Bizonyítsuk be az alábbi állítások helyességét:

63.  $|A| \leq |B|$ , ha  $A \subseteq B$ ,      64.  $|A \cup B| \leq |A| + |B|$ ,  
 65.  $|A \cap B| \leq \min\{|A|, |B|\}$ ,      66.  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ ,  
 67<sup>†</sup>  $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$ ,  
 68.  $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \sum_{i=1}^4 |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i \neq j \neq k \neq i} |A_i \cap A_j \cap A_k| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$ .

69. Egy 33 fős tankörben háromféle idegen nyelvet tudnak: 20 diák tud angolul, 16 németül és 6 franciául, 5 diák tud pontosan két nyelven és 2 diák tud

- mindhárom nyelven beszélni. Hányan nem tudnak egy idegen nyelvet sem, és hányan tudnak pontosan egy idegen nyelven beszélni?
70. Egy faluban 1000 ház van. Ezek közül 250-ben van autó, 900-ban hűtőszekrény, 950-ben televízió és 990-ben rádió. Legalább hány házban van mind a négy eszköz?
- 71.\* Hány eleme van egy  $n$  elemű  $A_n$  halmaz hatványhalmazának?
- 72.\* Mutassuk meg, hogy nincs olyan  $A$  halmaz, amelyhez létezne  $A$  és  $P(A)$  elemei között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés. (Útmutatás: tegyük fel, hogy van egy ilyen kölcsönösen egyértelmű  $\varphi : A \rightarrow P(A)$  leképezés, és vizsgáljuk meg az  $X := \{y \in A; y \notin \varphi(y)\}$  halmazt.)
73. Legyen  $A = \{x \in \mathbf{R}; 1 \leq x \leq 5\}$  és  $B = \{y \in \mathbf{R}; 3 \leq y \leq 4\}$ . Az  $(x, y)$  számpárokat a sík pontjainak tekintve ábrázoljuk az  $A \times B$  halmazt!
74. Legyen  $A = \{a\}$ ,  $B = \{x, y\}$ ,  $C = \{1, 2, 3\}$ . Soroljuk fel az  $A \times B \times C$ , az  $A^3$  és a  $B^3$  halmazok elemeit!
75. Az  $m$  elemű  $A$  halmaz és az  $n$  elemű  $B$  halmaz metszete egy  $k$  elemű halmaz. Hány eleme van az alábbi halmazoknak?  
 a)  $A \times B$ , b)  $(A \cap B)^2$ , c)  $(A \cup B)^3$ , d)  $(A \setminus B)^2$ , e)  $(A \ominus B)^4$ , f)  $A \times B \times A$ .

### 3. fejezet

## Matematikai logika

### Logikai műveletek, kvantorok

**D 3.1** A  $P$  és  $Q$  elemi ítéletekre vonatkozó logikai alpműveleteket (konjunkció ( $\wedge$ ), diszjunkció ( $\vee$ ), implikáció ( $\Rightarrow$ ), ekvivalencia ( $\Leftrightarrow$ ), negáció ( $\neg$ )) táblázatos definíciói:

$P$	$Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$	$P$	$\neg P$
1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0		
0	0	0	0	1	1		

**D 3.2** Két logikai kifejezést akkor és csak akkor tekintünk **azonosan egyenlőnek**, ha logikai értékük a bennük szereplő logikai változók bármely értékére azonos. Az azonosság jele  $\equiv$ .

**J 3.3** A  $\forall x P(x)$  és a  $\exists x P(x)$  jelölések kiejtése: „minden  $x$ -re (igaz, hogy)  $P(x)$ ” és „van olyan  $x$ , hogy  $P(x)$ ”. A  $\forall$  ill. a  $\exists$  jel neve **univerzális** ill. **egzisztenciális kvantor**.

**T 3.4** Azonosságok:

- |  |   |                             |
|--|---|-----------------------------|
| (1) $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$                     | $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$                          | asszociativitás             |
| (2) $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$   | $P \vee Q \equiv Q \vee P$  | kommutativitás              |
| (3) $P \wedge P \equiv P$  | $P \vee P \equiv P$   | idempotencia                |
| (4) $(P \wedge Q) \vee Q \equiv Q$   | $(P \vee Q) \wedge Q \equiv Q$  | elnyelés                    |
| (5) $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$              | $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$             | disztributivitas            |
| (6) $P \wedge 1 \equiv P$ $P \wedge 0 \equiv 0$                              | $P \vee 1 \equiv 1$ $P \vee 0 \equiv P$                               |                             |
| (7) $P \wedge \neg P \equiv 0$   | $P \vee \neg P \equiv 1$ $\neg(\neg P) \equiv P$                      |                             |
| (8) $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$                             | $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$                          | De Morgan-azonosságok       |
| (9) $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$                                   | $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$                        |                             |
| (10) $P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$                      |   | kontrapozíció               |
| (11) $P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ | $P \Leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ |                             |
| (12) $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$                        | $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$                      | kvantoros ítéletek tagadása |

**P 3.5** Bebizonyítjuk a  $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$  azonosságot (T 3.4 (8)) a D 3.1 segítségével. A táblázat kitöltésének lépéseit itt külön táblázatokban adjuk meg: 1) az értékpárok beírása, 2) a  $\neg P$  értékének kiszámítása, 3) mindkét oldal kiszámítása.

$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$
1 1 1 1	1 1 0 1	1 1 1 0 1 1 1
1 0 1 0	1 0 0 1	1 0 0 0 1 0 0
0 1 0 1	0 1 1 0	0 1 1 1 1 0 1 1
0 0 0 0	0 0 1 0	0 1 0 1 0 1 0

### Feladatok

Az alábbi feladatokban  $P$  igaz,  $Q$  hamis,  $R$  hamis és  $S$  igaz logikai értékű ítéletet jelöl. Határozzuk meg a következő összetett ítéletek logikai értékét:

1.  $(P \wedge Q) \wedge R$ ,      2.  $(P \wedge Q) \vee R$ ,      3.  $(P \vee Q) \vee R$ ,  
 4.  $(Q \wedge P) \vee S$ ,      5.  $Q \wedge (P \vee S)$ ,      6.  $R \Rightarrow (Q \vee \neg P)$ ,  
 7.  $P \Rightarrow (P \Rightarrow S)$ ,      8.  $P \Rightarrow (R \vee S)$ ,  
 9.  $(P \vee R) \Leftrightarrow (Q \vee S)$ ,      10.  $(R \wedge \neg S) \Leftrightarrow (Q \vee S)$ ,  
 11.  $S \Leftrightarrow (P \Rightarrow (\neg P \vee S))$ ,      12.  $(Q \wedge S) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (R \vee \neg S))$ .

13. Az implikáció „Ha  $P$ , akkor  $Q$ ” ( $P \Rightarrow Q$ ) ítéletét írjuk le több módon, például az alábbi kifejezések felhasználásával: „implikálja”, „maga után vonja”, „szükséges feltétele”, „elégleges feltétele”, „csak akkor”, ...

14. Ha egy  $n$  számú logikai változót tartalmazó kifejezés logikai értékét meg akarjuk határozni a változók minden lehetséges értéke mellett, akkor hány esetet kell megvizsgálni? Más szóval: a P 3.5 példa szerint elkészített táblázatnak a vízszintes vonal alatt hány sora van, ha a logikai változók száma  $n$ ?

15. A  $p$ ,  $q$  és  $r$  logikai változókból képezzük a következő két logikai kifejezést:  $p \wedge (q \vee r)$  és  $(p \wedge q) \vee r$ . Azonosan egyenlők-e ezek a kifejezések?

Igazoljuk a következő azonosságokat táblázattal és/vagy a T 3.4 tételbeli azonosságok felhasználásával:

16.  $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$ , (implikáció tagadása, T 3.4 (8)),  
 17.  $p \wedge q$ ,      18.  $p \vee (\neg p \wedge q) \equiv p \vee q$ ,  
 19.  $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ ,      20.  $\neg(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ ,  
 21.  $(p \vee q) \equiv \neg p \Rightarrow q$ ,      22.  $\neg(p \wedge q) \equiv p \Rightarrow \neg q$ ,  
 23.  $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p) \equiv 1$ ,      24.  $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q \equiv 1$ ,  
 25.  $[\neg p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow \neg p \equiv 1$ ,      26.  $(p \wedge q) \Rightarrow p \equiv p \Rightarrow (p \vee q)$ ,  
 27.  $\neg[(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)] \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ ,  
 28.  $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q \equiv [\neg q \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow \neg p$ ,  
 29.  $(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow s \equiv p \Rightarrow [q \Rightarrow (r \Rightarrow s)]$ ,  
 30.  $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p) \equiv \neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ ,  
 31.  $\neg(((p \wedge q) \vee r) \Rightarrow p) \Leftrightarrow q \equiv (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ .

Állítsuk elő az alábbi ítéleteket a logikai műveletek és tovább már nem bontható elemi ítéletek segítségével, majd ahol lehet, azonosságok alkalmazásával hozzuk egyszerűbb alakra:

32. „Márta nem szőke.”  
 33. „Nem igaz, hogy Mátyás nem elég virtuóz.”  
 34. „Esik az eső, de meleg van, bár a nap is elbújt, és az idő is későre jár.”  
 35. „Éva vagy Pista ott volt.”



## Logikai műveletek kapcsolata a halmazműveletekkel

**M 3.6** Halmazokhoz természetes módon hozzárendelhetünk logikai ítéleteket. Legyen  $H$  az alaphalmaz, és legyen abban  $P$  egy halmaz. Valamely  $x \in H$  elemre  $p(x)$  logikai értéke legyen igaz, ha  $x \in P$ , és hamis, ha  $x \notin P$ , azaz  $p(x)$  legyen maga is  $x \in P$  ítélet.

A  $\neg p(x)$  negáció halmazelméleti megfelelője a  $P$  halmaz  $H$ -ra vonatkozó komplementere. Definíció szerint a  $p(x)$  és  $q(x)$  logikai értékekre a  $p(x) \wedge q(x)$  **konjunkció** akkor és csak akkor igaz, ha  $p(x)$  igaz, és  $q(x)$  is igaz. Ugyanakkor, valamely  $x$  dologra  $x \in P \cap Q$  akkor és csak akkor teljesül, ha  $x \in P$  és  $x \in Q$ . Ezek alapján mondhatjuk, hogy a  $p(x) \wedge q(x)$  konjunkció halmazelméleti megfelelője a  $P \cap Q$ , és fordítva. Ehhez hasonlóan kapjuk, hogy a **diszjunkció** halmazelméleti megfelelője a halmazok egyesítése. E megfeleltetéseket képletekkel is felírva:

$$(x \in \overline{P}) \equiv \neg(x \in P) \equiv \neg p(x),$$

$$(x \in P \cap Q) \equiv (x \in P) \wedge (x \in Q) \equiv p(x) \wedge q(x),$$

$$(x \in P \cup Q) \equiv (x \in P) \vee (x \in Q) \equiv p(x) \vee q(x).$$

Fordítva, egy  $p(x)$  logikai ítélethez hozzárendelhetünk egy  $P$  halmazt a következő módon: legyen  $H$  azon  $x$  dolgok halmaza, amelyekre  $p$  igaz vagy hamis értéket vesz fel; és legyen  $P$  a  $H$  azon  $x$  elemeinek halmaza, amelyekre  $p(x)$  igaz. Ilyen módon minden logikai kifejezés átírható halmazelméleti formulára, és így ábrázolható Venn-diagrammal. Például, ha  $p(n)$  az az ítélet, hogy „az  $n$  szám páros”, akkor  $H$ -nak választhatjuk az egész számok halmazát, és ekkor a  $p(n)$  ítéletnek megfelelő  $P$  halmaz a páros számok halmaza, vagyis a  $p(n)$  ítélet megegyezik az  $n \in P$  ítélettel. Az 1-gyel jelölt azonosan igaz ítélet halmazelméleti megfelelője a  $H$  alaphalmaz, a 0-val jelölt azonosan hamis ítéleté pedig az üres halmaz.

### Feladatok

Írjuk fel és ábrázoljuk Venn-diagrammokkal az alábbi logikai kifejezések halmazelméleti megfelelőit, ha a  $p(x)$ ,  $q(x)$  és  $r(x)$  ítéleteknek a  $P$ ,  $Q$  és  $R$  halmazok felelnek meg.

66.°  $p(x) \Rightarrow q(x)$ ,

67.  $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ ,

68.  $p(x) \vee \neg(q(x) \wedge r(x)) \equiv p(x) \vee \neg q(x) \vee \neg r(x)$ ,

69.  $p(x) \vee (q(x) \wedge r(x)) \equiv (p(x) \vee q(x)) \wedge (p(x) \vee r(x))$ ,

70.  $p(x) \Rightarrow 0 \equiv \neg p(x)$ ,

71.  $[(p(x) \vee q(x)) \wedge (p(x) \vee \neg q(x))] \vee [(\neg p(x) \vee q(x)) \wedge (\neg p(x) \vee \neg q(x))] \equiv 1$ .

Ha a  $p(x)$  és  $q(x)$  ( $x \in H$ ) ítéleteknek a  $P$  és  $Q$  halmazok felelnek meg, akkor milyen halmazok közti összefüggések, illetve relációk felelnek meg az alábbi kvantoros kifejezéseknek:

72.  $\forall x p(x)$ ,

73.  $\forall x \neg p(x)$ ,

74.  $\exists x p(x)$ ,

75.  $\forall x (p(x) \Leftrightarrow q(x))$ ,

76.°  $\forall x (p(x) \Rightarrow q(x))$ ,

77.  $\neg \exists x (p(x) \wedge q(x))$ .

Melyek azonosságok az alábbi egyenlőségek közül:

$$78. \quad \forall x (p(x) \wedge q(x)) = (\forall x p(x)) \wedge (\forall x q(x)),$$

$$79. \quad \forall x (p(x) \vee q(x)) = (\forall x p(x)) \vee (\forall x q(x)).$$

A következő feladatokban megadott halmazelméleti azonosságokat logikai műveletek és azonosságok segítségével igazoljuk:

$$80^{\circ} \quad (P \cup Q) \cap (P \cup R) \cap (Q \cup R) \equiv (P \cap Q) \cup (P \cap R) \cup (Q \cap R).$$

$$81. \quad P - (Q \cap R) \equiv (P - Q) \cup (P - R).$$

$$82. \quad (P \cup Q) \cap (P \cup \bar{Q}) \cap (\bar{P} \cup Q) \cap (\bar{P} \cup \bar{Q}) \equiv \emptyset.$$

$$83. \quad (P \cap \bar{Q}) \ominus (\bar{P} \cap Q) \equiv P \ominus Q.$$

$$84. \quad P \cup Q \cup R \equiv (P - Q) \cup (Q - R) \cup (R - P) \cup (P \cap Q \cap R).$$

85.\* Tudjuk, hogy  $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p) \equiv 1$  (l. 25. feladat). Hogyan lehet, hogy az alábbi állítás mégsem azonosan igaz: „ha esik az eső, akkor fúj a szél, vagy ha fúj a szél, akkor esik az eső.”

86.<sup>o</sup> Kontrapozíció alkalmazásával igazoljuk, hogy ha  $n$  és  $m$  olyan pozitív egészek, hogy  $n + m \geq 49$ , akkor  $n \geq 25$ , vagy  $m \geq 25$ .

87. A hét mely napjain igaz és mely napjain hamis az alábbi két állítás:

(1) „Ha ma kedd van, akkor holnap szerda”,

(2) „Ha ma kedd van, akkor holnap szombat”!

Az  $A \Rightarrow B$  és  $B \Rightarrow A$  állítást egymás megfordításainak nevezzük. Írjuk fel az alábbi matematikai állítások megfordítását, és döntsük el mindegyikről, igaz-e vagy nem:

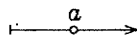
88. „Ha egy természetes szám osztható  $ab$ -vel, akkor osztható  $a$ -val is és  $b$ -vel is”.

89. „Ha két négyszög egybevágó, akkor megfelelő oldalaik egyenlők egymással”.

90. „Ha egy háromszög derékszögű, akkor két oldal négyzetösszege egyenlő a harmadik négyzetével”.

## Logikai áramkörök

**M 3.7** Az  $A, B, C, \dots$  betűk jelöljenek kétpólusú kapcsolókat. Legyenek  $a, b, c, \dots$  rendre az előbbi kapcsolókhöz rendelt logikai változók a következő megállapodással: az  $a$  logikai változó értéke igaz, ha az  $A$  kapcsoló be van kapcsolva, azaz képes az áram vezetésére, és hamis, ha nincs bekapcsolva, azaz nem képes az áram vezetésére. Az  $A$  kapcsolót a hozzá tartozó logikai értékkel a következő módon jelöljük:

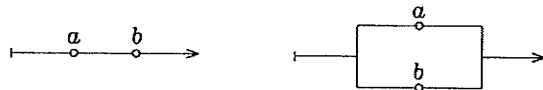


Hasonlóan definiáljuk a  $b, c, \dots$  logikai változókat is. Az  $a, \neg a, b, \neg b, c, \neg c, \dots$  jelű kapcsolókból soros és párhuzamos kapcsolással összekapcsolt áramkört logikai, vagy kapcsoló áramkörnek nevezzük. Ha több kapcsoló is  $a$  jelű, akkor ezek mindig azonos állásúak, míg egy  $a$  és egy  $\neg a$  jelű mindig ellenkező állású. Az  $a, b, c, \dots$  változókat tartalmazó ítélet akkor tartozik az  $A, B, C, \dots$  kapcsolókból álló áramkörhöz, ha az ítélet pontosan akkor igaz, amikor az áramkör vezeti az áramot.



**Feladatok**

91.° Milyen logikai ítélet felel meg az  $A$  és  $B$  kapcsolók soros illetve párhuzamos kapcsolásával kapott áramköröknek?



Az alábbi logikai kifejezésekhez milyen áramkörök tartoznak:

92.  $a \Rightarrow b,$

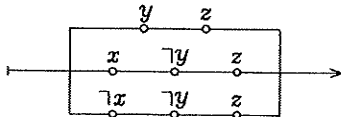
93.  $a \Leftrightarrow b,$

94.  $a \wedge b \wedge c \wedge \neg(a \wedge b),$

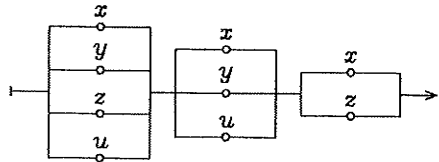
95.  $[(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)] \Rightarrow (a \Rightarrow c).$

Írjuk fel az alábbi két kapcsoló áramkörhöz tartozó logikai kifejezéseket, hozzuk egyszerűbb alakra, és ennek alapján rajzoljuk fel az eredetivel ekvivalens, de egyszerűbb kapcsoló áramkört:

96.



97.



98. Készítsünk kapcsoló áramkört egy négyszemélyes szavazógépre, mely a „többség dönt” elvét követi, — azaz vezeti az áramot, ha legalább három kapcsoló be van kapcsolva, — döntetlen esetén pedig egy kitüntetett (elnöki) kapcsoló állásának megfelelően működik.

## 4. fejezet

# Vektoralgebra

## Vektorok összeadása, kivonása és számmal szorzása

**T 4.1 (Háromszögegyenlőtlenség)** Minden  $a, b$  vektorpárra

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

**T 4.2 (Paralelogrammaszabály)** Ha az  $a$  és  $b$  vektor különböző állású, akkor a két vektor összegét megadja az  $a$  és  $b$  vektorral, mint oldalakkal szerkesztett paralelogrammának az átlóvektora, amely az összeadandók közös kezdőpontjából indul ki.

### Feladatok

- Adott az  $a, b$  nem kollineáris vektorpár. Szerkesszük meg a következő vektorokat:  
a)  $c = a - 2b$ ; b)  $d = 2a + 3b$ ; c)  $e = a\sqrt{2} - b\sqrt{3}$ ; d)  $f = a\sqrt{5} - 2b$ .
- Legyen  $m = a + b$  és  $n = a - b$ . Fejezzük ki az  $a$  és  $b$  vektorral a következő vektorokat:  
a)  $3m - 3n$ ; b)  $4m + 4n$ ; c)  $2m - \frac{1}{2}n$ ; d)  $3m + \frac{\sqrt{2}}{3}n$ .
- Legyen  $m = 2a + b$  és  $n = a + 2b$ . Fejezzük ki az  $m$  és  $n$  vektorral a következő vektorokat:  
a)  $3a - 4b$ ; b)  $5a + 2b$ ; c)  $-a + \frac{1}{10}b$ ; d)  $2a - \sqrt{3}b$ .
- Legyen a szabályos  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  hatszög köré írt kör középpontja  $O$ . Fejezzük ki az  $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ),  $\overrightarrow{A_6A_1}$  oldalvektorokat az  $\overrightarrow{OA_1} = a$  és  $\overrightarrow{OA_2} = b$  vektorokkal, és számítsuk ki az  $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_6}$  összeget!
- Tekintsük az  $ABCD$  tetraédert. Határozzuk meg a következő összegeket:  
a)  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$ ; b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$ .
- Legyen  $A_1, A_2, \dots, A_n$   $n$  számú (nem szükségképpen különböző) pont. Egyetlen vektorral adjuk meg az  $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$  összeget:
- Bizonyítsuk be, hogy az  $a, b$  és  $c$  vektorok akkor és csak akkor lehetnek egy (esetleg szakasszá, vagy ponttá elfajuló) háromszög oldalvektora, ha vagy  $a + b + c = 0$ , vagy ha valamelyikük előállítható a másik kettő összegeként!

8. Legyen  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  két, nem kollineáris vektor. Bizonyítsuk be, hogy van olyan háromszög, melynek oldalvektorai:  $\mathbf{a}$ ,  $\frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ ,  $\frac{3}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$ .
  9. Legyen  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  két nem kollineáris vektor. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan háromszög, amelynek oldalvektorai a  $2\mathbf{a}$ ,  $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ ,  $\frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$  vektorok!
  10. Legyen  $\mathbf{a}$  ( $\neq \mathbf{0}$ ) tetszőleges vektor. Írjuk fel azokat az egységvektorokat, amelyek  $\mathbf{a}$ -val egyező állásúak!
  11. Az  $\mathbf{a}$  ( $\neq \mathbf{0}$ ) és  $\mathbf{b}$  ( $\neq \mathbf{0}$ ) vektorok merőlegesek egymásra. Írjuk fel azt az egységvektort, amely komplanáris az adott vektorokkal, és felezi azok szögét!
  12. Igazoljuk, hogy ha  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  egyállású vektorok, akkor a következő egyenlőségek közül legalább az egyik igaz:  $|\mathbf{a}|\mathbf{b} + |\mathbf{b}|\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ;  $|\mathbf{a}|\mathbf{b} - |\mathbf{b}|\mathbf{a} = \mathbf{0}$ .
  13. Az alábbi feladatokban az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektoroknak milyen feltételt kell kielégíteni, hogy teljesüljön a leírt kikötés?
    - a)  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| > |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ ,    b)  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| < |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ ,    c)  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ ,
    - d)  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$ ,    e)  $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ ,    f)  $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$  ( $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ),
    - g) Az  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  vektor felezze az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok szögét.
  14. Az  $A_1A_2A_3A_4A_5$  szabályos ötszög köré írt kör középpontja legyen az  $O$  pont. Igazoljuk, hogy  $\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \vec{OA}_3 + \vec{OA}_4 + \vec{OA}_5 = \mathbf{0}$ .
  15. Az  $A_1A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$  szabályos  $n$ -szög köré írt kör középpontja legyen az  $O$  pont. Igazoljuk, hogy  $\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \dots + \vec{OA}_{n-1} + \vec{OA}_n = \mathbf{0}$ .
  16. Egy háromszög oldalainak felezőpontjai adva vannak. A felezőpontoknak a háromszög síkjában felvett valamely  $O$  pontra vonatkozó helyvektorai segítségével fejezzük ki a háromszög egyik csúcsának helyvektorát, és ezt az összefüggést felhasználva szerkesszük meg a háromszöget!
  17. Az előző feladatban leírt módon dolgozzunk ki eljárást síkszög szerkesztésére, ha ismerjük oldalainak felezőpontjait!
  18. Egy páratlan oldalszámú síksokszögben ismerjük az oldalak felezőpontjait. A 16. feladatban leírt módon adjunk meg eljárást a sokszög megszerkesztésére!
  19. Legyen az  $ABC$  háromszög két oldalvektora  $\vec{AB} = \mathbf{c}$  és  $\vec{AC} = \mathbf{b}$ . Fejezzük ki  $\mathbf{b}$ -vel és  $\mathbf{c}$ -vel a háromszög súlyvonalvektorait!
- A továbbiakban kitűzött bizonyításokat vektoralgebrai módszerekkel végezzük el.
20. Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszög súlyvonalával, mint oldalakkal, szerkeszthető háromszög!
  21. Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalával szerkesztett háromszög súlyvonalai az eredeti háromszöghöz hasonló háromszöget határoznak meg!
  22. Legyen  $A_1A_2A_3A_4$  egy síknégyszög. Jelölje  $F_1$  az  $A_1A_2$ ,  $F_2$  az  $A_2A_3$ ,  $F_3$  az  $A_3A_4$  és  $F_4$  az  $A_4A_1$  oldal felezőpontját. Bizonyítsuk be, hogy az  $F_1F_2F_3F_4$  négyszög paralelogramma!
  23. Legyen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $D$  a tér négy pontja. Jelölje  $K$  az  $AD$  szakasz,  $L$  pedig a  $BC$  szakasz felezőpontját. Bizonyítsuk be, hogy  $\vec{KL} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC})$ .

- 24.° A  $P$  pont az  $AB$  szakaszt  $|\overrightarrow{AP}| : |\overrightarrow{PB}| = m : n$  arányban osztja. Legyen  $O$  a tér tetszőleges pontja. Fejezzük ki az  $\overrightarrow{OP}$  vektort az  $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$  és  $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$  vektorok segítségével!
- 25.° Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalai egy pontban, harmadolva metszik egymást!
26. Legyen  $O$  a tér tetszőleges pontja. Írjuk fel az  $ABC$  háromszög  $S$  súlypontjába mutató  $\overrightarrow{OS}$  vektort az  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ , és  $\overrightarrow{OC}$  vektorokkal kifejezve!
27. Az  $ABC$  háromszög  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$  és  $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$  oldalvektoraival fejezzük ki az  $S$  súlypontba mutató  $\overrightarrow{AS}$ ,  $\overrightarrow{BS}$  és  $\overrightarrow{CS}$  vektorokat, és számítsuk ki ezek összegét!
- 28.° Igazoljuk, hogy az  $S$  pont akkor és csak akkor súlypontja az  $ABC$  háromszögnek, ha  $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} = \mathbf{0}$ .
- 29.° Legyen  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  egy sík két háromszöge. Súlypontjaikat jelölje rendre  $S$ , illetve  $S_1$ . Bizonyítsuk be, hogy  $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = 3\overrightarrow{SS_1}$ .
- 30.° Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy két (nem szükségképpen ugyanabban a síkban fekvő) háromszög súlypontja közös legyen!
- 31.° Igazoljuk, hogy a tetraéder súlyvonalai egy ponton mennek át, és negyedelve metszik egymást!
- 32.° Igazoljuk, hogy ha  $ABCD$  és  $A_1B_1C_1D_1$  két, tetszőleges térbeli helyzetű paralelogramma, akkor az  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  és  $DD_1$  szakaszok felezőpontjai szintén egy paralelogramma csúcsai!
- 33.° Adva van az  $ABCD$  paralelogramma. A tér tetszőleges  $O$  pontjának a tükörképe az  $A$  pontra legyen  $O_1$ , ennek tükörképe a  $D$ -re pedig  $O_2$ . Tükrözzük az  $O$  pontot a  $B$  csúcsra is, majd ezt a tükörképet a  $C$ -re. Az így kapott tükörképek legyenek rendre  $O_3$  és  $O_4$ . Bizonyítsuk be, hogy  $O_2$  és  $O_4$  egybeesik!
- 34.° Legyen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $D$  a tér négy pontja, és  $O$  egy tetszőleges pont. Tükrözzük az  $O$  pontot az  $A$  ponton, majd ezt az  $O_1$  tükörképet a  $D$ -n. A másodszo-ri tükörkép legyen  $O_2$ . Tükrözzük az  $O$  pontot a  $B$  ponton is, majd ezt a tükörképet a  $C$ -n. Az így kapott tükörképek legyenek rendre  $O_3$  és  $O_4$ . Bizonyítsuk be, hogy az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $D$  pontok akkor és csak akkor csúcsai egy paralelogrammának, ha  $O_2$  és  $O_4$  egybeesik!

## Vektorok lineáris kombinációja, lineáris függetlensége; vektor koordinátái

**D 4.3** Valamely  $\mathbf{b}$  vektorról akkor mondjuk, hogy előállítható az  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$  vektorok lineáris kombinációjaként, ha találhatók olyan  $k_1, k_2, \dots, k_r$  valós számok, hogy  $\mathbf{b} = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \dots + k_r\mathbf{a}_r$ .

**D 4.4** Az  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r\}$  vektorrendszert lineárisan függetlennek nevezzük, ha a  $k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \dots + k_r\mathbf{a}_r = \mathbf{0}$  egyenlőség csak a  $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$  értékekkel teljesül.

#### 4. Vektoralgebra — Vektorok lineáris kombinációja, lineáris függetlensége, vektor koordinátái

**T 4.5** Két vektor akkor és csak akkor egyező állású, ha legalább egyikük a másik számszo-rosa, mégpedig, ha  $a$  és  $b$  egyező állásúak és  $b \neq 0$ , akkor van olyan  $k \in \mathbb{R}$ , hogy  $a = kb$ .

**T 4.6** Ha két vektor nem kollineáris, akkor a velük komplanáris bármely vektor előállítható a két vektor lineáris kombinációjaként, és ez az előállítás egyértelmű.

**T 4.7** Három vektor akkor és csak akkor komplanáris, ha van közöttük olyan, amelyik a másik kettőnek lineáris kombinációja.

**T 4.8** Három, nem komplanáris vektor lineáris kombinációjaként a tér bármely vektora előállítható, és ez az előállítás egyértelmű.

**T 4.9** Ha az  $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$  vektorrendszer lineárisan független, akkor bármely  
$$p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_r a_r = q_1 a_1 + q_2 a_2 + \dots + q_r a_r$$
egyenlőség csak úgy teljesülhet, hogy  $p_1 = q_1, p_2 = q_2, \dots, p_r = q_r$ .

**T 4.10** Legalább két vektorból álló rendszer akkor és csak akkor lineárisan független, ha a rendszer egyetlen eleme sem állítható elő a többiek lineáris kombinációjaként.

**D 4.11** Vegyük fel, közös kezdőponttal, a páronként egymásra merőleges, egységnyi hosszúságú  $i, j, k$  kötött vektorokat úgy, hogy ebben a sorrendben jobbrandszert alkossanak. A **T 4.8** tétel értelmében a tér bármely  $v$  vektorához megadható egyetlen olyan  $a, b, c$  valós számhármas, hogy  $v = ai + bj + ck$ . Az  $a, b, c$  számokat a  $v$  vektor  $\{i, j, k\}$  alapvektor-rendszerre vonatkozó) koordinátáinak nevezzük. Azt, hogy  $a, b, c$  a  $v$  koordinátái, így jelöljük:

$$v = [a, b, c] \quad \text{vagy} \quad v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

**T 4.12** Ha  $a = [a_1, a_2, a_3]$ ,  $b = [b_1, b_2, b_3]$  és  $k$  adott szám, akkor  
$$a + b = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3] \quad \text{és} \quad ka = [ka_1, ka_2, ka_3].$$

Az  $a$  és  $b$  vektor akkor és csak akkor egyenlő, ha  $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$ .

Megjegyzés: A vektor koordinátái függenek az alapvektorok megválasztásától. Az előbbi (és a később felírandó) minden koordinátás egyenlőség természetesen úgy értendő, hogy az egyenlőségben szereplő vektorok koordinátái ugyanarra az alapvektor-rendszerre vonatkoznak.

#### Feladatok

**35.** Tegyük fel, hogy az  $\{a, b, c\}$  vektorrendszer lineárisan független. Legyen

$$v = p_1 a + p_2 b + p_3 c \quad \text{és} \quad w = q_1 a + q_2 b + q_3 c$$

az  $a, b, c$  vektorok két olyan lineáris kombinációja, ahol  $q_1 \neq 0, q_2 \neq 0, q_3 \neq 0$ . Bizonyítsuk be, hogy  $v$  és  $w$  akkor és csak akkor kollineáris (egyező állású), ha  $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_3}{q_3}$ .

**36.** Az alábbi feladatokban megadott  $v$  és  $w$  vektorok az  $\alpha$  és  $\beta$  paraméterek mely értékeinél kollineárisak, ha az  $\{a, b, c\}$  vektorrendszer lineárisan független?

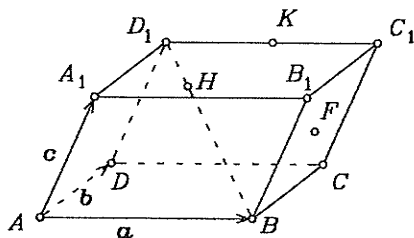
4. Vektoralgebra — Vektorok lineáris kombinációja, lineáris függetlensége; vektor koordinátái

- a)  $\mathbf{v} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{w} = 4\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$ ,  
 b)  $\mathbf{v} = \mathbf{a} + 4\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{w} = 2\mathbf{a} + 8\mathbf{b} + \alpha\mathbf{c}$ ,  
 c)  $\mathbf{v} = 2\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} + \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{w} = 4\mathbf{a} + 2\alpha\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ ,  
 d)  $\mathbf{v} = -2\mathbf{a} + \mathbf{b} + \alpha\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$ ,  
 e)  $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{w} = 3\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \mathbf{c}$ ,  
 f)  $\mathbf{v} = 5\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{w} = \mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \mathbf{c}$ ,  
 g)  $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{w} = \beta\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} + \mathbf{c}$ ,  
 h)  $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{a} + 2\alpha\mathbf{b} + \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{w} = \beta\mathbf{a} + 4\alpha\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ ,  
 i)  $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} + \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{w} = \beta\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \beta\mathbf{c}$ ,  
 j)  $\mathbf{v} = 3\mathbf{a} - 3\alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{w} = \mathbf{a} - \alpha\mathbf{b} - \mathbf{c}$ .

37? Legyen az  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$  vektorrendszer lineárisan független. Döntsük el, hogy az  $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\}$  vektorrendszer lineárisan független-e. Állításainkat igazoljuk!

- a)  $\mathbf{r} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{s} = 5\mathbf{a} - 3\mathbf{b} - 2\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ ,  
 b)  $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{s} = -2\mathbf{a} - 2\mathbf{b} - 2\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{t} = 2\mathbf{a} - 5\mathbf{b} + \mathbf{c}$ ,  
 c)  $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{s} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{t} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$ ,  
 d)  $\mathbf{r} = \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{s} = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{t} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$ ,  
 e)  $\mathbf{r} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{s} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{t} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$ ,  
 f)  $\mathbf{r} = \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{t} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ ,  
 g)  $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{s} = -\mathbf{a} + \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{t} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$ ,  
 h)  $\mathbf{r} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{s} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{t} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ .

38. Az ábrán egy  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  paralelepipedont adtunk meg. A  $F$  pont az  $BCC_1 B_1$  lap középpontját, a  $H$  a  $BD_1$  testátló  $D_1$ -hez közelebbi negyedelő pontját és a  $K$  pont a  $C_1 D_1$  él felezőpontját jelöli. A koordinátáival adott  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} = [4, 2, -3]$ ,  $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b} = [5, 6, -2]$  és  $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{c} = [1, 4, -3]$  vektorok lineáris kombinációjaként adjuk meg, és ezt felhasználva koordinátáikkal is írjuk fel, a következő vektorokat:  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AD_1}$ ,  $\overrightarrow{AF}$ ,  $\overrightarrow{AH}$ ,  $\overrightarrow{AK}$ ,  $\overrightarrow{FH}$ ,  $\overrightarrow{HK}$ .



39. Az  $ABCD$  tetraéder  $A$  csúcsából kiinduló három élvektor  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} = [4, 3, -2]$ ,  $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c} = [2, -1, 5]$ ,  $\overrightarrow{AD} = \mathbf{d} = [6, 4, 9]$ . Állítsuk elő a  $B$  csúcsból kiinduló három élvektor lineáris kombinációjaként az  $ACD$  lap  $S_B$  súlypontjába, illetve a tetraéder  $S$  súlypontjába mutató  $\overrightarrow{BS_B}$ , illetve  $\overrightarrow{BS}$  vektort. Írjuk fel ezeket a vektorokat koordinátás alakban is!

40? Legyen  $O$  a tér adott pontja. Vegyük fel az  $A, B$  és  $C$  pontokat úgy, hogy azok egy egyenesre illeszkedjenek, és az  $A$  ne essék egybe a  $B$  ponttal. A következő feladatokban, a koordinátáikkal adott  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$  és  $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$  vektorok lineáris kombinációjaként állítsuk elő a  $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$  vektort a megadott feltétel mellett. Számítsuk ki a  $\mathbf{c}$  vektor koordinátáit is!

- a)  $\mathbf{a} = [3, 4, 2]$ ,  $\mathbf{b} = [1, 5, 7]$  és  $|\overrightarrow{AB}| : |\overrightarrow{BC}| = 3 : 2$ ,  
 b)  $\mathbf{a} = [4, 3, -2]$ ,  $\mathbf{b} = [2, 2, 4]$  és  $|\overrightarrow{AB}| : |\overrightarrow{BC}| = 2 : 1$ ,  
 c)  $\mathbf{a} = [-3, 2, 5]$ ,  $\mathbf{b} = [0, 4, 1]$  és  $|\overrightarrow{AB}| : |\overrightarrow{BC}| = 3 : 1$ ,  
 d)  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ ,  $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$  és  $|\overrightarrow{AB}| : |\overrightarrow{BC}| = m : n$ .
41. Az  $ABC$  háromszögben az  $AB$ , a  $BC$  és a  $CA$  oldal felezőpontját jelöljük rendre  $D$ -vel,  $E$ -vel és  $F$ -fel. Legyen  $O$  a tér tetszőleges pontja és  $S$  a háromszög súlypontja. Adva vannak a  $\mathbf{d} = \overrightarrow{OD} = [4, 3, -2]$ ,  $\mathbf{e} = \overrightarrow{OE} = [2, 1, -3]$  és  $\mathbf{f} = \overrightarrow{OF} = [3, 2, -7]$  vektorok. Állítsuk elő a  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{e}$  és  $\mathbf{f}$  vektorok lineáris kombinációjaként az  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ ,  $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$  és  $\mathbf{s} = \overrightarrow{OS}$  vektorokat! Számítsuk ki a koordinátákat is!
42. Az  $ABCD$  tetraéderben az  $ABC$ , az  $ABD$  és az  $ACD$  lap súlypontját jelöljük rendre  $S_1$ -gyel,  $S_2$ -vel és  $S_3$ -mal. Az  $\mathbf{s}_1 = \overrightarrow{AS_1} = [3, 1, 4]$ ,  $\mathbf{s}_2 = \overrightarrow{AS_2} = [2, 2, -2]$  és  $\mathbf{s}_3 = \overrightarrow{AS_3} = [1, 3, 4]$  vektorok lineáris kombinációjaként állítsuk elő a tetraéder  $S$  súlypontjába mutató  $\overrightarrow{AS}$ , a  $BCD$  lap  $S_4$  súlypontjába mutató  $\overrightarrow{AS_4}$  vektort, valamint az  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{BD}$  és  $\overrightarrow{CD}$  élvektorokat! Számítsuk ki a koordinátáikat is!
43. Az alábbi feladatokban szereplő  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  és  $\mathbf{v}$  vektorokat (az  $\{i, j, k\}$  alapvektorrendszerre vonatkoztatott) koordinátaikkal adtuk meg. Fejezzük ki a  $\mathbf{v}$  vektort az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorok lineáris kombinációjaként, ha lehetséges!  
 a)  $\mathbf{a} = [1, 1, 0]$ ,  $\mathbf{b} = [1, -1, 0]$ ,  $\mathbf{c} = [1, 1, -1]$ ,  $\mathbf{v} = [3, 5, 7]$ ,  
 b)  $\mathbf{a} = [1, 0, 0]$ ,  $\mathbf{b} = [0, 1, 0]$ ,  $\mathbf{c} = [1, 1, 0]$ ,  $\mathbf{v} = [2, 1, 3]$ ,  
 c)  $\mathbf{a} = [1, 0, 0]$ ,  $\mathbf{b} = [1, 1, 1]$ ,  $\mathbf{c} = [0, 0, 1]$ ,  $\mathbf{v} = [3, 1, -2]$ .
- 44.\* Legyenek  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  közös kezdőpontú komplanáris vektorok, de  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  ne legyen kollineáris. Bizonyítsuk be, hogy az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorok végpontjai akkor és csak akkor vannak egy egyenesen, ha a  $\mathbf{c}$  vektornak  $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$  alakú előállításában az  $\alpha$  és  $\beta$  konstansokra  $\alpha + \beta = 1$  teljesül.
45. Tegyük fel, hogy az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  és  $\mathbf{d}$  vektorok kezdőpontjai egybeesnek, továbbá  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  nem komplanárisak. Bizonyítsuk be, hogy az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  és  $\mathbf{d}$  vektorok végpontjai akkor és csak akkor vannak egy síkon, ha a  $\mathbf{d}$  vektornak  $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$  alakú előállításában az  $\alpha$ ,  $\beta$  és  $\gamma$  konstansokra  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  teljesül.
46. Legyen  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  két, közös kezdőpontú, nem kollineáris vektor. Milyen esetben felezi az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorral közös kezdőpontú  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  vektor az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok szögét?
- 47.\* Vektorok segítségével igazoljuk, hogy a háromszög bármelyik belső szögének felező egyenese a szöggel szemben fekvő oldalt a másik két oldal arányában osztja.
- 48.\* Az  $ABC$  háromszög  $AC$  oldalát a  $B$  csúcsnál lévő belső szög felező egyenese a  $D$  pontban metszi. Állítsuk elő a  $\overrightarrow{BD}$  szögfelező vektort a  $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$  és  $\overrightarrow{BA} = \mathbf{c}$  vektorok lineáris kombinációjaként!

- 49<sup>▷</sup> Az  $ABC$  derékszögű háromszög  $AB$  átfogóját a  $C$  csúcsból kiinduló magasságvonal a  $D$  pontban metszi. A  $\overrightarrow{CD}$  magasságvektort állítsuk elő a  $\overrightarrow{CB}$  és  $\overrightarrow{CA}$  befogóvektorok lineáris kombinációjaként!
- 50<sup>\*</sup> Az  $ABCD$  paralelogramma  $BC$  oldalának felezőpontja az  $E$ , a  $CD$  oldalé az  $F$  pont. Az  $AE$  és  $BF$  szakaszok metszéspontját jelöljük  $M$ -mel. Állítsuk elő az  $\overrightarrow{AM}$  vektort az  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$  és  $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$  vektorok lineáris kombinációjaként!

## Vektorok skaláris szorzata

**D 4.13** Az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok skaláris szorzatát  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ -vel jelöljük, és azon a következő számot értjük:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos(\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ . Egy a vektor önmagával képezett skaláris szorzatát az a vektor négyzetének is nevezzük, és ennek megfelelően  $\mathbf{a}^2$ -tel is jelöljük.

**T 4.14** Ha  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$  és  $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$ , akkor  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ .

**T 4.15** Tetszőleges  $\mathbf{a}$  vektorra  $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$ . Ha  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ , akkor  $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ .

**T 4.16** Két vektor skaláris szorzata pontosan akkor zérus, ha a két vektor merőleges egymásra.

**T 4.17** Ha  $\mathbf{e}$  egységvektor, akkor az  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}$  skaláris szorzat abszolút értéke egyenlő az a vektor  $\mathbf{a}$  irányába eső merőleges vetületének hosszával. Ha az  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}$  szorzat nem zérus, akkor előjele aszerint pozitív, illetve negatív, hogy az előbbi vetületi vektor iránya megegyező, vagy ellentétes az  $\mathbf{e}$  irányával.

## Feladatok

- 51<sup>▷</sup> Az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok szöge  $\frac{\pi}{3}$ , abszolút értékük:  $|\mathbf{a}| = 3$  és  $|\mathbf{b}| = 4$ . Számítsuk ki az alábbi feladatokban megadott skaláris szorzatok értékét!
- a)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .      b)  $\mathbf{a}^2$ .      c)  $\mathbf{b}^2$ .      d)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$ .  
 e)  $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$ .      f)  $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$ .      g)  $(3\mathbf{a} + 2\mathbf{b})^2$ .
52. Az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorok abszolút értéke rendre 3, 5 és 8. Az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  merőleges egymásra, a  $\mathbf{c}$  vektor pedig mindkettővel  $120^\circ$ -os szöget zár be. Számítsuk ki az alábbi feladatokban megadott skaláris szorzatokat:
- a)  $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})(\mathbf{b} + 3\mathbf{c})$ .      b)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2$ .      c)  $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 3\mathbf{c})^2$ .
- 53<sup>▷</sup> Tegyük fel, hogy az  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  olyan egységvektorok, amelyekre  $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$  teljesül. Számítsuk ki az  $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3$  összeg értékét!
54. Az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorok abszolút értékei:  $|\mathbf{a}| = 3$ ,  $|\mathbf{b}| = 1$ ,  $|\mathbf{c}| = 4$ , továbbá  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ . Számítsuk ki az  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$  összeg értékét!
55. Az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , és  $\mathbf{c}$  vektorok páronkénti szöge  $60^\circ$ , abszolút értékeik:  $|\mathbf{a}| = 4$ ,  $|\mathbf{b}| = 2$  és  $|\mathbf{c}| = 6$ . Számítsuk ki az  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$  vektor abszolút értékét!
56. Bizonyítsuk be a következő azonosságot:  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = 2(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2)$ .  
 Mi ennek az azonosságuk a geometriai jelentése?



57. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorokra  $-|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \leq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$ . Milyen esetekben teljesül az egyenlőség?
58. Az  $\mathbf{a} + \alpha \mathbf{b}$  és  $\mathbf{a} - \alpha \mathbf{b}$  ( $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ) vektorok az  $\alpha$  paraméter mely értékeinél merőlegesek egymásra?
59. Mutassuk ki, hogy az  $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})/|\mathbf{a}|^2$  ( $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ) vektor merőleges az  $\mathbf{a}$  vektorra!
60. Mutassuk ki, hogy az  $\mathbf{r} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  vektor merőleges az  $\mathbf{a}$  vektorra!
61. Milyen feltételt kell az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektoroknak kielégíteni ahhoz, hogy az  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  és  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  vektorok merőlegesek legyenek egymásra?
62. Az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok szöge  $30^\circ$ . Abszolút értékük:  $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$  és  $|\mathbf{b}| = 1$ . Számítsuk ki az  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  és  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  vektorok szögét!
63. Legyen  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  két, a zérusvektortól különböző vektor. Határozzuk meg a két vektor szögének koszinuszát, ha  
a)  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|$ ;      b)  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ .
64. Ha az  $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$  vektor merőleges a  $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$  vektorra, az  $\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$  vektor pedig merőleges a  $7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$  vektorra, akkor mekkora az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok szögének koszinusza?
65. Legyen  $|\mathbf{a}| = 2$ ,  $|\mathbf{b}| = 5$  és a két vektor szöge  $120^\circ$ . A  $t$  paraméter mely értékeinél merőlegesek egymásra a  $t\mathbf{a} + 17\mathbf{b}$  és a  $3\mathbf{a} - \mathbf{b}$  vektorok?
66. Mi jellemzi azokat az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  ( $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ) vektorpárokat, amelyekre teljesül az, hogy az  $\mathbf{a}$ -nak a  $\mathbf{b}$  irányába eső merőleges vetülete ugyanolyan hosszú, mint a  $\mathbf{b}$ -nek az  $\mathbf{a}$  irányába eső merőleges vetülete?
67. Legyen  $O$  a tér adott pontja,  $\mathbf{e} = \overrightarrow{OE}$  egységvektor és  $k$  egy pozitív konstans. Hol helyezkednek el azok a  $X$  pontok, amelyekkel  $\mathbf{e} \cdot \overrightarrow{OX} = k$ ?
68. Számítsuk ki a megadott vektorok hajlásszögének koszinuszát!  
a)  $[3, 1, 3]$ ,  $[1, -2, 2]$ .    b)  $[2, 3, -1]$ ,  $[-1, 1, 6]$ .    c)  $[4, 2, -3]$ ,  $[3, 6, 8]$ .
69. Milyen  $z$  szám esetén merőleges a  $\mathbf{b} = [6, -2, z]$  vektor az  $\mathbf{a} = [2, -3, 1]$  vektorra?
70. A következő feladatokban megadott  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok valamelyik koordinátája egy  $t$  paraméterrel egyenlő. A két vektor szöge a  $t$  mely értékénél lesz az adott  $\alpha$  szög?  
a)  $\mathbf{a} = [1, t, 1]$ ,  $\mathbf{b} = [-1, 2, 1]$ ,       $\alpha = 60^\circ$ ,  
b)  $\mathbf{a} = [1, t, 1]$ ,  $\mathbf{b} = [+1/2, 1, +1]$ ,       $\alpha = 45^\circ$ ,  
c)  $\mathbf{a} = [t, 1, 2]$ ,  $\mathbf{b} = [0, -1, 1]$ ,       $\alpha = 90^\circ$ .
71. Számítsuk ki annak az  $\mathbf{x}$  vektornak a koordinátáit, amely kollineáris az  $\mathbf{a} = [2, 1, -1]$  vektorral és kielégíti az  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 3$  egyenletet!
72. Legyen  $\mathbf{a} = [1, 0, -1]$  és  $\mathbf{b} = [1, 1, -1]$ . Határozzuk meg azokat az  $\mathbf{e}$  egységvektorokat, amelyekre  
$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{e})_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad \cos(\mathbf{b}, \mathbf{e})_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$
73. Állítsuk elő az  $\mathbf{a}$  vektort két olyan vektor összegeként, amelyek közül az egyik párhuzamos a  $\mathbf{b}$  vektorral, a másik pedig merőleges  $\mathbf{b}$ -re! Számítsuk ki a két vektort, ha pl.  $\mathbf{a} = [3, 2, 2]$  és  $\mathbf{b} = [4, -2, 2]$ !

4. Vektoralgebra — Vektorok skaláris szorzata

74. Adva vannak az  $\mathbf{a} = [1, 0, 1]$ ,  $\mathbf{b} = [1, 2, 2]$  és  $\mathbf{c} = [-1, 2, 1]$  vektorok. Merőlegesen vetítsük a  $\mathbf{c}$  vektort mind az  $\mathbf{a}$ , mind a  $\mathbf{b}$  vektor egyenesére. Határozzuk meg a két vetületvektor összegét!
75. Az alábbiakban megadott vektorpárok közül melyik lehet rombusznak és melyik lehet téglalapnak két szomszédos oldalvektora?  
 a)  $\mathbf{a} = [3, 5, -4]$ ,  $\mathbf{b} = [2, -10, -11]$ ,  
 b)  $\mathbf{a} = [1, -10, -7]$ ,  $\mathbf{b} = [2, 5, -11]$ ,  
 c)  $\mathbf{a} = [3, 1, -2]$ ,  $\mathbf{b} = [2, 1, 1]$ .
76. Számítsuk ki annak a 6 egységnyi hosszú  $\mathbf{x}$  vektornak a koordinátáit, amely kollineáris a  $[2, -1, 2]$  vektorral és tompaszöget zár be a  $[0, 0, 1]$  vektorral!
77. Számítsuk ki annak az  $\mathbf{x}$  vektornak a koordinátáit, amely eleget tesz a következő feltételeknek:  
 1.)  $\mathbf{x}$  merőleges az  $\mathbf{a} = [1, 1, -1]$  és  $\mathbf{i} = [1, 0, 0]$  vektorokra;  
 2.)  $\mathbf{x}$  abszolút értéke 2;  
 3.)  $\mathbf{x}$  hegyesszöget zár be a  $\mathbf{j} = [0, 1, 1]$  vektorral.
78. Számítsuk ki az  $\mathbf{x}$  vektor koordinátáit, ha  $\mathbf{x}$  merőleges a  $[2, 3, -1]$  és  $[1, -2, 3]$  vektorokra és kielégíti az  $\mathbf{x}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) = -6$  egyenletet!
79. Adva vannak az  $\mathbf{a} = [7, -1, 0]$ ,  $\mathbf{b} = [3, -4, 5]$  és  $\mathbf{c} = [4, 3, 5]$  vektorok. Számítsuk ki azon  $\mathbf{x}$  egységvektorok koordinátáit, melyek az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorokkal egyenlő szöveget zárnak be! Határozzuk meg e szögek koszinuszait is!
80. A  $\mathbf{v} = [v_1, v_2]$  vektor merőleges vetületének hossza az  $\mathbf{a} = [3, 4]$  vektor egyenesén 1, a  $\mathbf{b} = [1, 1]$  vektoron  $\sqrt{2}$ . Számítsuk ki  $\mathbf{v}$  koordinátáit!
81. A  $\mathbf{v}$  vektor merőleges vetületének hossza az  $[1, -1, 1]$ ,  $[2, 0, 1]$ ,  $[1, 1, 2]$  vektorok egyensein rendre  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{6}$ . Határozzuk meg a  $\mathbf{v}$  vektort!
82. Az  $\mathbf{e}$  egységvektor merőleges vetületének hossza mind az  $[1, 1, 0]$ , mind a  $[0, 1, 1]$  vektor egyenesén  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Határozzuk meg az  $\mathbf{e}$  vektort!
83. Az  $\mathbf{m}$  vektor abszolút értéke  $\sqrt{10}$  és  $\mathbf{m}$  merőleges mind az  $\mathbf{a} = [-1, 3, 1]$ , mind a  $\mathbf{k} = [0, 0, 1]$  vektorra. Határozzuk meg az  $\mathbf{m}$  vektort!
84. Igazoljuk, hogy bármely  $ABCD$  tetraéderre  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ .
85. Az előző feladat állítására támaszkodva igazoljuk, hogy ha egy tetraéder két kitérő élpárjának két-két egyenese merőleges egymásra, akkor a harmadik kitérő élpár egyenesei is merőlegesek egymásra.
86. Vektoralgebrai módszerekkel bizonyítsuk be Thales tételét!
87. Igazoljuk, hogy a paralelepipedon testátlóinak négyzetösszege egyenlő az éleinek négyzetösszegével!
88. Bizonyítsuk be, hogy ha a  $\mathbf{v}$  vektor merőleges a nem komplanáris  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorok mindegyikére, akkor  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .
- 89.\* Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder magasságvonalai akkor és csak akkor tartalmazznak egy közös pontot (magasságpontot), ha a tetraéder szemközti élvektorai merőlegesek egymásra.

## Vektorok vektori szorzása

**D 4.18** A háromdimenziós  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok vektori szorzatát így jelöljük:  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , és ezen azt a vektort értjük, amelynek

- 1.) abszolút értéke:  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| := |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ,
- 2.) állása  $\mathbf{a}$ -ra és  $\mathbf{b}$ -re merőleges,
- 3.) iránya pedig olyan, hogy  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , ebben a sorrendben, jobbrandszert alkot.

**T 4.19** Két vektor vektori szorzatának abszolút értéke a két vektor által meghatározott paralelogramma területének mérőszámával egyenlő. Skaláris szorzatokkal kifejezve:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{a^2 b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}.$$

**T 4.20** Két vektor vektori szorzata akkor és csak akkor zérusvektor, ha a két vektor egyező állású.

**T 4.21** Az  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$  és  $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$  vektorok vektori szorzata determinánsokkal

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = i \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

alakban írható fel.

**T 4.22** Kifejtési tétel: Tetszőleges  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vektorokra  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ .

**T 4.23** Tetszőleges  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vektorokra és  $k$  valós számra

- (1)  $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ ,
- (2)  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$ ,
- (3)  $(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$ ,
- (4)  $k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = k\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times k\mathbf{b}$ .

## Feladatok

90.\* Készítsük el az  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  és  $\mathbf{k}$  vektorok vektori szorzatainak művelet tábláját!

91. Végezzük el az alábbi feladatokban kijelölt vektori szorzásokat, majd hozzuk egyszerűbb alakra az így kapott kifejezéseket!

- a)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})$ ,      b)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$ ,
- c)  $(3\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + 3\mathbf{a})$ ,      d)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$ ,
- e)  $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \times (2\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \times (2\mathbf{a} - \mathbf{b})$ ,
- f)  $(\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times (3\mathbf{a} + 10\mathbf{b} - 7\mathbf{c})$ .

92. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét:

- a)  $(\mathbf{i} \times \mathbf{j})^2$ ,    b)  $(2\mathbf{i} \times 3\mathbf{j})^2$ ,    c)  $[(3\mathbf{i} - \mathbf{j}) \times (\mathbf{i} \times 2\mathbf{j})]^2$ .

93. Ha az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok által meghatározott paralelogramma területe  $T$ , akkor mekkora a  $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$  és a  $4\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$  vektorok által meghatározott paralelogramma  $T'$  területe?

- 94<sup>▷</sup> Az  $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$  egyenlőségből következik-e, hogy  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  ?
- 95<sup>▷</sup> Bizonyítsuk be, hogy ha  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ , akkor  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ .
- 96<sup>▷</sup> Bizonyítsuk be, hogy ha  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  nem kollineáris vektorok, és  $\mathbf{v}$  olyan vektor, amellyel  $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$  és  $\mathbf{v} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$  teljesül, akkor  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .
- 97<sup>▷</sup> Igazoljuk, hogy ha  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  nem kollineáris vektorok és  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ , akkor  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ .
- 98<sup>▷</sup> Bizonyítsuk be, hogy ha  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{d}$  és  $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{d}$ , akkor  $\mathbf{a} - \mathbf{d}$  és  $\mathbf{b} - \mathbf{c}$  egyállású vektorok.
- 99<sup>▷</sup> Tegyük fel, hogy az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorok kezdőpontja közös. Bizonyítsuk be, hogy ha  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{0}$ , akkor az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vektorok végpontjai egy egyenesre illeszkednek.
- 100<sup>▷</sup> Bizonyítsuk be, hogy ha az  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  és  $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$  vektorok kollineárisak, de egyikük sem zérusvektor, akkor az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$  vektorok komplanárisak.
101. Ha az  $\mathbf{a}$  vektor merőleges a  $\mathbf{b}$  vektorra, akkor mivel egyenlő az  $\mathbf{a} \times \{\mathbf{a} \times [\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})]\}$  szorzat?
102. Igazoljuk a következő azonosságokat:  
 a)  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ .  
 b)  $\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] = (\mathbf{b}\mathbf{d})(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{b}\mathbf{c})(\mathbf{a} \times \mathbf{d})$ .
103. Igazoljuk, hogy ha az  $\mathbf{a}$  vektor merőleges a  $\mathbf{b} - \mathbf{c}$  vektorra, de a nem merőleges  $\mathbf{b}$ -re, akkor az  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  és  $\mathbf{b} - \mathbf{c}$  vektorok egyállású vektorok!
- 104<sup>▷</sup> Lehet-e az  $\mathbf{a} = [6, 2, -3]$  és  $\mathbf{b} = [-3, 6, -2]$  vektor egy kocka egyik csúcsából kiinduló két élvektor? Ha lehet, akkor határozzuk meg az ugyanebből a csúcsból kiinduló harmadik élvektort!
105. Az  $ABC$  háromszögben  $|\overrightarrow{AB}| = 8$ ,  $|\overrightarrow{BC}| = 4$ ,  $|\overrightarrow{CA}| = 6$ . Számítsuk ki az  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$  vektor abszolút értékét!
106. Az  $ABC$  háromszögben legyen  $\overrightarrow{AB} = [2, -3, 1]$  és  $\overrightarrow{AC} = [1, 4, 6]$ . Számítsuk ki az  $A$  csúcshoz tartozó  $m_a$  magasság hosszúságát!
- 107<sup>▷</sup> Legyen  $\mathbf{e}$  egységvektor,  $\mathbf{a}$  egy tetszőleges vektor. Mi az  $|\mathbf{e} \times \mathbf{a}|$  szám és az  $(\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e}$  vektor geometriai jelentése? Ennek ismeretében adjunk új megoldást a 73. feladatra!
- 108<sup>▷</sup> Adva van három, közös kezdőpontú  $\mathbf{a} = [1, 1, 0]$ ,  $\mathbf{b} = [0, 1, 1]$  és  $\mathbf{c} = [1, 2, 2]$  vektor. Bontsuk fel a  $\mathbf{c}$  vektort két olyan vektor összegére, melyek közül az egyik az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  síkjában van, a másik  $\mathbf{e}$  síkra merőleges!
109. Egy paralelogramma két, közös kezdőpontból kiinduló élvektora  $\mathbf{a} = [3, -1, 1]$  és  $\mathbf{b} = [t, 2, 1]$ . Számítsuk ki a  $t$  paraméter értékét, ha a paralelogramma területe  $3\sqrt{6}$  egység.
110. Adva van az  $ABCD$  négyszög három oldalvektora:  $\overrightarrow{AB} = [2, -3]$ ,  $\overrightarrow{BC} = [6, 2]$  és  $\overrightarrow{CD} = [1, 3]$ . Számítsuk ki az  $ABCD$  négyszög területét!
- 111<sup>▷</sup> Adva van három vektor:  $\mathbf{a} = [2, -1]$ ,  $\mathbf{b} = [1, 1]$  és  $\mathbf{v} = [7, 1]$ . Számítsuk ki annak a paralelogrammának a területét, amelynek egyik átlója a  $\mathbf{v}$  vektor és oldalai  $\mathbf{a}$ -val, illetve  $\mathbf{b}$ -vel párhuzamosak!

112. Legyen  $\overrightarrow{OA} = [0, 1, 1]$ ,  $\overrightarrow{OB} = [-1, 1, 2]$  és  $\overrightarrow{OC} = [1, 0, 1]$ . Határozzuk meg az  $ABCO$  tetraédernek az  $O$  csúcshoz tartozó magasságát!
113. Adott a ( $\neq 0$ ) vektor esetén melyek azok a  $b$  ( $\neq 0$ ) vektorok, amelyekre  $|a \times b| = ab$  teljesül?

### Vektorok vegyes szorzata

**D 4.24** Az  $a$ ,  $b$  és  $c$  vektorok  $abc$ -vel jelölt vegyes szorzatán az  $(a \times b)c$  számot értjük.

**T 4.25** Az  $abc$  vegyes szorzat abszolút értéke annak a paralelogramma alapú hasábnak a térfogatát adja, amelynek egy csúcából kiinduló három élvektora éppen az  $a$ ,  $b$  és  $c$  vektor. Az  $abc$  előjele aszerint pozitív ill. negatív, hogy a három vektor jobb- ill. balsodrású vektorhármas-e? Az  $abc$  értéke pontosan akkor 0, ha a három vektor komplanáris.

**T 4.26** Tetszőleges  $a$ ,  $b$ ,  $c$  vektorok vegyes szorzatára teljesülnek a következő összefüggések:

- (1)  $abc = bca = cab = -bac = -acb = -cba$ ,
- (2)  $abc = a(b \times c)$ .

**T 4.27** Az  $a = [a_1, a_2, a_3]$ ,  $b = [b_1, b_2, b_3]$  és  $c = [c_1, c_2, c_3]$  vektorok vegyes szorzata a következő harmadrendű determinánssal egyenlő:

$$abc = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

### Feladatok

114. Fejezzük ki a következő vegyes szorzatokat az  $abc$  vegyes szorzattal:
- a)  $ab(c + \lambda a + \mu c)$ , ahol  $\lambda$  és  $\mu$  adott valós számok,
  - b)  $\frac{a + b}{2} \frac{b + c}{2} \frac{c + a}{2}$ .
115. Komplanárisak-e a  $2a + 3b$ ,  $3b - 4c$ ,  $2a + 5c$  vektorok, ha az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  vektorok nem komplanárisak?
116. Bizonyítsuk be, hogy ha az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  vektorok kielégítik az  $(a \times b) + (b \times c) + (c \times a) = 0$  feltételt, akkor komplanárisak.
117. Bizonyítsuk be, hogy bármely  $a$ ,  $b$ ,  $c$  vektorhármas esetén  $|abc| \leq |a||b||c|$ . Milyen esetben teljesül az egyenlőség?
118. Az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogata  $V$ . Mennyi az  $r = 2a + 3b + 4c$ ,  $s = a - b + c$  és  $t = 2a + 4b - c$  vektorok által kifeszített paralelepipedon  $V'$  térfogata?
- 119.<sup>p</sup> Az  $a = [2, -1, 2]$ ,  $b = [3, 1, 5]$  és  $c = [\alpha, 2, -1]$  vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogata  $\alpha$  milyen értéke mellett lesz 10 egység?

4. Vektoralgebra — Vektorok vegyes szorzata

120. A következő feladatokban megadott  $\{a, b, c\}$  vektorrendszer az  $\alpha$  paraméter mely értékeinél lineárisan független, és mely értékeinél lineárisan függő?
- a)  $a = [0, 2, 3]$ ,  $b = [\alpha, -1, 2]$ ,  $c = [1, 2, 1]$ ,  
 b)  $a = [2, \alpha, 4]$ ,  $b = [0, 0, 0]$ ,  $c = [3, -1, 2]$ ,  
 c)  $a = [\alpha, 1, 2]$ ,  $b = [3, -1, 0]$ ,  $c = [2, 1, 0]$ ,  
 d)  $a = [\alpha, 2, 1]$ ,  $b = [0, \alpha, 2]$ ,  $c = [1, -1, 3]$ ,  
 e)  $a = [\alpha, 5, 1]$ ,  $b = [3, 0, 3]$ ,  $c = [1, 0, 1]$ ,  
 f)  $a = [3, \alpha, 0]$ ,  $b = [0, 3, \alpha]$ ,  $c = [1, 0, -1]$ .
121. Az  $a, b, c$  vektorhármast oly jobbrészt alkot, amelynek elemei páronként merőlegesek egymásra. Számítsuk ki az  $abc$  vegyes szorzat értékét, ha  $|a| = 4$ ,  $|b| = 2$  és  $|c| = 3$ .
122. Mekkora az  $ABCD$  tetraéder térfogata, ha  $\overrightarrow{AB} = [2, -1, 4]$ ,  $\overrightarrow{BC} = [6, 1, -4]$  és  $\overrightarrow{CD} = [1, 1, 2]$ ?
123. A 8 egység térfogatú  $ABCD$  tetraéder két élvektora:  $\overrightarrow{AB} = [3, 2, 1]$  és  $\overrightarrow{AC} = [1, 0, 1]$ . Határozzuk meg az  $\overrightarrow{AD}$  élvektort úgy, hogy az egyállású legyen a  $d = [-1, 2, 1]$  vektorral!
124. Legyenek a 4 egység térfogatú paralelepipedon,  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  élvektorai  $\overrightarrow{AB} = [3, 1, 0]$  és  $\overrightarrow{AD} = [2, 0, 1]$  (l. a 38. feladat melletti ábrát). Határozzuk meg az  $\overrightarrow{AA_1}$  élvektort azzal a feltétellel, hogy az merőleges legyen az  $r = [2, -4, 1]$  és  $s = [1, 1, 2]$  vektorokra! Számítsuk ki a paralelepipedonnak az  $ABCD$  laphoz tartozó magasságát!
- 125.<sup>p</sup> Legyen  $a, b, c$  három adott vektor és  $u, v, w$  három tetszőleges lineáris kombinációjuk, azaz

$$u = u_1 a + u_2 b + u_3 c,$$

$$v = v_1 a + v_2 b + v_3 c,$$

$$w = w_1 a + w_2 b + w_3 c$$

álljon fenn valamely  $u_i, v_i, w_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) számokra. Bizonyítsuk be, hogy

$$uvw = abc \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

- 126.<sup>p</sup> Legyen  $\{a, b, c\}$  és  $\{u, v, w\}$  a tér két lineárisan független vektorrendszere. Ismeretes, hogy ekkor  $u, v, w$  és  $a, b, c$  kifejezhetőik

$$u = u_1 a + u_2 b + u_3 c \quad a = a_1 u + a_2 v + a_3 w,$$

$$v = v_1 a + v_2 b + v_3 c \quad \text{illetve} \quad b = b_1 u + b_2 v + b_3 w,$$

$$w = w_1 a + w_2 b + w_3 c \quad c = c_1 u + c_2 v + c_3 w$$

alakban, ahol  $u_i, v_i, w_i, a_i, b_i, c_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) alkalmasan választott valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 1.$$

## 5. fejezet

# Analitikus térgeometria

### Kezdő és végpontjuk koordinátaival adott vektorok

**D 5.1** A koordináta-rendszer  $O$  kezdőpontjából a  $P$  pontba mutató  $\overrightarrow{OP}$  kötött vektort a  $P$  pont helyvektorának nevezzük.

**T 5.2** A tér tetszőleges  $P$  pontjának derékszögű koordinátái az  $\overrightarrow{OP}$  helyvektor koordinátaival megegyeznek. Azaz, ha  $P(x, y, z)$ , akkor  $\overrightarrow{OP} = xi + yj + zk$  ( $= [x, y, z]$ ).

**T 5.3** Ha  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  és  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  koordinátaikkal adott pontok, akkor

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k.$$

Rövidebben írva:  $\overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$ . A  $P_1$  és  $P_2$  pontok  $d(P_1, P_2)$  távolsága pedig a  $\overrightarrow{P_1P_2}$  vektor hosszával egyenlő:  $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ .

### Feladatok

1. Számítsuk ki az  $A(1, -2, -3)$  pontból a  $B(2, -3, 0)$ ,  $C(3, 1, -9)$ , illetve  $D(-1, 1, -12)$  pontba mutató  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  és  $\overrightarrow{AD}$  vektorok koordinátáit!
2. Számítsuk ki az  $A(4, -2, -4)$ ,  $B(-4, 12, 6)$ ,  $C(12, -4, 3)$ ,  $D(5, 7, 11)$  pontoknak az origótól mért távolságát!
3. Döntsük el, hogy az alábbiakban megadott  $ABC$ ,  $DEF$  és  $GHK$  háromszögek között van-e egyenlő szárú:  $A(5, 1, 0)$ ,  $B(2, -1, 3)$ ,  $C(-2, 3, 1)$ ;  $D(3, -1, 2)$ ,  $E(0, -4, 2)$ ,  $F(-3, 2, 1)$ ;  $G(3, -3, 5)$ ,  $H(2, -2, 5)$ ,  $K(2, -3, 6)$ .
4. Adjunk meg az  $x$  tengelyen olyan pontot, mely az  $A(-3, 4, 8)$  ponttól 12 egység távolságra van!
5. Adjunk meg a  $z$  tengelyen olyan pontot, mely egyenlő távolságra van az  $A(1, -3, 7)$  és  $B(5, 7, -5)$  pontoktól!
6. Lehet-e  $A(3, -1, 6)$ ,  $B(-1, 7, -2)$  és  $C(3, 1, 8)$  egy téglalap három csúcsa?
7. Van-e tompaszöge annak a háromszögnek, amelynek csúcsai:  $A(4, -1, 4)$ ,  $B(0, 7, -4)$ ,  $C(3, 1, -2)$ ?

5. Analitikus térgeometria — Kezdő és végpontjuk koordinátaival adott vektorok

- 8<sup>▷</sup> Számítsuk ki a következő feladatokban adott  $ABC$  háromszög területét, az  $AB$  oldalhoz tartozó magasságot és az  $A$  csúcsnál lévő szög tangensét!
- $A(5, 4, 1), B(1, 6, 2), C(3, 3, 2)$ .
  - $A(5, 7, 1), B(3, 6, -4), C(2, 8, -1)$ .
  - $A(6, 1, 5), B(4, 1, 4), C(3, 0, 3)$ .
- 9<sup>▷</sup> Az  $ABC$  háromszög csúcsai:  $A(3, 2, 5), B(3, 2, -5), C(-5, 0, 3)$ . Számítsuk ki a háromszög súlyvonalainak hosszát!
- 10<sup>▷</sup> Határozzuk meg annak a  $P$  pontnak a koordinátáit, amely az  $A(a_1, a_2, a_3)$  és  $B(b_1, b_2, b_3)$  pontokat összekötő szakaszt  $AP : PB = m : n$  arányban osztja!
11. Számítsuk ki az  $A(4, -1, 2)$  és  $B(-2, 2, 5)$  pontok által meghatározott szakasz harmadoló pontjainak koordinátáit!
12. A következő feladatokban a megadott  $A$  pontot tükrözzük a  $B$  ponton. Számítsuk ki a tükörkép koordinátáit!
- $A(3, 4, -1), B(0, 0, 0)$ .
  - $A(0, 0, 0), B(3, 4, -1)$ .
  - $A(-1, -2, -5), B(2, -1, 3)$ .
  - $A(5, -1, 2), B(0, -1, 2)$ .
- 13<sup>▷</sup> Adva van az 5 egység területű  $ABC$  háromszög  $A(2, -1, 3)$  és  $B(5, 2, 4)$  csúcspontja. Számítsuk ki a  $C$  csúcs koordinátáit, ha a  $C$  pont
- az  $x$  tengelyen;
  - a  $z$  tengelyen fekszik.
- 14<sup>▷</sup> Adott az  $A(3, -1, 0)$  és a  $B(2, 2, 1)$  pont. Ha a  $C(0, y, 0)$  pont végigfut az  $y$  tengelyen, akkor az  $ABC$  háromszög területe milyen értékek között változik?
- 15<sup>▷</sup> Egy paralelogramma három csúcsa:  $A(3, -1, 2), B(1, 2, -4)$  és  $C(-1, 1, 2)$ . Számítsuk ki a negyedik csúcs koordinátáit!
- 16<sup>▷</sup> A következő feladatokban adott négy-négy pont egy síkban van-e?
- $A(2, -1, 4), B(-1, 0, 3), C(3, -1, 0), D(1, 1, 2)$ .
  - $A(1, 2, 3), B(3, 1, 6), C(0, 3, 4), D(1, 3, 8)$ .
  - $A(1, -9, -12), B(2, -7, -13), C(0, -11, -11), D(3, -5, -14)$ .
- 17<sup>▷</sup> Egy tetraéder csúcspontjai:  $A(-2, 0, 2), B(2, 0, -1), C(1, 2, -1), D(2, 1, -1)$ . Számítsuk ki a tetraéder térfogatát, felszínét és az  $ABC$  laphoz tartozó magasságát!
- 18<sup>▷</sup> Egy tetraéder csúcsai:  $A(2, -4, 3), B(1, -4, 4), C(-3, 2, 0)$  és  $D(2, 0, u)$ . Hogyan kell megválasztani a  $D$  pont  $u$ -val jelölt koordinátáját, hogy a tetraéder térfogata 4 egység legyen?
- 19<sup>▷</sup> Az  $A(1, 0, u), B(2, -1, 3), C(2, 0, v), D(1, 1, -1)$  pontnégyes milyen  $u$  és  $v$  értékekre lesz egysíkú?
- 20<sup>▷</sup> Az  $ABCD$  tetraéder három csúcspontja:  $A(3, 1, 0), B(2, 1, 1)$  és  $C(-1, -1, 1)$ . Melyek azok  $D(x, y, z)$  pontok, amelyekkel a tetraéder térfogata 10 egység?



## A sík egyenletei

**D 5.4** Az adott  $P_0$  ponton áthaladó  $\mathcal{S}$  sík normálvektorának nevezünk minden olyan  $\mathbf{n}$  ( $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ ) vektort, amely merőleges az  $\mathcal{S}$  síkra.

**T 5.5** Ha egy sík átmegy a  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  ponton és merőleges a zérusvektortól különböző  $\mathbf{n} = [A, B, C]$  vektorra, akkor egyenlete:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

**T 5.6** Minden sík egyenlete

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

alakú, és minden ilyen egyenlet sík egyenlete, ha  $A$ ,  $B$  és  $C$  közül legalább az egyik zérustól különböző.

## Feladatok

- 21.** A következő feladatokban adva van egy  $A$  pont és egy  $\mathbf{n}$  vektor. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amelynek egyik pontja az  $A$  pont és normálvektora az  $\mathbf{n}$  vektor!
- a)  $A(2, 1, 4)$ ,  $\mathbf{n} = [3, 2, -4]$ .      b)  $A(0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{n} = [1, 2, 4]$ .  
 c)  $A(7, 2, -2)$ ,  $\mathbf{n} = [2, 0, 3]$ .      d)  $A(3, 2, 0)$ ,  $\mathbf{n} = [0, -2, 1]$ .  
 e)  $A(0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{n} = [1, 0, 0]$ .      f)  $A(0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{n} = [0, 1, 0]$ .  
 g)  $A(0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{n} = [0, 0, 1]$ .      h)  $A(-1, 2, 0)$ ,  $\mathbf{n} = [0, 3, 0]$ .
- 22.\*** Vizsgáljuk meg, hogy a három pont egy egyenesbe esik-e; ha nem, akkor írjuk fel a megadott pontokon áthaladó sík egyenletét!
- a)  $P(0, -1, 2)$ ,  $Q(2, -1, 1)$ ,  $R(4, 3, -2)$ .  
 b)  $P(1, 0, 0)$ ,  $Q(0, 1, 0)$ ,  $R(0, 0, 1)$ .  
 c)  $P(-3, 0, 4)$ ,  $Q(4, 1, 2)$ ,  $R(0, 0, 0)$ .  
 d)  $P(4, 0, -1)$ ,  $Q(5, 0, 2)$ ,  $R(-2, 0, 0)$ .  
 e)  $P(-2, 3, 1)$ ,  $Q(0, 5, 2)$ ,  $R(-4, 1, 0)$ .
- 23.\*** Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az  $A(1, 5, 2)$  ponton és párhuzamos a  $7x - y + 3z + 2 = 0$  egyenletű síkkal!
- 24.** Határozzuk meg az  $x + 2y - 3z + 6 = 0$  egyenletű síknak a koordináta-tengelyekkel alkotott metszéspontjait!
- 25.** Igazoljuk, hogy a  $2x + y - z - 2 = 0$ ,  $x - 3y + z + 1 = 0$ ,  $x + y + z - 3 = 0$  egyenletű síkoknak egyetlen közös pontjuk van. Ezen a közös ponton át fektessünk olyan síkot, amely párhuzamos az  $x + y + 2z = 0$  egyenletű síkkal!
- 26.** Mutassuk ki, hogy az  $x - y - z = 0$ ,  $3x - y - z + 2 = 0$  és  $4x - y - z + 4 = 0$  egyenletű síkoknak nincs közös pontjuk!

5. Analitikus térgeometria — Egyenesekre és síkokra vonatkozó helyzetgeometriai feladatok

- 27.\* Normálvektorok segítségével mutassuk ki, hogy az  $x+y+z=6$ ,  $2x-y+z=3$  és  $x+2y-z=2$  egyenletű síkoknak pontosan egy közös pontjuk van.
28. Számítsuk ki a következő síkok által határolt tetraéder térfogatát:  
 $x+y+z-1=0$ ,  $x-y-1=0$ ,  $x-z-1=0$ ,  $z-2=0$ .
29. Mi az egyenlete annak a síknak, amely áthalad az  $A(-2, 3, 1)$  és  $B(4, 2, -1)$  pontokon és merőleges a  $3x-y+z-3=0$  egyenletű síkra?
30. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges a  $-x+2y+3z-2=0$  és  $2x-y-z+1=0$  egyenletű síkokra és átmegey a  $P(4, 1, 2)$  ponton!
31. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely az  $A(1, -3, 0)$  és  $B(3, 7, -4)$  pontokat összekötő szakaszt felezi és merőleges rá!
- 32.\* Adott az  $A(1, 3, 5)$ ,  $B(2, 5, 3)$  és  $C(4, 7, 5)$  pont. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely áthalad az  $A$  ponton és merőleges az  $ABC$  háromszög  $A$  csúcsánál lévő a) belső szög; b) külső szög felező egyenesére!
- 33.\* Egy háromszög három csúcsa:  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(5, 1, 4)$  és  $C(3, 3, 2)$ . Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely áthalad az  $A$  ponton és merőleges az  $A$  csúcshoz tartozó magasságvonalra!

Egyenesekre és síkokra vonatkozó helyzetgeometriai feladatok

D 5.7 Az adott  $P_0$  ponton áthaladó  $e$  egyenes irányvektorának nevezünk minden olyan  $v$  ( $v \neq 0$ ) vektort, amely párhuzamos az  $e$  egyenessel.

T 5.8 Ha a  $P_0$  pont egy egyenes egyik pontja, irányvektora pedig  $v = [a, b, c]$ , akkor az egyenes paraméteres egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct, \end{aligned}$$

ahol a  $t$  paraméter az összes valós számon végigfut.

T 5.9 Ha a  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  ponton átmenő és  $v = [a, b, c]$  irányvektorú egyenes egyik tengelysíkkal sem párhuzamos ( $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ ), akkor egyenletrendszere

$$(1) \quad \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}.$$

Ha  $a, b, c$  közül az egyik (pl.  $c$ ) 0, de a másik kettő nem, akkor az egyenes egyenletrendszere

$$(2) \quad \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}, \quad z = z_0.$$

Ha  $a, b, c$  közül kettő 0 (pl.  $b$  és  $c$ ) egy pedig nem, akkor az egyenes egyenletrendszere:

$$(3) \quad y = y_0, \quad z = z_0.$$

Az (1), (2), és (3) egyenletrendszereket az egyenes paramétermentes egyenletrendszereinek nevezzük. Megállapodunk abban, hogy az „egyes egyenletrendszere” kifejezésen (jelző nélkül) mindig ezt a paramétermentes egyenletrendszert értjük.

Feladatok

- 34<sup>b</sup> A következő három egyenes közül kettő paraméteres, egy pedig paramétermentes egyenletrendszerrel van megadva:

$$e: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, \quad f: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 4 \\ z = 1 + 2t \end{cases}, \quad g: \frac{2-x}{3} = y-1 = \frac{5-z}{2}.$$

Határozzuk meg mindhárom egyenes irányvektorát és döntjük el, hogy az  $A(2, 1, 5)$  és  $B(-1, 4, 7)$  pontok közül melyik van rajta az egyes egyeneseken!

35. Írjuk fel a következő, paraméteres egyenletrendszerrel megadott egyenesek paramétermentes egyenletrendszerét:

$$e: \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 - t \end{cases}, \quad f: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 \\ z = -1 + 3t \end{cases}, \quad g: \begin{cases} x = t - 5 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases}.$$

36. Írjuk fel a következő, paramétermentes egyenletrendszerrel megadott egyeneseknek azt a paraméteres egyenletrendszerét, amelynél a  $t = 0$  paraméterértékhez a megadott  $x_0$ , illetve  $y_0$  koordinátájú  $P_0$  pont tartozik!

a)  $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z}{4}$ ;  $x_0 = 16$ .      b)  $x = 3$ ,  $\frac{y-1}{2} = z$ ;  $y_0 = 5$ .

c)  $y = 4$ ,  $z = -3$ ;  $x_0 = 7$ .

- 37<sup>a</sup> A következő feladatokban egy-egy egyenest különböző meghatározó adataival adtunk meg. Írjuk fel az egyenesek paraméteres és paramétermentes egyenletrendszerét!

a) Átmegy az  $A(-2, 5, 1)$  ponton, és párhuzamos az  $a = [-1, 2, 3]$  vektorral.

b) Átmegy a  $P(3, 1, 2)$  és a  $Q(-1, 1, 3)$  ponton.

c) Párhuzamos a  $k = [0, 0, 1]$  vektorral, és átmegy az  $A(5, 1, 4)$  ponton.

d) Merőleges az  $a = [-2, 3, 1]$  és a  $b = [2, 0, 1]$  vektorra, és átmegy az  $A(6, -3, 4)$  ponton.

e) Párhuzamos a  $3x + y - z + 1 = 0$  és az  $x + y + z = 0$  egyenletű síkkal, és metszi az  $yz$  tengelysíkot a  $P(0, 4, 1)$  pontban.

38. A következő feladatokban szereplő egyenesek, illetve síkok az  $\alpha$  paraméter mely értékénél (értékeinél) elégítik ki a leírt követelményt?

a) Az  $\frac{x+2}{2} = -\frac{y}{3} = \frac{z-1}{4}$  és az  $\frac{x-3}{\alpha} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$  egyenletrendszerű egyenesek merőlegesek egymásra.

b) Az  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{\alpha}$  egyenletrendszerű egyenes és az  $x + 3y - 2\alpha z = 0$  egyenletű sík párhuzamos egymással.

c) Az  $x = 1 + \alpha t$ ,  $y = -2t$ ,  $z = 1$  egyenletrendszerű egyenes metszi a  $2x + \alpha y + z + 1 = 0$  egyenletű síkot.

5. Analitikus térgeometria — Egyenesekre és síkokra vonatkozó helyzetgeometriai feladatok

- d) Az  $A(2, 4, -1)$  és a  $B(\alpha, \alpha + 6, 3)$  ponton átmenő egyenes merőleges a  $3x + 5y + \frac{\alpha}{4}z = 0$  egyenletű síkra.
39. Határozzuk meg a  $P(-2, 1, 0)$  pontra és az  $e: x = t + 2, y = 3t, z = 2$  egyenletrendszerű egyenesre illeszkedő sík egyenletét!
40. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a  $P(3, 0, 1)$  ponton és párhuzamos az alábbi egyenesekkel:

$$e: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2t \end{cases} \quad \text{és} \quad f: \frac{x+2}{2} = y = -z.$$

41. Írjuk fel az  $x - 3y + z + 2 = 0$  és  $2x - 5y - z + 4 = 0$  egyenletű síkok metszésvonalának paraméteres egyenletrendszerét, az  $x, y, z$  koordináták valamelyikét választva paraméterként. Ennek alapján írjuk fel a metszésvonal paramétermentes egyenletrendszerét is!
42. A következő feladatokban egy-egy sík és egy-egy egyenes van megadva. Határozzuk meg az egyenes és a sík közös pontját, illetve pontjait (ha van ilyen)!
- a)  $-2x + y + 3z - 3 = 0, \quad \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - t. \end{cases}$
- b)  $3x - y - 2z - 2 = 0, \quad \frac{x-1}{2} = 2y + 3 = z - 3.$
- c)  $x + 2y - z + 2 = 0, \quad x + 2 = y - 3 = \frac{z+1}{3}.$
- d)  $5x - y + 3z - 3 = 0, \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 + 3t \\ z = 1 + t. \end{cases}$
43. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely párhuzamos az  $x - y - 4z - 5 = 0$  és az  $2x + y - 2z - 4 = 0$  egyenletű síkok metszésvonalával és átmegy az origón!
44. Egy háromszög csúcsai:  $A(3, 6, -7), B(-5, 2, 3)$  és  $C(4, -7, -2)$ . Adjuk meg a  $C$  csúcson átmenő súlyvonal egyenletrendszerét!
45. Egy háromszög csúcsai:  $A(3, -1, -1), B(1, 2, -7)$  és  $C(-2, 8, -5)$ . Írjuk fel a  $B$  csúcshoz tartozó (belső) szög szögfelezőjének egyenletrendszerét!
46. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely tartalmazza az

$$\frac{x-5}{3} = y - 1 = z$$

egyenletrendszerű egyenest és merőleges a  $2x - y + z = 0$  egyenletű síkra!

- 47.\* Állapítsuk meg az alábbi hat egyenesből alkotható egyenespárok kölcsönös helyzetét! Ha metszőek, adjuk meg a metszéspontjukat! (Első lépésként vizsgáljuk meg az irányvektoraikat!)

5. Analitikus térgeometria — Egyenesekre és síkokra vonatkozó helyzetgeometriai feladatok

$$e: \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad f: \begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = -3 + 2t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad g: \begin{cases} y = -1 \\ \frac{x+5}{2} = \frac{z-6}{3} \end{cases}$$

$$h: \begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = -1 \\ z = 3t + 9 \end{cases} \quad k: \frac{8-x}{3} = y + 2 = \frac{z+3}{2} \quad l: \frac{x-5}{6} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{-4}.$$

Határozzuk meg a  $\lambda$  paraméter értékét úgy, hogy az alábbi két egyenes messe egymást:

$$48^{\circ} e: \begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = -3t \\ z = 4t + 1 \end{cases} \quad f: \begin{cases} x = u + 3 \\ y = 4u + 1 \\ z = 2u + \lambda \end{cases},$$

$$49. e: \frac{x-1}{5} = \frac{1-2y}{3} = -z, \quad f: \frac{x+3}{\lambda} = \frac{2y-3}{4} = 1+z,$$

$$50. e: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+\lambda}{3}, \quad f: \text{az } x, y \text{ vagy a } z \text{ tengely valamelyike.}$$

$$51. e: \begin{cases} 2x + 3y - z + \lambda = 0 \\ 3x - 2y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \quad f: \text{az } x, y \text{ vagy a } z \text{ tengely valamelyike.}$$

52. Tükrözzük az  $A(4, -3, 5)$  pontot az  $x - y + z - 9 = 0$  egyenletű síkon! Számítsuk ki a tükrökép koordinátáit!

53. Tükrözzük az  $A(2, -1, 3)$  pontot az  $x = 3t, y = 5t - 7, z = 2t + 2$  egyenletrendszerű  $e$  egyenesen!

54. Tükrözzük az  $x = 1 - 2t, y = 3 + 2t, z = -4 - 9t$  egyenletrendszerű  $e$  egyenest a  $3x + y - 2z = 0$  egyenletű síkon!

55. Jelölje  $e$  az  $x + y - z + 1 = 0$  és  $2x - y + z - 1 = 0$  egyenletű síkok metszésvonalát,  $f$  pedig az  $e$ -nek az  $x + 2y - z = 0$  egyenletű síkra eső merőleges vetületét. Írjuk fel az  $f$  egyenes paraméteres egyenletrendszerét, az  $x$ -et választva paraméterként!

56<sup>o</sup> Mi az egyenlete annak a síknak, amely párhuzamos az  $x = 2y = 3z$  egyenletrendszerű egyenessel, és áthalad az  $x + y + z = 0$  és a  $2x - y + 3z = 0$  egyenletű síkok metszésvonalán?

57. Egy síkról tudjuk, hogy átmegy a  $3x - y + 2z + 9 = 0$  és az  $x + z + 3 = 0$  egyenletű síkok metszésvonalán. Adjuk meg  $e$  sík egyenletét, ha  
 a) átmegy az  $A(4, -2, -3)$  ponton is;      b) párhuzamos az  $x$  tengellyel;  
 c) párhuzamos az  $y$  tengellyel;      d) párhuzamos a  $z$  tengellyel;  
 e) párhuzamos az  $a = [2, -1, 2]$  vektorral.

Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét (ha van ilyen egyenes), amely illeszkedik a  $P$  pontra és metszi az  $e$  és  $f$  egyeneseket:

$$58^{\circ} P(0, 0, 0), \quad e: x - 4 = \frac{-y+7}{3} = \frac{z-2}{2}, \quad f: \frac{5-x}{3} = \frac{9-y}{5} = z + 9,$$

$$59. P(-4, -5, 3), \quad e: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -3 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, \quad f: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{1-z}{5},$$

5. Analitikus térgeometria — Egyenesekre és síkokra vonatkozó távolság- és szögfeladatok

60.  $P(1,1,4)$   $e: \frac{x-1}{3} = -y = \frac{z-1}{3}$ ,  $f: \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 1 - 3t \\ z = -2 + t \end{cases}$ ,

61.  $P(3,-2,1)$   $e: \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$ ,  $f: x - 5 = 4 - 4y = 4z - 8$ .

62<sup>°</sup> Az  $S: x + y + z = 1$  egyenletű sík és az  $e: y = 1, z = -1$  egyenletrendszerű egyenes  $K$  közös pontján át vegyünk fel olyan  $f$  egyenest, amely az  $S$  síkban fekszik és merőleges az  $e$  egyenesre. Írjuk fel az  $f$  paraméteres egyenletrendszerét!

63. Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a  $P(-1, 2, -3)$  ponton, merőleges az  $a = [6, -2, -3]$  vektorra, és metszi az

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{3-z}{5}$$

egyenletrendszerű egyenest!

64<sup>°</sup> Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét (ha van ilyen egyenes), amely merőleges a  $2x + 4y - z + 5 = 0$  egyenletű síkra és metszi a következő egyenletrendszerű egyencseket:

$$e: \frac{x}{2} = -y = z, \quad f: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z}{3}.$$

65<sup>°</sup> Igazoljuk, hogy az  $x - y + z = 0, 3x - y - z + 2 = 0, 4x - y - 2z + \lambda = 0$  egyenletű síkok páronként metszik egymást és a metszésvonalak egyező állásúak! Ezt követően határozzuk meg a  $\lambda$  paraméter értékét úgy, hogy a három síknak a) legyen közös pontja; b) ne legyen közös pontja.

Egyenesekre és síkokra vonatkozó távolság- és szögfeladatok

D 5.10 Az  $Ax + By + Cz + D = 0$  egyenletű sík normálegyenletén az

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

egyenletet értjük.

T 5.11 A  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  pont távolsága az  $Ax + By + Cz + D = 0$  egyenletű  $S$  síktól:

$$d(P_0, S) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

T 5.12 A  $P$  pont távolsága az  $e$  egyenestől:

$$d(P, e) = \frac{|\vec{PQ} \times \vec{QR}|}{|\vec{QR}|},$$

5. Analitikus térgeometria — Egyenesekre és síkokra vonatkozó távolság- és szögfeladatok

ahol  $Q$  és  $R$  az  $e$  egyenes két tetszőleges különböző pontját jelöli.

**T 5.13** Legyen az  $a$  egyenes egy irányvektora az  $\mathbf{a}$ , a  $b$  egyenesé pedig a  $\mathbf{b}$  vektor. Ha  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  nem egyező állásúak, és  $\mathbf{c}$  olyan vektor, amely a két egyenes egy-egy pontját köti össze, akkor a két egyenes távolsága:

$$d(a, b) = \frac{|(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}.$$

**T 5.14** Ha az  $a$  egyenes egy irányvektora az  $\mathbf{a}$ , a  $b$  egyenesé pedig a  $\mathbf{b}$  vektor, akkor hajlásszögük a következő képlet segítségével számítható ki:

$$\cos(a, b)\angle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}.$$

**T 5.15** A  $\mathbf{v}$  irányvektorú  $e$  egyenes és az  $\mathbf{n}$  normálvektorú  $S$  sík szögét a következő képlet alapján számíthatjuk ki:

$$\sin(e, S)\angle = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{v}||\mathbf{n}|}.$$

### Feladatok

66. Igazoljuk, hogy a következő két egyenes egymással párhuzamos:

$$e: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}, \quad f: x - 5 = 4y - 16 = 4z - 28.$$

Írjuk fel annak a  $g$  egyenesnek az egyenletrendszerét, amely az  $e$  és  $f$  egyenesek síkjában van, azok között halad, mindkettővel párhuzamos és mindkettőtől egyenlő távolságra van!

67? Adjuk meg azokat a pontokat, amelyek rajta vannak az

$$e: \frac{x-1}{2} = -y = \frac{z+3}{3}$$

egyenesen és 2 egység távolságra vannak az  $x + 2y + 2z + 11 = 0$  egyenletű síktól!

68. Igazoljuk, hogy a  $2x - 4y + 2z - 1 = 0$ , és az  $x - 2y + z - 1 = 0$  egyenletű síkok egymással párhuzamosak. Határozzuk meg a két sík távolságát!

69. Mutassuk meg, hogy az

$$e: \frac{x-1}{3} = y-2 = \frac{z}{5}, \quad f: \begin{cases} x = 4-t \\ y = 3+3t \\ z = 5+5t \end{cases} \quad \text{és} \quad g: \begin{cases} x = 3+u \\ y = 6-3u \\ z = 5u \end{cases}$$

egyenletrendszerű egyenesek egy közös  $K$  pontban metszik egymást, és határozzuk meg a  $K$  pont koordinátáit! Továbbá számítsuk ki

a) az  $e$ ,  $f$  és  $g$  egyenesek páronkénti szögének koszinuszát;

5. Analitikus térgeometria — Egyenesekre és síkokra vonatkozó távolság- és szögfeladatok

- b) az  $e$  és  $f$  egyeneseken átmenő  $S_1$ , az  $e$  és  $g$  egyeneseken átmenő  $S_2$ , valamint az  $f$  és  $g$  egyeneseken átmenő  $S_3$  sík egy-egy normálvektorát;  
 c) az  $(S_1, S_2)_\perp$ , az  $(S_1, S_3)_\perp$  és az  $(S_2, S_3)_\perp$  tangensét;  
 d) az  $(e, S_3)_\perp$ , az  $(f, S_2)_\perp$  és az  $(g, S_1)_\perp$  szögek szinuszát!
70. Van-e a  $t$  paraméternek olyan értéke, hogy az  $S: x + ty + z - 1 = 0$  egyenletű sík  $60^\circ$ -os szöget zár be  
 a) az  $x$  tengellyel; b) az  $y$  tengellyel; c) a  $z$  tengellyel?  
 Ha van, akkor adjuk meg az összes ilyen valós  $t$  értéket!
71. Írjuk fel azoknak a síkoknak az egyenleteit, amelyek átmennek az  $x + y = 2$  egyenletű sík  $P(1, 1, \sqrt{2})$  és  $Q(0, 2, \sqrt{2})$  pontján, és az adott síkkal  $45^\circ$ -os szöget zárnak be.
72. Az  $e$  egyenesről tudjuk, hogy benne van az  $x - 2y + 1 = 0$  egyenletű síkban, áthalad a  $P(2, 1, 4)$  ponton és az  $xy$  tengelysíkkal  $60^\circ$ -os szöget zár be. Írjuk fel az  $e$  egyenes egyenletrendszerét!
73. Írjuk fel azoknak az egyeneseknek az egyenletrendszerét, amelyek átmennek az origón, továbbá az  $x$  tengellyel és az  $y$  tengellyel  $60^\circ$ -os szöget zárnak be!
74. Vannak-e olyan egyenesek, melyek az

$$e: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 \\ z = 3 + t \end{cases} \quad \text{és} \quad f: -x = \frac{z + 5}{2}, y = 3$$

egyenletrendszerű egyenesek mindegyikével

- a)  $60^\circ$ -os, b)  $45^\circ$ -os, c)  $30^\circ$ -os szöget zárnak be? Ha vannak, akkor ezek közül adjuk meg mindazokat, amelyek átmennek a  $P_0(3, 4, -1)$  ponton.
75. Írjuk fel azoknak a síkoknak az egyenletét, amelyek átmennek a  $P(1, 1, 1)$  ponton, párhuzamosak az  $x + 2y - z - 1 = 0$ ,  $2x - y + z - 1 = 0$  síkok metszésvonalával, és mindkét síkkal ugyanakkora szöget zárnak be! Határozzuk meg ennek a szögnek a koszinuszát!
76. Számítsuk ki minden olyan egyenesnek az egyenletrendszerét, amely áthalad az origón és a három koordinátatengellyel egyenlő szöget zár be! Határozzuk meg ennek a szögnek a koszinuszát!
77. Tekintsük a következő három egyenest:

$$e: \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} = z, \quad f: \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 4 - 2t \\ z = -t \end{cases}, \quad \text{és} \quad g: \begin{cases} x = 2 - u \\ y = -1 + 3u \\ z = -3 + 2u \end{cases}.$$

Írjuk fel minden olyan egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmege az  $A(1, 2, -1)$  ponton és egyenlő szöget zár be az adott egyenesekkel! Számítsuk ki a szög koszinuszát is!

78. Határozzuk meg az  $x - 3y + 2z - 2 = 0$  és a  $2x + y + 3z - 5 = 0$  egyenletű síkok szögfelező síkjainak egyenleteit!



79. Az  $e$  egyenes egyenletrendszere:  $x = -2 + 2t$ ,  $y = 3 + 2t$ ,  $z = 1 + t$ . Az egyenes  $A(-2, 3, 1)$  pontjából mérjük fel egy 6 egységnyi szakaszt az egyenesre. Számítsuk ki a szakasz másik végpontjának koordinátáit!
80. Határozzuk meg a  $z$  tengelyen azt a pontot, amely egyenlő távolságra van a  $12x + 9y - 20z + 19 = 0$  és  $16x - 12y + 15z - 9 = 0$  egyenletű síkoktól!
81. Adjunk meg a  $z$  tengelyen olyan pontot, amelynek az  $M(1, -2, 0)$  ponttól mért távolsága egyenlő a  $3x - 2y + 6z - 9 = 0$  egyenletű síktól mért távolságával!
82. Határozzuk meg az  $x + y + z - 2 = 0$  és az  $x + 2y - z - 1 = 0$  egyenletű síkok metszésvonalán azt a pontot, amely egyenlő távol van az  $x + 2y + z + 1 = 0$  és az  $x + 2y + z - 3 = 0$  egyenletű síkoktól!
83. Határozzuk meg az alábbiakban adott  $P$  pont távolságát az  $e$  egyenestől!
- a)  $P(-2, 3, 7)$ ;  $e: \frac{x-1}{3} = 2 - y, z = 2$ ,
- b)  $P(-1, 2, 1)$ ;  $e: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 12 - t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ ,
- c)  $P(2, 2, 1)$ ;  $e: \frac{9-x}{4} = \frac{y+2}{2} = z + 5$ ,
- d)  $P(3, 1, 2)$ ;  $e: \text{az } A(0, 2, 1) \text{ és } B(1, -1, 3) \text{ ponton áthaladó egyenes,}$   
 e)  $P(-2, 4, 1)$ ;  $e: \text{az } A(-1, 4, 1) \text{ ponton és az origón áthaladó egyenes.}$
84. Igazoljuk, hogy a következő feladatokban adott két-két egyenes kitérő, és számítsuk ki távolságukat!
- a)  $e: x + 4 = 8 - 2y = -z - 1$ ,  $f: \begin{cases} x = 4t - 5 \\ y = -3t + 5 \\ z = -5t + 5 \end{cases}$ ,
- b)  $e: \frac{2x-1}{2} = \frac{3-y}{3} = \frac{5z-6}{4}$ ,  $f: x = y = z$ ,
- c)  $e: \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = t \\ z = 4t + 9 \end{cases}$ ,  $f: \begin{cases} x = 4 - u \\ y = -3 + u \\ z = 4 - 4u \end{cases}$ .
85. Határozzuk meg az alábbi kitérő egyenespárok távolságát és normáltranszverzálisuk egyenletrendszerét!
- a)  $e: x = 1 - 3t, y = -4 + 4t, z = 1 + t$   $f: x - 4 = -y - 2 = -z + 2$ .
- b)  $e: x = t + 3, y = 3t + 2, z = 3$ ,  $f: x + 3 = \frac{y-4}{4} = \frac{4-z}{2}$ .
- c)  $e: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 + t \\ z = 0 \end{cases}$ ,  $f: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-6}{2}$ .
- d)  $e: \frac{x-1}{5} = 2 - y = z - 1$ ,  $f: 2 - x = y - 5 = z + 1$ .

5. Analitikus térgeometria — Vegyes feladatok

86. Legyen  $\mathcal{H}$  azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek egyenlő távolságra vannak a következő három ponttól:  $P_1(2, 2, 1)$ ,  $P_2(8, 6, 2)$ ,  $P_3(6, 3, 5)$ . Írjuk fel a  $\mathcal{H}$  geometriai alakzat egyenletét vagy egyenletrendszerét!
- 87<sup>▷</sup> Vannak-e olyan síkok, amelyek az  $x = 1$ ,  $y = 3 + 3t$ ,  $z = 4 + 4t$  egyenletrendszerű  $e$  egyenesre illeszkednek és egységnyi távolságra vannak a  $P(2, 1, 3)$  ponttól? Ha vannak, akkor adjuk meg egyenleteiket, és számítsuk ki hajlásszögük koszinuszát!
- 88<sup>▷</sup> Egy háromszög csúcsai:  $P_1(1, 1, 1)$ ,  $P_2(2, 2, 2)$ ,  $P_3(-1, 2, 0)$ . Határozzuk meg annak az  $S$  síknak az egyenletét, amely a következő két feltételt teljesíti:
- 1)  $S$  illeszkedik az  $x$  tengelyre;
  - 2) A háromszög  $S$ -re eső merőleges vetületének területe az  $P_1P_2P_3$  háromszög területének fele!
- Számítsuk ki továbbá a háromszög  $P_1$  és  $P_2$  csúcsainak  $S$ -től mért távolságait!
89. Állapítsuk meg, hogy a  $t$  paraméter mely értékeinél nem lesz kollineáris az  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(4, 5, 6)$ ,  $C(7, 8, t)$  ponthármas, és minden ilyen  $t$ -re adjuk meg az  $x + y + z - 7 = 0$ ,  $2x - 3y - z + 3 = 0$  és  $x - y + z - 5 = 0$  egyenletű síkok közös  $K$  pontjának az  $ABC$  síktól mért távolságát (a  $t$  paraméter függvényében)!
- 90<sup>▷</sup> Vannak-e olyan egyenesek, amelyek átmennek a  $P(-1, 0, 2)$  ponton, merőlegesek az  $x = 10 + 3t$ ,  $y = -1 - 6t$ ,  $z = 7 + 2t$  egyenletrendszerű egyenesre és attól 7 egység távolságra vannak? Ha léteznek ilyenek, akkor adjuk meg egyenletrendszerüket!

Vegyes feladatok

91. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmege a  $P(2, 1, 2)$  ponton, párhuzamos az  $x + z = 5$  egyenletű síkkal és metszi az  $x = 2 - t$ ,  $y = 2t$ ,  $z = 3$  egyenletrendszerű egyenest.
92. Az  $ABCD$  tetréder térfogata  $\frac{3}{2}$  egység. Három csúcsa:  $A(1, 2, 1)$ ,  $B(4, 3, -3)$ ,  $C(-1, 2, -4)$ . A  $D$  csúcs az  $x = y = 2 - 2z$  egyenletrendszerű egyenesen van. Számítsuk ki az  $ABC$  lap  $B$  csúcsánál lévő szög koszinuszát, valamint a  $D$  csúcs koordinátáit!
93. Egy szabályos háromszög egyik csúcsa az  $A(1, 1, 1)$  pont. A  $B$  és a  $C$  csúcsa az  $x + y + z = 1$  és  $2x - y - z = 0$  egyenletű síkok metszésvonalán van. Határozzuk meg a  $B$  és a  $C$  csúcs koordinátáit!
94. Számítsuk ki az  $ABCD$  tetraéder  $C$  és  $D$  csúcsainak koordinátáit, ha a következő feltételek mindegyike teljesül:
- a) az  $ABC$  lap az  $xy$  tengelysíkon fekvő szabályos háromszög,
  - b)  $A(1, 3\sqrt{3}, 0)$ ,  $B(5, \sqrt{3}, 0)$ ,
  - c) a tetraéder térfogata  $28/\sqrt{3}$  egység,
  - d) a  $D$  csúcs az  $x = 2$ ,  $y = t$ ,  $z = 6 - 2t$  egyenletrendszerű egyenesen van.
- Hány ilyen tetraéder van?

5. Analitikus térgeometria — Vegyes feladatok

95. Adva van az  $e: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{r}$  egyenes és az  $S: x + 3y - 2z = 0$  sík, ahol  $r$  paraméter.

a) Állapítsuk meg az  $r$  értékét úgy, hogy az  $e$  egyenes párhuzamos legyen az  $S$  síkkal, és ehhez az  $r$ -hez számítsuk ki az  $e$  és  $S$  távolságát!

b) Állapítsuk meg az  $r$  értékét úgy, hogy  $e$  merőleges legyen  $S$ -re!

96. Tükrözzük az  $P(1, -1, 3)$  pontot a  $Q(-1, 3, 2)$  ponton, az  $x = -\frac{y+1}{2} = -z$  egyenesen és a  $2x - y + 3z - 2 = 0$  egyenletű síkon. Számítsuk ki a  $P$  pont és a három tükörkép által meghatározott sík távolságát!

97. Vegyük fel az  $e: x = 2t + 1, y = 2t, z = t$  egyenletrendszerű egyenesen azt az  $A$ , az  $f: \frac{x-3}{6} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{3}$  egyenesen pedig azt a  $C$  pontot, amelynek  $z$ -koordinátája 2. Az  $e$  egyenesre az  $A$  pontból mérjük fel egy 3 egység hosszúságú  $AB$ , az  $f$  egyenesre pedig a  $C$  pontból egy 7 egység hosszúságú  $CD$  szakaszt. Számítsuk ki az így kapott négy tetraéder térfogatát!

98. Létezik-e olyan szakasz, amelynek merőleges vetülete

az  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = -\frac{z}{6}$  egyenletrendszerű egyenesen 2 egység,

az  $x = \frac{y-1}{4} = \frac{1-z}{8}$  egyenletrendszerű egyenesen 3 egység,

az  $\frac{1-2x}{2} = \frac{y}{8} = \frac{z+1}{4}$  egyenletrendszerű egyenesen pedig 1 egység?

Ha létezik, akkor határozzuk meg a hosszát!

99. Adjuk meg annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az

$$\frac{1-x}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{5-z}{4}$$

egyenletrendszerű egyenesre, és a  $P(3, -1, 1)$  ponttól olyan távolságra van, mint amennyi az adott egyenes és a  $P$  pont távolsága!

100. Tekintsük a következő két egyenespárt:

$$e: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - 4t \\ z = 5 + 3t \end{cases}, \quad f: x - 3 = -y - 2 = z - 3;$$

$$g: x - 2 = y - 2 = \frac{z + 5}{2}, \quad h: \frac{x - 1}{3} = y - 1 = \frac{z}{3}.$$

Mutassuk ki, hogy mind a két egyenespár kitérő! Messe az  $e$ , illetve  $f$  egyenest a normáltranszverzálisuk a  $E$ , illetve a  $F$  pontban. Hasonlóan, legyen  $G$ , illetve  $H$  a  $g$ , illetve a  $h$  egyenesek és normáltranszverzálisuk metszéspontja. Számítsuk ki az  $E, F, G$  és  $H$  pontok koordinátáit és a két normáltranszverzális szögének koszinuszát!

101. Bontsuk fel a  $v = [10, 6, -8]$  vektort az

$$e: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}t \end{cases}, \quad f: 2x = \frac{1-y}{5} = \frac{1+z}{2} \quad \text{és} \quad g: \begin{cases} x = -\frac{3+3u}{2} \\ y = -5 + 4u \\ z = -u \end{cases}$$

egyenletrendszerű egyenesekkel párhuzamos összetevőkre, ha lehetséges.

- 102<sup>▷</sup> Adjuk meg azoknak a síkoknak az egyenleteit (ha léteznek ilyen síkok), amelyek tartalmazzák a  $P(3, -2, -2)$  és  $Q(-2, 3, -2)$  pontokat, továbbá az  $x = 0$ ,  $y = 0$  és az  $x + y - 1 = 0$  egyenletű síkok által határolt hasábot egyenlő oldalú háromszögben metszik!
- 103<sup>▷</sup> Igazoljuk, hogy az  $x + y - 2z - 4 = 0$ ,  $3x - y - 2z - 8 = 0$ ,  $x - 3y + 2z + 8 = 0$  egyenletű síkok páronkénti metszésvonalai párhuzamosak. Bizonyítsuk be, hogy a három sík által meghatározott hasábból a  $P(1, 1, 1)$  ponton áthaladó és az  $a = [1, -1, 0]$  vektorral párhuzamos síkok mindegyike egyenlőszárú háromszöget metsz ki! Vannak-e ezen síkok között olyanok, amelyek derékszögű háromszöget metszenek ki? Ha léteznek ilyenek, akkor adjuk meg ezek egyenleteit; ha nincsenek, akkor ezt mutassuk ki!
104. Léteznek-e olyan síkok, amelyek tartalmazzák a  $P(2, 1, 2)$  és  $Q(1, -1, 0)$  pontot, továbbá az  $x + y = 0$ ,  $y = 1$  és az  $x - 2y = 0$  síkok által határolt hasábot derékszögű háromszögben metszik? Ha léteznek, akkor adjuk meg ezek egyenleteit, ha nem, akkor ezt mutassuk ki!
- 105<sup>▷</sup> Egy tetraéder csúcsai:  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(-1, 1, 1)$ ,  $C(1, -1, 1)$  és  $D(1, 1, -1)$ . Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely párhuzamos a  $BCD$  síkkal és a tetraédert egyenlő térfogatú részekre osztja!
106. Bizonyítsuk be, hogy az

$$e : \begin{cases} x = x_1 + a_1 t \\ y = y_1 + b_1 t \\ z = z_1 + c_1 t \end{cases} \quad \text{és} \quad f : \begin{cases} x = x_2 + a_2 u \\ y = y_2 + b_2 u \\ z = z_2 + c_2 u \end{cases}$$

egyenletrendszerű egyenesek akkor és csak akkor egysíkúak, ha

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

107. Legyen az  $x = x_0 + at$ ,  $y = y_0 + bt$ ,  $z = z_0 + ct$  egyenletrendszerű  $e$  egyenes olyan, amely nem merőleges az  $S : Ax + By + Cz + D = 0$  egyenletű síkra. Igazoljuk, hogy az  $e$ -t tartalmazó és az  $S$ -re merőleges sík egyenlete:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

- 108<sup>▷</sup> Igazoljuk, hogy a tetraéder élfelező merőleges síkjai egy ponton mennek át!
- 109<sup>▷</sup> Két kitérő egyenesen mozogjon egy-egy adott hosszúságú szakasz. Bizonyítsuk be, hogy a két szakasz tetszőleges helyzeténél a négy végpont által meghatározott tetraéder térfogata konstans!

## 6. fejezet

# Komplex számok

### A komplex szám algebrai alakja

**D 6.1** Komplex számnak nevezünk minden olyan  $a + bi$  alakú kifejezést, amelyben  $a$  és  $b$  valós szám,  $i$  pedig az összes valós számtól különböző — **képzetes egységnek** nevezett — szimbólum. Az  $a$  illetve  $b$  valós számot a  $z = a + bi$  komplex szám **valós részének** illetve **képzetes részének** hívjuk. Jelölésük:  $a = \operatorname{Re} z$ ,  $b = \operatorname{Im} z$ . Az  $a + bi$  alakú kifejezés a komplex szám **algebrai alakja**.

**D 6.2** Algebrai alakban adott komplex számok **összeadását** és **szorzását** a többtagú algebrai kifejezések összeadási, ill. szorzási szabálya szerint végezzük, hozzátéve, hogy  $i^2 := -1$ .

**D 6.3** Az  $z = a + bi$  komplex szám **konjugáltján** az  $a - bi$  komplex számot értjük. Jele:  $\bar{z}$ .

**T 6.4** Tetszőleges  $z_1, z_2$  komplex számokra  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ,  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ .

**D 6.5** A  $z = a + bi$  komplex szám **abszolút értékén** a  $|z| = |a + bi| := \sqrt{a^2 + b^2}$  nemnegatív valós számot értjük.

**T 6.6** Bármely  $z, z_1$  és  $z_2$  komplex számra érvényesek a következő egyenlőségek:  $z\bar{z} = |z|^2$ ,  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ , és a háromszögegyenlőség:  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .

### Feladatok

1.<sup>o</sup> Ábrázoljuk a Gauss-féle számsíkon az alábbi komplex számokat és helyvektorukat:

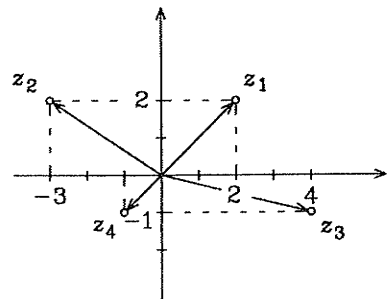
$$z_1 = 3 - i, \quad z_2 = 1 + 4i, \\ z_3 = -2 + 3i, \quad z_4 = -2 - 3i.$$

2.<sup>o</sup> Írjuk fel a mellékelt ábrán helyvektorokkal feltüntetett komplex számokat algebrai alakban:

3. Írjuk fel az alábbi komplex számok konjugáltját:  $z_1 = 2 + 7i$ ,  $z_2 = -3 - 5i$ ,  $z_3 = 5i$ ,  $z_4 = -i$ ,  $z_5 = -9$ ,  $z_6 = 0$ .

Legyen  $n > 2$  természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy

4.  $\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n$ ,



6. Komplex számok — A komplex szám algebrai alakja

5.  $\overline{z_1 z_2 \dots z_n} = \overline{z_1} \overline{z_2} \dots \overline{z_n}$ ,      6.  $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ .

Számítsuk ki az alábbi két-két komplex szám összegét és különbségét:

7.  $2 + 5i$ ,  $4 - 3i$ ,      8.  $3 - 4i$ ,  $-5 + 2i$ ,      9.  $4 - 3i$ ,  $-2 - i$ .

Számítsuk ki az alábbi két-két komplex szám szorzatát:

10.  $3 - 5i$ ,  $-4 + i$ ,      11.  $1 - 3i$ ,  $-i$ ,      12.  $2 + 5i$ ,  $4 - 3i$ .

Számítsuk ki az alábbi komplex számok hányadosát:

13<sup>†</sup>  $3 + 2i$ ,  $1 - i$ ,      14.  $5 - i$ ,  $1 - 2i$ ,      15.\*  $-5 - 2i$ ,  $-3i$ .

Hozzuk algebrai alakra az alábbi kifejezéseket:

16<sup>†</sup>  $\frac{2}{(1-i)(3+i)}$ ,      17.  $\frac{1}{(3+4i)^2}$ ,      18.  $\frac{2+i}{i(-3+4i)}$ ,  
 19.  $\frac{\sqrt{3}+i}{(1-i)(\sqrt{3}-i)}$ ,      20.  $\frac{1}{i(3-2i)(1+i)}$ ,      21.  $\frac{i}{(1-i)(1-2i)(1+2i)}$ .

22. Legyen  $z_1 = 1 - 5i$  és  $z_2 = 3 + 4i$ . Számítsuk ki a következőket:

$$\frac{z_1}{z_2}, \quad \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad \frac{z_1}{\overline{z_2}}, \quad \frac{\overline{(z_1)}}{\overline{(z_2)}}, \quad \frac{z_1}{|z_2|}, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right|.$$

23. Legyen  $z_1 = 1 + i$ ,  $z_2 = 1 - 2i$ . Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét:

$$z_1 - \frac{z_1}{z_2}, \quad \frac{z_1 - 1}{z_2}, \quad z_1^2 - \frac{iz_1}{z_2}, \quad \frac{z_1}{iz_2}.$$

Legyen  $z_1 = 2 + i$ ,  $z_2 = 3 - 2i$  és  $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . Számítsuk ki a következőket:

24.  $|3z_1 - 4z_2| + z_3 \overline{z_3}$ ,      25.  $z_1^3 - 3z_1^2 + 4z_1 - 8$ ,      26.  $\left| \frac{2z_2 + z_1 - 5 - i}{2z_1 - z_2 + 3 - i} \right|$ .

Számítsuk ki az alábbi komplex számok abszolút értékét:

27.  $\frac{(3+4i)(2+i)}{(1+2i)(4+3i)}$ ,      28.  $\frac{\sqrt{x^2+y^2} + i\sqrt{2xy}}{(x-y) + 2i\sqrt{xy}}$ ,  $x, y \in \mathbf{R}^+$ .

29.\* Határozzuk meg azokat az  $x$  és  $y$  valós számokat, amelyekre fennáll az alábbi egyenlőség:  $3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$ .

Adjuk meg a következő,  $xy$ -síkbeli görbék komplex változós egyenletét:

30.\*  $(-2; 1)$  középpontú 4 sugarú kör,      31.\*  $y = mx + b$  egyenletű egyenes,

32.  $(-3; 0)$  és  $(3; 0)$  fókuszpontú ellipszis, nagytengelyének hossza 10.

Adjuk meg a Gauss-féle számsíkon az alábbi feltételeket kielégítő pontok halmazát:

33.  $1 < |z| < 2$ ,      34.  $|z| = 2$ ,      35.\*  $|z - i| = |z + i|$ ,

36.  $|z + i| \leq 1$ ,      37<sup>†</sup>  $|2z - 4i| < 1$ ,      38<sup>†</sup>  $|z| \leq |z + i|$ ,

39.  $\left| \frac{z-3}{z+3} \right| = 2$ .

40.\* Bizonyítsuk be, hogy bármely kör vagy egyenes egyenlete a Gauss-féle számsíkon felírható  $az\overline{z} + bz + \overline{b}z + c = 0$  alakban, ahol  $a, c \in \mathbf{R}$  és  $b \in \mathbf{C}$ .

6. Komplex számok — Binomiális együtthatók binomiális tétel

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

41.  $x^2 + 2 = 0$ ,                      42.\*  $x^2 - 2x + 2 = 0$ ,                      43.  $x^2 - 6x + 13 = 0$ ,

44.  $x^2 + 8x + 17 = 0$ ,                      45.  $x^4 - x^2 - 6 = 0$ ,                      46.  $x^2 + 5 + \frac{6}{x^2} = 0$ .

47.<sup>p</sup> Oldjuk meg a  $|z| + z = 2 + i$  egyenletet!

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a komplex számok halmazán:

48.  $iz_1 - iz_2 = -2$   
 $2z_1 + z_2 = i$ ,

49.  $z_1 + z_2 = 2$   
 $z_1 - z_2 = 2i$ ,

50.  $z_1 + 2z_2 = 1 + i$   
 $3z_1 + iz_2 = 2 - 3i$ ,

51.  $(1 + i)z_1 - (1 - i)z_2 = 0$   
 $(2 + i)z_1 - (1 - 2i)z_2 = 0$ ,

52.  $(1 + 2i)z_1 + z_2 = 1 - 2i$   
 $-iz_1 - iz_2 = -2 + 3i$ ,

53.  $2z_1 - iz_2 = -3 + 4i$   
 $iz_1 + 3z_2 = -7 - 4i$ ,

54.  $iz_1 + 2z_2 = 1 - 2i$   
 $4z_1 - iz_2 = -1 + 3i$ ,

55.  $(1 + 2i)z_1 - (2 + i)z_2 = -6 - 2i$   
 $-z_1 + (2 - i)z_2 = 4 - 4i$ .

56.\* Tegyük fel, hogy a  $z$  komplex számra  $z^2 + z + 1 = 0$  teljesül. Számítsuk ki a  $z^{65} + z^{-65}$  kifejezés értékét!

## Binomiális együtthatók, binomiális tétel

**D 6.7** Legyen  $k$  és  $n$  két nemnegatív egész szám, melyekre  $k \leq n$ . Az  $\binom{n}{k}$  kifejezést az  $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$  egyenlőséggel definiáljuk és **binomiális együtthatónak** nevezzük.

**T 6.8** Minden nemnegatív egész  $n$ -re és  $k = 0, 1, \dots, n$ -re érvényes az  $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$  **szimmetriatulajdonság**, és  $k = 0, 1, \dots, (n-1)$ -re az  $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$  **additív tulajdonság**.

**T 6.9 (Binomiális tétel)** Egységelemes kommutatív gyűrű tetszőleges  $(u, v)$  elempárjára és tetszőleges nemnegatív egész  $n$  számra

$$(u + v)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{n-k} v^k.$$

## Feladatok

Az alábbiakban a hatványok binomiális tétel szerinti kifejtésében  $k$ -adik tagon ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) azt a tagot értjük, amelynek együtthatója  $\binom{n}{k}$ . Továbbá, ha  $n$  páros, akkor az (előbbi értelemben vett)  $n/2$ -edik tagot a kifejtés középső tagjának mondjuk:

57. Határozzuk meg az  $\left(\frac{a}{x} - \sqrt{x}\right)^{16}$  hatvány kifejtésének középső tagját.
58. Írjuk fel a  $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$  hatvány kifejtésének negyedik tagját!
59. A  $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$  hatvány kifejtésének hányadik tagjában lesz az  $a$  kitevője 7?
60. A  $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{3a}}\right)^{18}$  hatvány kifejtésének hányadik tagjában lesz az  $a$  és a  $b$  kitevője egyenlő egymással?
61. Írjuk fel a  $\left(9x - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^m$  kifejtésének 12. tagját, ha a második tag binomiális együtthatója 105.
62. Az  $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^m$  kifejtésében a harmadik és a tizenkettedik tag binomiális együtthatója azonos. Írjuk fel azt a tagot, amelyben  $x$  nem szerepel.
63. Az  $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^m$  kifejtésében az együtthatók összege 128. Írjuk fel a kifejtésnek azt a tagját, amelyben  $x$  az ötödik hatványon szerepel.
64. Határozzuk meg az  $n$  kitevőnek azt az értékét, amelyre az  $(a+b)^n$  kifejtésében a második, harmadik és negyedik tag együtthatója egy számtani sorozat egymást követő elemei.
65. Határozzuk meg  $x$  értékét úgy, hogy az  $(x + x^{\lg x})^5$  hatvány kifejtésében a második tag értéke  $10^6$  legyen.
66. Határozzuk meg  $x$  értékét úgy, hogy a  $\left[(\sqrt{x})^{\frac{1}{k+1}} + \sqrt[12]{x}\right]^6$  kifejtésben a harmadik tag 200 legyen.

Igazoljuk az alábbi összefüggéseket, amelyekben  $n$  tetszőleges pozitív egész,  $k$  pedig olyan egész szám, amelyre  $k \leq n$ :

67. 
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n,$$
68. 
$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0,$$



$$69^{\text{p}} \quad 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + 99 \cdot 99! = 100! - 1,$$

$$70^{\text{p}} \quad \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1},$$

$$71^{\text{p}} \quad \binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + \dots + (n+1)\binom{n}{n} = (n+2) \cdot 2^{n-1},$$

$$72^{\text{p}} \quad \binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} + 3\binom{n}{4} + \dots + (n-1)\binom{n}{n} = (n-2) \cdot 2^{n-1} + 1,$$

$$73^{\text{p}} \quad \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} + \dots + 1 = \binom{n+1}{k},$$

$$74^{\text{p}} \quad \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k},$$

$$75. \quad \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1},$$

$$76. \quad \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \dots + \binom{n+m-1}{n} = \binom{n+m}{n+1}, \text{ ha } m \in \mathbf{N}^+$$

$$77^{\text{*}} \quad 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = 2^{n-1},$$

$$78. \quad \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1},$$

$$79^{\text{*}} \quad \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n},$$

$$80^{\text{*}} \quad \binom{n}{0}^2 - \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}^2 = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ (-1)^m \binom{2m}{m}, & \text{ha } n \text{ páros,} \end{cases}$$

$$81^{\text{*}} \quad 1 - \binom{8n}{2} + \binom{8n}{4} - \binom{8n}{6} + \dots + \binom{8n}{8n} = 16^n.$$

A binomiális tétel alkalmazásával végezzük el a következő hatványozásokat:

$$82^{\text{*}} \quad (-3 + \sqrt{3}i)^4,$$

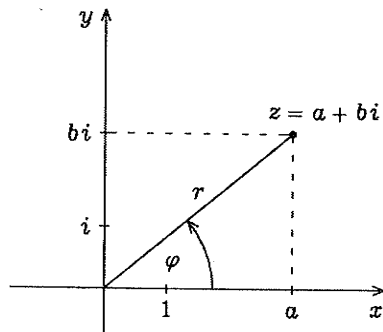
$$83. \quad (2 + 2i)^5,$$

$$84. \quad (-1 + i)^7,$$

$$85. \quad \left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)^6.$$

## A komplex szám trigonometriai alakja

**D 6.10** Vegyünk fel a síkban egy  $O$  kezdőpontú  $p$  félegyenest, és a sík minden egyes  $O$ -tól különböző  $P$  pontjához rendeljük hozzá az  $(r, \varphi)$  számpárt, ahol  $r = |\vec{OP}|$  (pólustávolság) és  $\varphi = (p, \vec{OP})$  (irányszög). Az  $O$  pontra  $r = 0$ ,  $\varphi$  tetszőleges. Az így definiált koordináta rendszert síkbeli polárkoordináta rendszernek nevezzük.



**T 6.11** Derékszögű koordináta-rendszerben adott  $(x, y)$  pont  $(r, \varphi)$  polárkoordinátáit az

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

egyenletek felhasználásával, a polárkoordináta-rendszerben adott  $(r, \varphi)$  pont  $(x, y)$  derékszögű koordinátáit az

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

egyenletek felhasználásával számítjuk ki. (Az  $r = r(\varphi)$  egyenletű geometriai alakzat egyenletében az irányszöveget mindig radiánban mérjük.)

**D 6.12** Ha a  $z = x + yi$  komplex számban  $x$ -et és  $y$ -t az előző egyenletek szerint helyettesítjük, akkor a komplex szám  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  **trigonometriai alakját** kapjuk.

**T 6.13** Legyen  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  és  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ . Ekkor

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

**T 6.14** Tetszőleges komplex számra és tetszőleges egész  $n$ -re

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

**D 6.15** A  $z$  komplex szám **komplex  $n$ -edik gyökein** az  $w^n = z$  ( $u, z \in \mathbf{C}; n \in \mathbf{N}^+$ ) egyenlet összes komplex  $w$  megoldását értjük.

**T 6.16** Bármely, zérustól különböző komplex számnak  $n$  darab különböző komplex  $n$ -edik gyöke van, ha  $n$  pozitív egész, és a  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  ( $r \geq 0$ ) komplex szám összes különböző komplex  $n$ -edik gyökét megadja a következő képlet:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

ahol  $\sqrt[n]{r}$  a valós  $r$  szám valós  $n$ -edik gyökét jelenti. A 0 komplex szám egyetlen  $n$ -edik gyöke 0.

## Feladatok

Számítsuk ki az alábbi  $z$  komplex számok valós részét ( $\operatorname{Re} z$ ), képzetes részét ( $\operatorname{Im} z$ ), abszolút értékét ( $r$ ), és radiánban mért legkisebb nemnegatív argumentumát ( $\varphi_0$ ):

86.  $z = 3,$

87.  $z = -8,$

88.  $z = -2i,$

89.  $z = 1 + i,$

90.  $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$

91.\*  $z = 2 - 2\sqrt{3}i,$

92.  $z = 4\sqrt{3} - 4i.$

Állapítsuk meg, hogy a Gauss-féle számsík mely pontjai tesznek eleget az alábbi egyenleteknek, ill. egyenlőtlenségeknek ( $\arg z$  a  $z$  egyik argumentumát jelenti):

93.†  $\operatorname{Im}(z + i) > 2,$

94.  $\operatorname{Im}(iz) \geq 1,$

95.  $\operatorname{Re} z = 1,$

96.  $\operatorname{Re}(2z) < 4,$

97.  $\frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{\pi}{2},$

98.†  $0 < \arg[(1+i)z] < \pi.$

Írjuk át az alábbi komplex számokat trigonometriai alakba:

99.  $3i,$

100.  $\sqrt{3} - 3i,$

101.\*  $-4,$

102.  $5 + 5i,$

103.  $-6 + 6\sqrt{3}i,$

104.  $-3 - 3i,$

105.\*  $-i,$

106.\*  $2\sqrt{3} - 2i.$

Írjuk át algebrai alakba az alábbi komplex számokat:

107.\*  $5 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right),$

108.  $3 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right),$

109.  $2 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right),$

110.  $3 \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right),$

111.  $2 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right),$

112.  $2\sqrt{3} \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right).$

Írjuk át az alábbi, polárkoordinátában megadott görbék egyenletét derékszögű koordinátás alakba. Állapítsuk meg a görbe típusát és meghatározó adatait. A feladatokban  $a$  és  $b$  pozitív konstansok.

113.\*  $r = a,$

114.\*  $r = 2a \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi < \pi,$

115.\*  $r = 2a \cos \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2},$

116.†  $r = \frac{2}{\cos \varphi}, \quad \left( -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \right),$

117.  $r = \frac{a}{\sin \varphi}, \quad 0 < \varphi < \pi,$

118.†  $r = \frac{1}{1 + \cos \varphi},$

119.  $r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi},$

120.  $r = \frac{1}{1 - \cos \varphi},$

121.  $r = \frac{a}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}},$

122.  $r = \frac{1}{1 - \sin \varphi},$

123.  $r = \frac{16}{5 - 3 \cos \varphi},$

124.  $r = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \cos \varphi},$

125.†  $r = \frac{16}{3 - 5 \cos \varphi},$

126.†  $r = \sqrt{a^2 \cos 2\varphi}.$

6. Komplex számok — A komplex szám trigonometriai alakja

Számítsuk ki az alábbi két-két komplex szám szorzatát:

127.  $3(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$ ,  $2(\cos 305^\circ + i \sin 305^\circ)$ ,  
 128.  $2\sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$ ,  $3(\cos 175^\circ + i \sin 175^\circ)$ ,  
 129.  $2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$ ,  $i$ ,  
 130.  $2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ .

Írjuk fel a következő számok trigonometriai alakját:

131.  $\cos \varphi - i \sin \varphi$ ,      132.  $-\cos \varphi + i \sin \varphi$ ,      133.  $-\cos \varphi - i \sin \varphi$ .

Az alábbi sokszögeknek komplex számokkal megadjuk néhány csúcsát. Határozzuk meg a sokszögek hiányzó csúcsait:

134.  $z_1 = 1 + 4i$ ,  $z_2 = 5 + i$  csúcspontú szabályos háromszög,  
 135.  $z_1 = -4 + i$  és  $z_2 = 3 - 3i$  csúcspontú négyzet,  
 136.  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1 - 2i$  és  $z_3 = 2 + 3i$  csúcspontú paralelogramma,  
 137.  $O$  középpontú és  $z_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$  csúcspontú szabályos hatszög,  
 138.  $i$  középpontú és  $z_1 = 3 - 4i$  csúcspontú szabályos ötszög.

Számítsuk ki az alábbi  $z_1$ ,  $z_2$  komplex számok  $\frac{z_1}{z_2}$  hányadosát:

139.  $z_1 = 2\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)$ ,  $z_2 = 3(\cos 122^\circ + i \sin 122^\circ)$ ,  
 140.  $z_1 = 3(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$ ,  $z_2 = 4(\cos 13^\circ + i \sin 13^\circ)$ ,  
 141.  $z_1 = 3(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$ ,  $z_2 = 3 - i\sqrt{3}$ ,  
 142.  $z_1 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ$ ,  $z_2 = -4 + i\sqrt{3}$ .

Írjuk fel algebrai alakban az alábbi hatványokat:

143.  $(1 + i)^{12}$ ,      144.  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{-6}$ ,      145.  $(\sqrt{3} + i)^7$ ,  
 146.  $(1 - i\sqrt{3})^{-10}$ ,      147.  $(1 - i)^{-3}$ ,      148.  $(-2\sqrt{3} + 2i)^{-9}$

Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket trigonometriai alakkkal és binomiális tétellel számolva:

149.  $(1 + \sqrt{3}i)^4$ ,      150.  $(1 + i)^4 (1 - \sqrt{3}i)^6$ ,      151.  $(\sqrt{3} + i)^5$ ,

Határozzuk meg az alábbi  $z$  komplex számok összes komplex  $n$ -edik gyökét:

152.  $z = 1$ ,  $n = 3$ ,      153.  $z = -1$ ,  $n = 3$ ,      154.  $z = 1$ ,  $n = 4$ ,  
 155.  $z = 1$ ,  $n = 6$ ,      156.  $z = -8i$ ,  $n = 3$ ,      157.  $z = i$ ,  $n = 2$ ,  
 158.  $z = -243i$ ,  $n = 5$ ,      159.  $z = -1$ ,  $n = 7$ ,      160.  $z = -2 + 2i$ ,  $n = 3$ ,  
 161.  $z = 3 + 4i$ ,  $n = 2$ ,      162.  $z = -7 + 24i$ ,  $n = 2$ .

163. Mutassuk meg, hogy ha  $c$ ,  $z$  tetszőleges komplex számok, akkor  $\sqrt[n]{c^n z} = c \sqrt[n]{z}$ , ahol a gyökkvonás a komplex gyökkvonást jelenti. Speciálisan  $\sqrt{c^2 z} = c \sqrt{z}$ .

164.<sup>†</sup> Bizonyítsuk be, hogy az  $az^2 + bz + c = 0$  egyenlet gyökeit megkaphatjuk a

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

formulával, ha a gyökkvonás a komplex négyzetgyökkvonást jelenti.

Határozzuk meg az alábbi egyenlet gyökeit a komplex számok halmazában. Ha a diszkrimináns nem valós, akkor használjuk az előző feladat eredményét:

165.\*  $z^2 - 2iz - 5 = 0$ ,                      166.  $z^2 - (2 + 3i)z - 1 + 3i = 0$ ,

167.  $z^2 + (5 - 2i)z + 5(1 - i) = 0$ ,      168.  $z^2 + (1 - 2i)z - 2i = 0$ .

### Vegyes feladatok

Bizonyítsuk be a  $(\cos x + i \sin x)^5$  kifejezés kétféle kiszámításával következő azonosságokat:

169.<sup>†</sup>  $\cos 5x = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x$ ,

170.  $\frac{\sin 5x}{\sin x} = 16 \cos^4 x - 12 \cos^2 x + 1$ ,  $x \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

171.<sup>†</sup> Számítsuk ki  $-15 - 8i$  négyzetgyökeinek pontos értékét!

172.\* Szerkesszük meg a Gauss-féle számsíkon a  $z_1, z_2$  és az 1 komplex számokhoz tartozó helyvektorok segítségével a  $z_1 z_2$  komplex számhoz tartozó helyvektort!

173.\* Oldjuk meg a  $\bar{z} = z^n$  ( $n \in \mathbf{N}^+$ ) egyenletet!

174.\* Számítsuk ki az  $e_0^j + e_1^j + \dots + e_n^j$  ( $j \in \mathbf{Z}$ ) összeget, ahol  $e_0, e_1, \dots, e_n$  az  $(n + 1)$ -edik egységgyökök.

175.\* Számítsuk ki az  $1 + 2e + 3e^2 + \dots + (n + 1)e^n$  összeget, ahol  $e$  tetszőleges  $(n + 1)$ -edik egységgyök.

176.\* Bizonyítsuk be, hogy ha a  $z$  komplex számra  $|z| < \frac{1}{2}$  teljesül, akkor  $|(1 + i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}$ .

Mutassuk meg, hogy minden  $n$  egész számra érvényesek az alábbi egyenlőségek:

177.  $(1 + i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left( \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$ ,    178.  $(\sqrt{3} - i)^n = 2^n \left( \cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6} \right)$ .

Határozzuk meg az alábbi összegeket:

179.\*  $1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots$ ,      180.\*  $\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \dots$ .

Mutassuk meg, hogy:

181.\*  $\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$ ,

182.\*  $\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = -\frac{1}{2}$ ,

183.\*  $\cos \frac{\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} + \cos \frac{5\pi}{13} + \cos \frac{7\pi}{13} + \cos \frac{9\pi}{13} + \cos \frac{11\pi}{13} = \frac{1}{2}$ .

## 7. fejezet

### Sorozatok

#### A sorozat fogalma

**D 7.1** Sorozaton olyan függvényt értünk, amelynek értelmezési tartománya a nemnegatív egész számok halmaza vagy annak valamely valódi végtelen részhalmaza. Az  $n$  nemnegatív számhoz rendelt elemet a sorozat  $n$ -edik elemének nevezzük.

Ebben a fejezetben értelmezési tartományként legtöbbször a pozitív egész számok halmazát ( $\mathbf{N}^+$ ) tekintjük, azaz általában  $[a_n]$  az  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  sorozatot jelöli. (Ézért a feladatoknál csak akkor adjuk meg az értelmezési tartományt, ha ettől eltérünk.)

**D 7.2** Ha megadjuk a sorozat első néhány elemét s azt a szabályt, ahogyan az  $n$ -edik elemet az előzőekből megkaphatjuk, akkor azt mondjuk, hogy a sorozatot **rekurzív definícióval** adjuk meg. Szokás ebben az esetben **rekurzív sorozatról** beszélni.

**D 7.3** Ha  $[a_n] \subseteq \mathbf{R}$ , akkor **valós számsorozatról**, ha pedig  $[a_n] \subseteq \mathbf{C}$ , akkor **komplex számsorozatról** beszélünk. Ha minden egyes  $n$  nemnegatív (illetve pozitív) egész számhoz a síknak vagy a térnek egy-egy  $P_n$  pontját rendeljük, akkor **pontsorozatot** ( $[P_n]$ ) kapunk. Hasonlóan beszélhetünk **vektorsorozatról** vagy **függvénysorozatról** is. Ebben a fejezetben  $i$  mindig a képzetes egységet jelenti.

#### Feladatok

Írjuk fel a következő sorozatok első öt elemét:

1.  $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ ,
2.  $a_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n}$ ,
3.  $a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n-3}$ ,
4.  $a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$ ,
5.  $a_n = 1 + 3 + \dots + (2n-1)$ ,
6.  $a_n = n + (n+1) + \dots + 2n$ ,
7.  $a_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k 2k$ ,
8.  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(k-1)!}$ ,
9.  $a_n = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^k j \right)$ ,
10.  $a_n = \left( \frac{i-1}{i+1} \right)^n \quad n \in \mathbf{N}$ ,
11.  $a_n = \frac{(i-1)^{3n}}{2^n} \quad n \in \mathbf{N}$ .



**D 7.6** Legyen  $M$  metrikus tér a  $d$  távolságfüggvénnyel. Az  $M$  valamely nemüres  $H$  részhalmazát **korlátosnak** mondjuk, ha van olyan  $O \in M$  és van olyan  $v \in \mathbf{R}$ , hogy a  $d(O, P) \leq v$  egyenlőtlenség a  $H$  minden  $P$  elemére teljesül.  $v$ -t a  $H$  halmaz egy **korlátjának** nevezzük.

**D 7.7** A  $H$  valós számhalmazt **felülről (alulról) korlátosnak** nevezzük, ha van olyan  $v$  valós szám, hogy a  $H$  minden  $x$  elemére  $x \leq v$  ( $x \geq v$ ) teljesül, és bármely ilyen tulajdonságú  $v$  számot a  $H$  **felső (alsó) korlátjának** nevezzünk.

**T 7.8** Felülről korlátos  $H$  halmaznak van legkisebb felső korlátja (**szupréruma**), alulról korlátos  $H$  halmaznak van legnagyobb alsó korlátja (**infimuma**). (Jelölés:  $\sup H, \inf H$ .)

**T 7.9** Valós számhalmaz akkor és csak akkor korlátos, ha alulról és felülről is korlátos.

**T 7.10** Az  $\mathbf{R}^k$  metrikus tér valamely ponthalmaza akkor és csak akkor korlátos, ha a halmaz elemeinek koordinátáiból alkotott számhalmaz korlátos.

**D 7.11** Az  $M$  metrikus tér  $A$  pontjának  $\delta$  sugarú környezetén (ill. teljes környezetén) azoknak az  $M$ -beli  $X$  pontoknak a halmazát értjük, amelyek eleget tesznek a  $0 < d(X, A) < \delta$  (ill.  $d(X, A) < \delta$ ) egyenlőtlenségnek, amelyben  $\delta$  adott pozitív valós szám.

**D 7.12** Legyen  $H$  az  $M$  metrikus tér tetszőleges részhalmaza. Ha az  $M$ -beli  $P$  pontnak van olyan teljes környezete, amelynek minden pontja  $H$ -hoz tartozik, akkor azt mondjuk, hogy  $P$  a  $H$  **belső pontja**. Ha  $P$ -nek van olyan teljes környezete, amelynek metszete  $H$ -val üres, akkor  $P$ -t  $H$  **külső pontjának** nevezzük. Végül, ha  $P$  bármely teljes környezete tartalmaz  $H$ -beli pontot is, de  $H$ -n kívüli pontot is, akkor azt mondjuk, hogy  $P$  a  $H$  **határpontja**. A  $H$  halmazt **zárt**nak hívjuk, ha minden határpontját tartalmazza, és **nyílt**nek, ha egyetlen határpontját sem tartalmazza. Például minden  $[a, b]$  zárt ( $(a, b)$  nyílt) intervallum az  $\mathbf{R}$  metrikus tér zárt (nyílt) részhalmaza, ha  $a, b \in \mathbf{R}$ . (A  $(-\infty, \infty)$  intervallumnak és az üres halmaznak nincs határpontja, így ezek zártak és nyíltak is tekinthetők.)

### Feladatok

- 34.\*** Mutassuk meg, hogy a komplex számok  $\mathbf{C}$  halmaza a  $d(u, v) = |u - v|$  ( $u, v \in \mathbf{C}$ ) távolságfüggvénnyel metrikus teret alkot.
- 35.\*** Legyen  $M = \{i, j, k\}$  és  $d(a, b) = |a \times b|$  ( $a, b \in M$ ). Bizonyítsuk be, hogy  $M$  a  $d$  távolságfüggvénnyel metrikus teret alkot.
- 36.\*** Mutassuk meg, hogy a közönséges háromdimenziós tér valamely  $H$  ponthalmaza akkor és csak akkor korlátos, ha a  $H$  minden pontja egy  $O$  (origó) középpontú gömb belsejébe esik. A komplex számok  $\mathbf{C}$  metrikus terének valamely  $H$  részhalmaza akkor és csak akkor korlátos, ha van olyan  $v$  valós szám, hogy a  $H$  minden  $z$  elemére  $|z| \leq v$ .
- 37.\*** Mutassuk meg, hogy komplanáris egységvektorok halmaza a vektori szorzat abszolút értékével metrikus teret alkot, ha a kollineáris vektorokat egyenlőknek tekintjük.
- 38.\*** Bizonyítsuk be, hogy az  $\mathbf{R}^2$  halmaz metrikus teret alkot a

$$d(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| \quad (A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2))$$

metrikával. Ábrázoljuk az  $(1, 0)$  pont 1 sugarú (teljes) környezetét.



39. Bizonyítsuk be, hogy az  $\mathbb{R}^2$  halmaz metrikus teret alkot a

$$d(A, B) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\} \quad (A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2))$$

metrikával. Adjuk meg az  $(1, -1)$  ponttól 1 távolságra lévő pontok halmazát.

40<sup>o</sup> Legyen  $A$  a valós számok egy alulról korlátos nemüres halmaza. Igazoljuk, hogy ha  $B = \{-x; x \in A\}$ , akkor  $\inf A = -\sup B$ .

41<sup>\*</sup> Felhasználva a Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenséget (l. 1.85 feladatot), bizonyítsuk be a T 7.5 tételt.

42<sup>o</sup> Legyen  $X$  tetszőleges végtelen halmaz. Bármely  $p \in X$  és  $q \in X$  esetén legyen

$$d(p, q) = \begin{cases} 1, & \text{ha } p \neq q; \\ 0, & \text{ha } p = q. \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy  $X$  a  $d$  metrikával metrikus teret alkot.

43<sup>o</sup> Adjuk meg az előző feladatbeli metrikus tér nyílt és zárt részhalmazait.

Döntsük el, hogy a következő  $d$  függvények metrikák-e  $\mathbb{R}$ -en:

$$\begin{aligned} 44<sup>o</sup> \quad d(x, y) &= (x - y)^2, & 45<sup>o</sup> \quad d(x, y) &= \sqrt{|x - y|}, \\ 46. \quad d(x, y) &= |x^2 - y^2|, & 47. \quad d(x, y) &= \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}. \end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatokat korlátosság szempontjából:

$$\begin{aligned} 48<sup>o</sup> \quad P_n &\left(\frac{n+1}{n}, n\right), & 49<sup>o</sup> \quad P_n &\left(\frac{3n+1}{2n}, \frac{n-1}{n}\right), \\ 50. \quad P_n &\left(\frac{n^2}{n^2+1}, \frac{n-1}{n}\right), & 51. \quad P_n &(\sin n, \cos n, \frac{1}{n}), \\ 52<sup>o</sup> \quad z_n &= \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n, & 53<sup>o</sup> \quad z_0 &= 1, z_n = (1+i)z_{n-1}, \\ 54. \quad v_n &= \frac{n-1}{n}i + \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}j, & 55<sup>o</sup> \quad v_n &= \frac{n^2-1}{n^2+n+1}i + j + \frac{\sin n}{n}k. \end{aligned}$$

## Sorozat határértéke; konvergencia és divergencia

**D 7.13** Metrikus térbeli pontsorozat **határértékének** a tér olyan pontját nevezzük, amelynek bármely teljes környezetén kívül a sorozatnak legfeljebb véges sok eleme van. (Jelölés:  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$  vagy  $A_n \rightarrow A$ .) Ez azt jelenti, hogy az  $M$  metrikus tér  $\{A_n\}$  pontsorozatának határértéke az  $M$ -beli  $A$  pont, ha bármely  $\varepsilon$  pozitív valós számhoz van olyan  $n_0$  valós szám, hogy ha  $n > n_0$ , akkor  $d(A_n, A) < \varepsilon$ . Az ilyen  $n_0$ -t az  $\varepsilon$ -hoz tartozó **küszöbszámmak** nevezzük.

Speciálisan az  $a$  számot az  $\{a_n\}$  számsorozat határértékének mondjuk, ha bármely  $\varepsilon$  pozitív valós számhoz van olyan  $n_0$  valós szám, hogy ha  $n > n_0$ , akkor  $|a_n - a| < \varepsilon$ . A vektorsorozat határértéke hasonlóan definiálható.

Egy sorozatot **konvergensnek** mondunk, ha van határértéke, s **divergensnek**, ha nincs.

7. Sorozatok — Sorozat határértéke; konvergencia és divergencia

**D 7.14** Sorozat részsorozatát azokat a sorozatokat értjük, amelyek a sorozatból véges vagy végtelen sok elem elhagyásával állíthatók elő és a megtartott elemeket eredeti sorrendjükben vesszük figyelembe.

**T 7.15** Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens, s határértéke ugyanaz, mint az eredeti sorozaté.

**D 7.16** Legyen  $[A_n]$  az  $M$  metrikus tér egy pontsorozata. Az  $[A_n]$  sorozat **torlódási helyének** (torlódási pontjának) nevezzük az  $M$  minden olyan pontját, amely az  $[A_n]$  valamely részsorozatának határértéke. (Ez azt jelenti, hogy konvergens sorozatnak egyetlen torlódási helye van, s ez a sorozat határértéke. Megjegyezzük, hogy az állítás megfordítása nem igaz.)

**T 7.17** (Bolzano-Weierstrass-tétel) Az  $\mathbb{R}^k$  metrikus tér minden korlátos sorozatának van konvergens részsorozata. (Minden korlátos számsorozatnak illetve vektorsorozatnak van konvergens részsorozata.)

**T 7.18** (Cauchy-féle konvergenciakritérium) Az  $\mathbb{R}^k$  metrikus tér  $[A_n]$  pontsorozata akkor és csak akkor konvergens, ha bármely  $\varepsilon$  pozitív valós számhoz megadható olyan  $n_0$  valós szám, hogy ha  $m, n > n_0$ , akkor  $d(A_m, A_n) < \varepsilon$ .

Feladatok megoldásában sokszor jobban alkalmazható a következő ekvivalens megfogalmazás: Az  $\mathbb{R}^k$  metrikus tér  $[A_n]$  pontsorozata akkor és csak akkor konvergens, ha bármely  $\varepsilon$  pozitív valós számhoz van olyan  $n_0$  valós szám, hogy ha  $n > n_0$ , akkor  $d(A_n, A_{n+p}) < \varepsilon$  minden  $p$  pozitív egész számra teljesül.

**D 7.19** A valós  $[a_n]$  számsorozatról akkor mondjuk, hogy **végtelenhez divergál**, ha bármely  $k$  pozitív valós számhoz megadható olyan  $n_0$  valós szám, hogy ha  $n > n_0$ , akkor  $a_n > k$ ; s akkor mondjuk, hogy **mínusz végtelenhez divergál**, ha bármely  $k$  negatív valós számhoz van olyan  $n_0$  valós szám, hogy  $n > n_0$  esetén  $a_n < k$ . (Jelölések:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  vagy  $a_n \rightarrow \infty$ , illetve  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  vagy  $a_n \rightarrow -\infty$ .)

**T 7.20** Végtelenhez divergáló sorozat minden részsorozata végtelenhez divergál; mínusz végtelenhez divergáló sorozat minden részsorozata mínusz végtelenhez divergál.

**Feladatok**

A konvergencia definíciója alapján bizonyítsuk be, hogy az alábbi feladatokban megadott  $[a_n]$  sorozat  $a$ -hoz konvergál, azaz minden pozitív  $\varepsilon$ -hoz adjunk meg egy  $n_0$  küszöbszámot. Hányadik elemtől ( $n_1$ ) kezdve esnek a sorozat elemei az  $a$  szám  $r$  sugarú teljes környezetébe?

- 56.\*  $a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$ ,  $a = 1$ ,  $r = 10^{-2}$ ,      57.  $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ ,  $a = 0$ ,  $r = 10^{-6}$ ,  
 58.\*  $a_n = \frac{n+2}{3n-8}$ ,  $a = \frac{1}{3}$ ,  $r = \frac{1}{900}$ ,      59.\*  $a_n = 3^{\frac{1}{n}}$ ,  $a = 1$ ,  $r = \sqrt[99]{3} - 1$ ,  
 60.\*  $a_n = \frac{4^n}{3 \cdot 4^n + 1}$ ,  $a = \frac{1}{3}$ ,  $r = \frac{1}{3}$ ,      61.\*  $a_n = \lg \frac{n+1}{n+2}$ ,  $a = 0$ ,  $r = \lg 1,002$ ,  
 62.  $a_n = \sqrt{\frac{n+4}{n}}$ ,  $a = 1$ ,  $r = 0,1$ ,      63.  $a_n = 1 + (-1)^n \frac{2}{3^n}$ ,  $a = 1$ ,  $r = \frac{2}{3^{100}}$ ,

$$64^{\circ} \quad a_n = \frac{(-1)^n + 4n}{5n + (-1)^{n-1}}, \quad a = \frac{4}{5}, \quad r = 10^{-2},$$

$$65^{\circ} \quad a_n = \frac{n}{n^3 + 1}, \quad a = 0, \quad r = 10^{-3}.$$

66.\* Bizonyítsuk be, hogy ha az  $\mathbb{R}^m$  ( $m \in \mathbb{N}^+$ ) metrikus tér valamely korlátos sorozatának egy torlódási helye van, akkor a sorozat konvergens.

67.\* A Cauchy-féle konvergenciakritériumot (T 7.18) felhasználva mutassuk meg, hogy az  $a_n = \sum_{k=1}^n k^{-1}$  sorozat divergens.

68.\* Konvergens-e az  $\{a_n\}$  sorozat, ha teljesíti a következő feltételt: Minden pozitív  $\varepsilon$  valós szám esetén van olyan  $n_0$  küszöbszám, hogy ha  $n > n_0$ , akkor  $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$ .

Bizonyítsuk be, hogy az alábbi sorozatok végtelenhez divergálnak. Milyen  $n_1$  indextől kezdve lesznek a sorozat elemei nagyobbak az adott  $k$  pozitív számuál? (Lehetőleg a legkisebb ilyen  $n_1$ -t adjuk meg.)

$$69. \quad a_n = \lg(n+1), \quad k = 10, \quad 70^{\circ} \quad a_n = \frac{n-1}{\sqrt{n+1}}, \quad k = 999,$$

$$71^{\circ} \quad a_n = \frac{n^2}{n+1}, \quad k = 20.$$

## Monoton és korlátos sorozatok, műveletek sorozatokkal

D 7.21 Az  $\{a_n\}$  valós számsorozatról azt mondjuk, hogy **monoton növekvő** (csökkenő), ha:

$$n_1 < n_2 \implies a_{n_1} \leq a_{n_2} \quad (n_1 < n_2 \implies a_{n_1} \geq a_{n_2});$$

**szigorúan monoton növekvő** (csökkenő), ha:

$$n_1 < n_2 \implies a_{n_1} < a_{n_2} \quad (n_1 < n_2 \implies a_{n_1} > a_{n_2}).$$

T 7.22 Monoton növekvő felülről korlátos sorozat konvergens, mégpedig legkisebb felső korlátjához konvergál. Monoton csökkenő alulról korlátos sorozat szintén konvergens, s a legnagyobb alsó korlátjához tart.

D 7.23 Két számsorozat (vektorsorozat) összegén, különbségén, szorzatán, hányadosán azt a sorozatot értjük, amelynek  $n$ -edik eleme a két sorozat  $n$ -edik elemének összege, különbsége, szorzata, hányadosa. (Megjegyezzük, hogy a hányadossorozat  $n$ -edik elemének akkor van értelme, ha a nevező nem 0.)

T 7.24 Korlátos számsorozatok összege, különbsége és szorzata szintén korlátos.

D 7.25 Egy számsorozatot (ill. vektorsorozatot) **nullasorozatnak** nevezünk, ha határértéke 0 (ill.  $\mathbf{0}$ ).

T 7.26 Egy számsorozat akkor és csak akkor korlátos, ha bármely nullasorozattal képezett szorzata szintén nullasorozat.

T 7.27 Ha a valós  $\{a_n\}$  számsorozatra  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1} = 0$ . Ha pedig  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  és van olyan  $m$  valós szám, hogy  $n > m$  esetén  $a_n > 0$ , akkor

7. Sorozatok — Monoton és korlátos sorozatok, műveletek sorozatokkal

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1} = \infty$ ; míg ha van olyan  $m$  valós szám, hogy  $n > m$  esetén  $a_n < 0$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1} = -\infty$ .

**T 7.28** Bármely  $[a_n + ib_n]$  komplex számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha az  $[a_n]$  és  $[b_n]$  valós számsorozatok konvergenssek.

**T 7.29** Ha az  $[a_n]$  és  $[b_n]$  (komplex vagy valós) számsorozatok konvergenssek, akkor:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^k \quad (k \in \mathbf{N}^+);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \text{ ha } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}, \text{ ha } a_n \geq 0.$$

**T 7.30** ("Rendőr-elv") Ha  $[a_n], [b_n], [c_n]$  olyan valós számsorozatok, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = h,$$

és van olyan  $n_0$  valós szám, hogy  $n > n_0$  esetén  $a_n \leq b_n \leq c_n$ , akkor a  $[b_n]$  sorozat is konvergens, és  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = h$ .

**T 7.31** Ha az  $[a_n]$  és  $[b_n]$  sorozatok konvergenssek, és van olyan  $n_0$  valós szám, hogy  $n > n_0$  esetén  $a_n \leq b_n$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

**T 7.32** Végtelenhez divergáló sorozatok összege és szorzata szintén végtelenhez divergál.

**T 7.33** Végtelenhez divergáló  $[a_n]$  sorozat és tetszőleges alulról korlátos  $[b_n]$  sorozat összege végtelenhez divergál. Ha van olyan  $n_0$  valós szám, hogy  $n > n_0$  esetén  $a_n > 0$  akkor a sorozatok szorzata is a végtelenhez divergál.

**T 7.34** (Bernoulli-egyenlőtlenség) Ha  $h > -1$ , akkor az  $(i+h)^n \geq i + nh$  egyenlőtlenség minden  $n$  nemnegatív egész számra teljesül.

**T 7.35** Ha  $q \in \mathbf{C}$  és  $|q| < 1$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ .

**T 7.36** Bármely pozitív  $q$  számra:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{q} = 1$ .

**T 7.37**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

**T 7.38** Az  $\mathbf{R}^k$  metrikus tér  $P_n(x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{kn})$  pontsorozata akkor és csak akkor konvergens, ha az elemek koordinátáiból álló  $[x_{1n}], [x_{2n}], \dots, [x_{kn}]$  számsorozatok külön-külön konvergenssek; mégpedig  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k0})$  akkor és csak akkor, ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{jn} = x_{j0}$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ).

**Feladatok**

72<sup>o</sup> Legyen  $[a_n]$  valós nullasorozat,  $n_0$  egy rögzített pozitív egész szám,  $[b_n]$  pedig olyan valós vagy komplex számsorozat, amelyre  $|b_n| \leq a_n$ , ha  $n \geq n_0$ . Bizonyítsuk be, hogy  $[b_n]$  is nullasorozat.

73<sup>o</sup> Bizonyítsuk be, hogy bármely  $z$  komplex számnra:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z^n}{n!} = 0$ .

74<sup>o</sup> Bizonyítsuk be, hogy bármely nemnegatív egész  $k$ -ra és 1-nél nagyobb  $a$ -ra:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ .

75<sup>o</sup> Mutassuk meg, hogy minden nemnegatív egész  $k$ -ra:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n!} = 0$ .

76<sup>o</sup> Bizonyítsuk be, ha  $|q| < 1$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$ .

77. Mutassuk meg, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$ .

78<sup>o</sup> Legyen  $z \in \mathbb{C}$  és  $|z| = 1$ . Bizonyítsuk be, hogy a  $[z^n]$  sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha  $z = 1$ .

Vizsgáljuk meg, hogy a következő sorozatoknak van-e határértékük vagy torlódási helyeik. Mely sorozatok divergálnak végtelenhez illetve mínusz végtelenhez?

79<sup>o</sup>  $a_n = \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi}}$ ,

80<sup>o</sup>  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1 + \frac{1}{n}}$ ,

81<sup>o</sup>  $a_n = \left(\frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n}}\right)^n$ ,

82<sup>o</sup>  $a_n = \frac{n+2}{2n} + \frac{2}{(-1)^n}$ ,

83<sup>o</sup>  $0, 1, \frac{1}{2}, 4, \frac{2}{3}, 9, \frac{3}{4}, 16, \dots$ ,

84<sup>o</sup>  $a_n = \frac{2^{n+1}}{3^n + 4^{n-1}}$ ,

85.  $a_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{2^n}$ ,

86.  $a_n = -\frac{n^3 + 1}{n^2 + 1}$ ,

87.  $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{ha } n = 3k; \\ \frac{n^2 - n}{n^2}, & \text{ha } n = 2k + 1; \\ \frac{n+1}{2n+1}, & \text{ha } n = 2k + 2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N}^+)$ ,

88<sup>o</sup>  $a_n = \begin{cases} n^2, & \text{ha } n \leq 10^5; \\ \frac{n+1}{2n+1}, & \text{ha } n > 10^5 \end{cases}$ ,

89<sup>o</sup>  $a_n = \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_{p-1} n + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_{q-1} n + b_q}$ ,  $a_j, b_k \in \mathbb{R}$ ,  
 $j = 0, 1, \dots, p$ ;  $k = 0, 1, \dots, q$ ,  $a_0 \neq 0$ ,  $b_0 \neq 0$ .

90<sup>o</sup> Vizsgáljuk meg konvergencia szempontjából a 48. — 55. feladatokban megadott sorozatokat.

Konvergensek-e az alábbi komplex számsorozatok? Ha konvergensek, akkor számítsuk ki a határértéküket. (A gyökkvonás mindentütt valós gyökkvonást jelent.)

7. Sorozatok — Monoton és korlátos sorozatok, műveletek sorozatokkal

$$91.^{\circ} z_n = \frac{n^2 - i(n^2 - 1)}{n^2 - i},$$

$$93.^{\circ} z_n = \sqrt{n+1} - i\sqrt{n},$$

$$95.^{\circ} z_n = \frac{i^n}{3^n + i^n},$$

$$97.^{\circ} z_n = (1 - i)^n,$$

$$99. z_n = \sum_{k=0}^n i^k,$$

$$101. z_n = \sum_{k=1}^n \left( \frac{i}{1+i} \right)^k,$$

$$92.^{\circ} z_n = \frac{\sqrt[3]{n^2 + n} + in}{n+1},$$

$$94.^{\circ} z_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})i,$$

$$96.^{\circ} z_n = (\sqrt{1-n^2} - in)n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$98.^{\circ} z_n = \left( \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^n,$$

$$100.^{\circ} z_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+i)^k},$$

$$102. z_n = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1-3i}{1+2i} \right)^k.$$

Vizsgáljuk meg az alábbi valós számsorozatokat monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából. Adjuk meg – ha léteznek – a sorozatok határértékét, infimumát és szuprémumát.

$$103.^{\circ} a_n = \frac{2n-1}{3n+1},$$

$$105.^{\circ} a_n = \frac{n^2+1}{n(n+1)},$$

$$107. a_n = \frac{1-5^{n+2}}{5^n},$$

$$109.^{\circ} a_n = \frac{n!}{n^2},$$

$$111.^{\circ} a_n = \frac{k^n}{n!} \quad (k \in \mathbb{N}^+),$$

$$113.^{\circ} a_n = \frac{1+2+\dots+n}{(n+1)(n+10)},$$

$$115.^{\circ} a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{5^k},$$

$$117. a_n = \frac{n^2 - 8 \cdot 4^n}{n^2 + 6 \cdot 4^n},$$

$$119.^{\circ} a_n = \frac{2^n}{3^n + 1} \sin \frac{1}{n},$$

$$104.^{\circ} a_n = \frac{5n-2}{5-10n},$$

$$106. a_n = \frac{2n^2-1}{n^2+n+1},$$

$$108.^{\circ} a_n = \frac{3n}{\sqrt{n^2+1}},$$

$$110. a_n = \begin{cases} n^2, & \text{ha } n = 2k; \\ \frac{n-1}{n}, & \text{ha } n = 2k-1, \end{cases}$$

$$112.^{\circ} a_n = 1 + (-1)^n \frac{n+1}{n},$$

$$114.^{\circ} a_n = \frac{2(-1)^n}{3\sqrt[3]{n+1}},$$

$$116. a_n = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}} \quad (n \geq 3),$$

$$118.^{\circ} a_n = \sqrt{\frac{2^n+1}{n+2^n}},$$

$$120.^{\circ} a_n = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n^2-1}-n)}.$$

Döntsük el, hogy az alábbi valós számsorozatokat konvergensek vagy divergensek. Ha konvergensek, akkor határozzuk meg a határértéküket; ha divergensek, akkor nézzük meg, divergálnak-e végtelenhez, illetve mínusz végtelenhez.

$$121.^{\circ} a_n = \frac{1000n^3 + 20n^2}{0,001n^4 + 100n^2},$$

$$122. a_n = \frac{(n-1)^3 - (n+1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2},$$

$$123.^{\circ} a_n = \frac{5}{1+(-1)^n 5n^2} - \frac{n+2}{n+3},$$

$$124.^{\circ} a_n = \left( \frac{n+1}{2n-1} \right)^5,$$

$$125.^\circ a_n = \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}},$$

$$127.^\circ a_n = \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n + 1}}{n + 1},$$

$$129.^\circ a_n = \frac{n - \sqrt[3]{n^2}}{n + \sqrt{n^2 + 1}},$$

$$131.^\circ a_n = \frac{\sqrt{n^3 + 3n^2} + \sqrt[3]{n^4 + 1}}{\sqrt[4]{5n^6 + 2} + \sqrt[5]{n^7 + 3n^3}},$$

$$133.^\circ a_n = \frac{(\sqrt{n^2 + 1} + n)^2}{\sqrt[3]{n^6 + 1}},$$

$$135.^\circ a_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(5n-1)^5},$$

$$136.^\circ a_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2},$$

$$138.^\circ a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2},$$

$$140.^\circ a_n = \frac{1}{n} \left( \left( a + \frac{1}{n} \right)^2 + \left( a + \frac{2}{n} \right)^2 + \dots + \left( a + \frac{n-1}{n} \right)^2 \right), \quad a \in \mathbb{R},$$

$$141.^\circ a_n = \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{1 + b + b^2 + \dots + b^n}, \quad |a|, |b| < 1,$$

$$142.^\circ a_n = \frac{(2+n)^{100} - n^{100} - 200n^{99}}{n^{98} - 10n^2 + 1}, \quad 143.^\circ a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)},$$

$$144.^\circ a_n = \sqrt{2} \sqrt[4]{2} \sqrt[8]{2} \dots \sqrt[2^n]{2},$$

$$145.^\circ a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} \right),$$

$$146.^\circ a_n = n^2(n - \sqrt{n^2 + 1}),$$

$$147.^\circ a_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1},$$

$$148.^\circ a_n = \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n,$$

$$149.^\circ a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n},$$

$$150.^\circ a_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}},$$

$$151.^\circ a_n = \frac{(1 - 4 - 9 - \dots - (5n-6))(\sqrt{n^4 - n^3} - \sqrt{n^4 + n^3})}{n^3},$$

$$152.^\circ a_n = \frac{2^n + 3^{-n} 2n - \sqrt{4n^2 - 1}}{2^{-n} - 3^n \sqrt{n^2 + 3} - n} \sin n!,$$

$$153.^\circ a_n = \frac{2n + \sqrt{n^3 + n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^4 + n^3 - 1}}{\sqrt{n^5 + n^4 + 2n} - \sqrt{n^5 - n^4 + 2}},$$

$$154.^\circ a_n = \frac{n}{3^n},$$

$$155.^\circ a_n = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}},$$

7. Sorozatok — Valós számsorozatok hatványa, logaritmusa

$$156.^\circ a_n = \sqrt[3n]{n^2 + 2n + 4},$$

$$157.^\circ \sqrt[n]{5n^2 - 30n + 21}, \quad n \geq 2,$$

$$158.^\circ a_n = \sqrt[2n]{\frac{2n-1}{2n+1}},$$

$$159.^\circ a_n = \sqrt[n^2]{n}, \quad n \geq 2,$$

$$160.^\circ \sqrt[n]{\frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_{p-1} n + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_{q-1} n + b_q}}, \quad a_j, b_k \in \mathbb{R}$$

$$j = 0, 1, \dots, p; \quad k = 0, 1, \dots, q; \quad \frac{a_0}{b_0} > 0.$$

Valós számsorozatok hatványa, logaritmusa

**D 7.39** Az  $[a_n]$  valós számsorozat  $[b_n]$  valós kitevőjű hatványának nevezzük az  $[a_n^{b_n}]$  sorozatot, ha  $a_n^{b_n}$  legfeljebb véges sok elem kivételével értelmezve van a valós számok körében. Ha  $a_n$  legfeljebb véges sok elem kivételével pozitív, akkor az  $[\ln a_n]$  sorozatot az  $[a_n]$  sorozat természetes alapú logaritmusának nevezzük. (Természetesen más alapú logaritmusok is értelmezhetők.)

**T 7.40** Az  $\left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]$  sorozat konvergens (a határértéket  $e$ -vel jelöljük), azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718281828459045 \dots$$

**T 7.41** Bármely  $[a_n]$  valós számsorozat esetén  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  akkor és csak akkor, ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{a_n} = e^a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ). Bármely  $[a_n]$  pozitív elemű sorozatra és  $a$  pozitív valós számra  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  akkor és csak akkor, ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln a$ .

**T 7.42** Legyen  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . Ha  $0 < a < \infty$ ,  $-\infty < b < \infty$  akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b$ . Ha  $0 < a < 1$ ,  $b = \infty$  vagy  $1 < a \leq \infty$ ,  $b = -\infty$  vagy  $a = \infty$ ,  $-\infty \leq b < 0$  vagy  $a = 0$ ,  $0 < b \leq \infty$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = 0$ . Abban az esetben, ha  $0 < a < 1$ ,  $b = -\infty$  vagy  $1 < a \leq \infty$ ,  $b = \infty$  vagy  $a = \infty$ ,  $0 < b \leq \infty$  akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = \infty$ .

(Megjegyezzük, hogy az  $a = \infty$ ,  $b = 0$  valamint az  $a = 1$ ,  $b = \pm\infty$  és az  $a = 0$ ,  $b = 0$  esetekben további vizsgálatok szükségesek.  $a < 0$  esetben általában nem értelmezhetők a hatványok a valós számok körében.)

Feladatok

161.° Bizonyítsuk be, hogy bármely  $k$  egész számra  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$ .

162.° Bizonyítsuk be, hogy ha  $[a_n]$  ( $a_n \in \mathbb{N}^+$ ) olyan sorozat, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{a_n}\right)^{a_n} = e^k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).



163.<sup>°</sup> Bizonyítsuk be, hogy bármely  $p \in \mathbb{Z}$  és  $q \in \mathbb{N}^+$  (azaz bármely  $\frac{p}{q}$  racionális

$$\text{szán}) \text{ esetén } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n = e^{\frac{p}{q}}.$$

164.<sup>°</sup> Legyen  $[a_n]$  végtelenhez és  $[b_n]$  mínusz végtelenhez tartó számsorozat. Bizonyítsuk be, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{a_n}\right)^{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{b_n}\right)^{b_n} = e^r$  ( $r \in \mathbb{R}$ ) (A 161. — 163. feladatok általánosítása.)

165.<sup>°</sup> Bizonyítsuk be, hogy ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{a_n}\right)^{a_n} = e^r$  ( $r \in \mathbb{R}$ ).

166.<sup>°</sup> Bizonyítsuk be, hogy ha  $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a < \infty$  és  $-\infty < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b < \infty$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b$ .

Konstruáljunk olyan  $[a_n]$  és  $[b_n]$  sorozatokat, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$  és

$$167.<sup>°</sup> \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = r \quad (r \in \mathbb{R}), \quad 168.<sup>°</sup> \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty,$$

$$169.<sup>°</sup> \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = -\infty, \quad 170.<sup>°</sup> \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = r \quad (r \in \mathbb{R}^+),$$

$$171.<sup>°</sup> \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = \infty.$$

Konstruáljunk olyan  $[a_n]$  és  $[b_n]$  sorozatokat, amelyekre  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$  és

$$172.<sup>°</sup> \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = r \quad (r \in \mathbb{R}^+), \quad 173.<sup>°</sup> \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = \infty.$$

Konstruáljunk olyan  $[a_n]$  és  $[b_n]$  sorozatokat, amelyekre  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  ( $a_n > 0$ ),  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$  és

$$174.<sup>°</sup> \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = r \quad (r \geq 0), \quad 175.<sup>°</sup> \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = \infty.$$

176.<sup>°</sup> Bizonyítsuk be, hogy ha  $a_n > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = 0$ .

A T 7.41 tétel és a 161. — 166. feladatok alkalmazásával számítsuk ki a következő sorozatok határértékét:

$$177.<sup>°</sup> a_n = \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^{2^n}, \quad 178.<sup>°</sup> a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n, \quad 179.<sup>°</sup> a_n = \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n},$$

$$180.<sup>°</sup> a_n = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}, \quad 181.<sup>°</sup> a_n = \left(\frac{n-1}{3n}\right)^{2n+1}, \quad 182.<sup>°</sup> a_n = \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n,$$

$$183.<sup>°</sup> a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad 184.<sup>°</sup> a_n = \left(\frac{2^n+3}{2^n+1}\right)^n, \quad 185.<sup>°</sup> a_n = \left(\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^n,$$

$$186.<sup>°</sup> a_n = \left(\sqrt{3n^4+2n-1} - \sqrt{3n^4+n^2-n}\right) \left(\frac{-3n+1}{3n+4}\right)^{4n-2},$$

$$187.<sup>°</sup> a_n = \left(\frac{n^2-2n+1}{n^2-2n+4}\right)^{3n^2-6n+5} + \frac{\sqrt{n^4-n^2+6} - \sqrt{2n^3+n-1}}{n^2+1},$$

$$188.<sup>°</sup> a_n = n^2 \left(\sqrt{n^6-n+2} - \sqrt{n^6+4n-4}\right) \left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+2n}\right)^{n^2}.$$

## Rekurzív sorozatok

A 189. — 202. feladatokban a sorozatokat rekurzív képlettel adtuk meg. Számítsuk ki a határértékeiket, ha létezik.

$$189.^\circ a_1 = 6, \quad a_{n+1} = 5 - \frac{6}{a_n}.$$

190.° Legyen  $a$  adott pozitív szám. Mutassuk meg, hogy tetszőleges  $a_1$  pozitív számot választva az

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{a}{a_n} \right)$$

sorozat  $\sqrt{a}$ -hoz konvergál. (Pozitív szám négyzetgyöke kiszámítható a fenti sorozattal.)

191.\* Az előző feladat általánosításaként mutassuk meg, hogy bármely  $a$  pozitív számra az

$$a_1 > 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{k} \left( (k-1)a_n + \frac{a}{a_n^{k-1}} \right)$$

rekurziós képlettel megadott sorozat határértéke  $\sqrt[k]{a}$ , ahol  $k \geq 2$  egész szám.

$$192.^\circ a_1 = a \quad (\in \mathbf{R}), \quad a_{n+1} = 2a_n^2 + a_n, \quad 193.^\circ a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^3 + 1},$$

$$194.^\circ a_1 = \sqrt{a}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}, \quad (a > 0), \quad 195.^\circ a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n.$$

Legyenek  $0 < b \leq a$  tetszőleges rögzített valós számok. A következő rekurzív definícióval egyszerre adunk meg két sorozatot:

$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}}.$$

Igazoljuk, hogy

196.  $[a_n]$  monoton csökkenő,  $[b_n]$  monoton növekvő sorozat,

197. Az  $a_n$  és a  $b_n$  számok mértani közepe minden  $n$ -re ugyanaz,

$$198. \quad 0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{a_n - b_n}{2}, \quad 199. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sqrt{ab}.$$

Tekintsük az úgynevezett Fibonacci-sorozatot:  $a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ . Mutassuk meg:

$$200.* \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right), \quad 201.* \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

202. Ha  $C$  az  $AB$  szakasz belső pontja és  $\frac{AC}{CB} = \frac{CB}{AB}$ , akkor ez az arány  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  (az aranymetszés arányszáma).

## Vegyes feladatok

203<sup>?</sup> Igazoljuk, hogy ha  $|\lim_{n \rightarrow \infty} a_n| < 1$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n = 0$ .

204<sup>?</sup> Igazoljuk, hogy ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 1$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n = \infty$ .

205<sup>\*</sup> Bizonyítsuk be, hogy minden  $m \in \mathbf{N}^+$ -ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^m + 2^m + \cdots + n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{1+m}.$$

206<sup>\*</sup> Mutassuk meg, hogy ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ .

207. A 206. feladat alapján határozzuk meg az  $\left[ \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \right]$  sorozat határértékét.

208. a 206. feladat alkalmazásával határozzuk meg az  $\left[ \left(1 - \frac{1}{n^k}\right)^n \right]$  ( $k \in \mathbf{N}^+$ ) sorozat határértékét.

209. Bizonyítsuk be, hogy ha minden  $n$ -re  $b_n > 0$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = b < 1$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

210<sup>?</sup> Legyen  $a_n \geq -1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,  $k \in \mathbf{N}^+ - \{1\}$ . Bizonyítsuk be, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{1 + a_n} = 1$ .

211<sup>\*</sup> Mutassuk meg, hogy az  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos k}{3^k}$  sorozat konvergens.

212<sup>\*</sup> Bizonyítsuk be, hogy ha  $a > 1$ , akkor az  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a^k + 1}$  sorozat konvergens.

213<sup>\*</sup> Legyenek  $a_1, a_2, \dots, a_k$  nemnegatív valós számok. Bizonyítsuk be, hogy az  $\left[ \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} \right]$  sorozat konvergens, és adjuk meg a határértékét.

214. Egy egységnyi oldalú négyzetet 9 egybevágó négyzetre bontunk, ezek közül a középsőt beszínezzük. A második lépésben a megmaradó nyolc kis négyzet mindegyikét 9 egybevágó négyzetre bontjuk, majd mindegyikben a középsőt ismét beszínezzük. Az eljárást folytatjuk. Mekkora lesz az  $n$ -edik lépés után beszínezett részek területének összege? Jelöljük  $s_n$ -nel az  $n$ -edik lépés után fehérén maradó rész területét. Határozzuk meg  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  értékét!

215<sup>\*</sup> Bizonyítsuk be, hogy minden sorozatnak van monoton részsorozata.

216<sup>\*</sup> Igazoljuk, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = 1$ .

217<sup>?</sup> Mutassuk meg, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ .

218<sup>?</sup> Számítsuk ki az  $a_n = \sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$  sorozat határértékét.

## 8. fejezet

# Függvényhatárérték és folytonosság

## Valós függvények és szemléltetésük

**D 8.1**  $n$ -változós valós függvényen ( $n \in \mathbb{N}^+$ ) olyan  $f$  függvényt értünk, amelynek értelmezési tartománya ( $\text{Dom } f$ ) az  $\mathbb{R}^n$  halmaznak, értékkészlete ( $\text{Ran } f$ ) pedig az  $\mathbb{R}$ -nek valamely részhalmaza. Ha az  $n$ -et nem akarjuk hangsúlyozni, akkor röviden valós függvényről, speciálisan, ha  $n = 1$ , akkor egyváltozós valós függvényről beszélünk.

**D 8.2** Az egyváltozós valós  $x \mapsto f(x)$  ( $x \in \text{Dom } f$ ) függvényt síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az  $(x, f(x))$  koordinátájú pontok halmazával (az  $y = f(x)$  egyenletű geometriai alakzattal) ábrázoljuk, ezt az alakzatot a **függvény grafikonjának** nevezzük.

A kétváltozós  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  ( $(x, y) \in \text{Dom } f$ ) valós függvény grafikonjának egyenlete:  $z = f(x, y)$ , amely térbeli derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolható. A grafikonnak az  $x = a$  síkkal való metszete az  $x = a$ ,  $z = f(a, y)$  egyenletrendszerű alakzat;  $x$ -**nívóvonal**. Ezt az  $x$ -nívóvonalat merőlegesen levetítve az  $yz$ -síkra, az  $x = 0$ ,  $z = f(a, y)$  egyenletrendszerű görbét kapjuk. Hasonlóan származtathatók az  $y$ - és  $z$ -nívóvonalak, s ezek merőleges vetületei az  $xz$ - illetve  $xy$ -síkra.

**D 8.3** Az egyetlen egyenlettel meghatározott függvényt **explicit alakban megadottnak**, röviden **explicitnek** nevezzük, ha a kiszámítandó függvényérték az egyenlet egyik oldalán magában áll, azaz  $n$ -változós függvény esetén  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $x_k \in \mathbb{R}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ) alakú. Minden más esetben a függvényt **implicit alakban megadottnak**, röviden **implicitnek** mondjuk.

## Feladatok

1. Határozzuk meg az  $f(-1)$ ,  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ,  $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ,  $f(4)$ ,  $f(6)$  helyettesítési értékeket, ha

$$f(x) = \begin{cases} 3^{-x} - 1, & \text{ha } -1 \leq x < 0; \\ \text{tg } \frac{x}{2}, & \text{ha } 0 \leq x < \pi; \\ \frac{x}{x^2-2}, & \text{ha } \pi \leq x \leq 6. \end{cases}$$

2. Határozzuk meg az  $f(\sqrt{2})$ ,  $f(\sqrt{8})$ ,  $f(\sqrt{\log_2 1024})$  helyettesítési értékeket, ha

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 1, & \text{ha } x \leq 2; \\ \frac{1}{x-2}, & \text{ha } 2 < x \leq 3; \\ 2x - 5, & \text{ha } 3 < x. \end{cases}$$

3. A 2 oldalú  $ABCD$  négyzetet messzük el az  $AC$  átlóra merőleges  $e$  egyenessel. Legyen az  $A$  csúcs és az  $e$  egyenes távolsága  $x$ . Írjuk fel az  $A$  csúcsot is tartalmazó lemeztett síkidom területét  $x$  függvényeként. Határozzuk meg a területet, ha  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  illetve  $x = 2$ .

4. Mivel egyenlő  $f(2), f(-1), f(-x), f(x+1), f(x)+1, f(2x), 2f(x), f\left(\frac{1}{x}\right), \frac{1}{f(x)}, f(x^2), (f(x))^2$ , ha  $f(x) = \left|\frac{1-x}{1+x}\right|$ ?

Az 5. — 9. feladatokban adjuk meg azt az  $f$  függvényt, amely teljesíti a felírt egyenletet:

5.  $f(x-2) = \frac{1}{x+1}, \quad x \neq -1,$

6.  $f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 + 1, \quad x \neq 0,$

7.  $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = x, \quad x \neq -1,$

8.  $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^4 + 1}{x^2}, \quad x \neq 0,$

9.  $f(x^2) = 1 - |x|^3.$

10. Adott az  $f(x) = \log_c \frac{1-x}{1+x}$  függvény. Bizonyítsuk be, hogy ha  $a, b \in (-1, 1)$ , akkor  $f(a) + f(b) = f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right).$

11. Határozzuk meg az  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  racionális egész függvény (polinom) együtthatóit, ha  $f(-1) = 0, f(0) = 2, f(1) = -3, f(2) = 5.$

12.\* Határozzuk meg az  $f(x) = a + bc^x$  ( $c > 0$ ) függvényben az  $a, b, c$  paraméterek értékeit, ha  $f(0) = 15, f(2) = 30, f(4) = 90.$

13.\* Milyen  $a$  érték mellett lesz az  $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + 2x}{2x-1}$  függvény az  $x = \frac{1}{2}$  hely kivételével egyenlő egy másodfokú függvénnyel?

14. Milyen  $a$  és  $b$  értékeknél lesz az  $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + 2b}{x^2 + x + 1}$  függvény elsőfokú?

Határozzuk meg az alábbi valós függvények értelmezési tartományát:

15.  $\frac{x^2}{1+x},$

16.  $\sqrt{5-2x},$

17.\*  $\sqrt[3]{\frac{2x}{x^2-2x+2}},$

18.\*  $\frac{1}{\sqrt{x-|x|}},$

19.  $\sqrt{x} + \sqrt{-x},$

20.  $\frac{|x|+10}{|x|-10},$

21.  $\lg(3x-4),$

22.  $\log_a(x^2-4),$

23.  $\log_2 \log_3 \log_4 x,$

24.  $\log_a(x+2) + \log_a(x-2),$

25.\*  $\lg \cos x,$

26.  $\lg \frac{x^2-5x+6}{x^2+4x+6},$

27.\*  $\sqrt[4]{\lg \operatorname{tg} x},$

28.\*  $\lg \sqrt{\log_{\frac{1}{4}}(3x-8)},$

29.  $\lg(1 - \lg(x^2 - 5x + 16)),$

30.  $\frac{3}{4-x^2} + \ln(x^3-x),$

31.  $\ln(\sin(\ln x)),$

32.  $\ln \frac{1}{\ln(1-x)+1}$ .

Határozzuk meg az  $f$  és  $\frac{1}{f}$  valós függvények értelmezési tartományát, ha:

33.  $f(x) = x^2 - x + 1$ ,

34.  $f(x) = x + \sqrt{x+2}$ ,

35.  $f(x) = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}$ ,

36.  $f(x) = 5^x - 2^{x+1}$ ,

37.  $f(x) = 3 - 2 \cos x$ ,

38.  $f(x) = 1 - \operatorname{ctg} x$ .

Határozzuk meg a következő függvények értelmezési tartományát és értékkészletét:

39.\*  $f(x) = \frac{1}{2 - \cos 3x}$ ,

40.\*  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ,

41.\*  $f(x) = \lg(1 - 2 \cos x)$ ,

42.\*  $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$ .

Mi az értelmezési tartománya a következő függvényeknek, ha az  $f$  függvény értelmezési tartománya a  $[0; 1]$  intervallum?

43.\*  $f(x-5)$ ,

44.  $f(4x)$ ,

45.  $f(-x)$ ,

46.  $f(2x+1)$ ,

47.\*  $f(3x^2)$ ,

48.\*  $f(\operatorname{tg} x)$ .

Határozzuk meg az alábbi többváltozós valós  $f$  függvények értelmezési tartományát, valamint azt a geometriai alakzatot, amely az értelmezési tartományt a síkbeli, illetve térbeli derékszögű koordináta rendszerben ábrázolja:

49.\*  $\sqrt{1-x^2-y^2}$ ,

50.\*  $\sqrt{x-\sqrt{y}}$ ,

51.  $\ln(xy)$ ,

52.  $\sqrt{x \sin y}$ ,

53.\*  $\sqrt{\ln(\sin x \cos y)}$ ,

54.  $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}$ ,

55.\*  $\ln(1-x^2-y^2-z^2)$ ,

56.  $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$ ,

57.\*  $\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$ ,

58.  $\sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$ ,

59.\*  $\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{1-|x+y|}}$ ,

60.  $\sqrt{\ln \cos \frac{2\pi x}{y}}$ ,

61.\*  $\sqrt{\sin \pi x \sin \pi y}$ ,

62.\*  $\sqrt{z-x^2-y^2} + \sqrt{4-z-x^2-y^2}$ ,

63.\*  $\ln(x \ln(y-x))$ ,

64.  $\ln(1 - \operatorname{sgn}^2 xy)$ ,

65.\*  $\sqrt{-\sin^2 \pi x} + \sqrt{-\sin^2 \pi y}$ ,

66.\*  $\sqrt{\frac{x^2+2x+y^2+c}{x^2-2x+y^2+c}}$ ,  $c \in \mathbf{R}$ ,

67.  $\sqrt{r^2-x^2-y^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-s^2}}$ ,  $r > s > 0$ .

Ábrázoljuk a következő függvényeket:

68.\*  $f(x) = \sqrt{\sin x}$ ,

69.\*  $f(x) = x^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$ ,

$$70.^\circ f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ha } -\pi \leq x \leq 0; \\ 2, & \text{ha } 0 < x \leq 1; \\ \frac{1}{x-1}, & \text{ha } 1 < x \leq 4, \end{cases} \quad 71. f(x) = \begin{cases} -x^3, & \text{ha } x < 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } x = 0; \\ -2, & \text{ha } 0 < x, \end{cases}$$

$$72.^\circ \cos 3x \operatorname{sgn} \sin 2x,$$

$$73.^\circ f(x) = x + \sqrt{x^2},$$

$$74. f(x) = \cos x + |\cos x|,$$

$$75. f(x) = |x + 2|x|,$$

$$76. f(x) = 2|x - 2| - |x + 1| + x.$$

77.° Milyen geometriai transzformációkkal származtathatók az  $f(x)$  függvény grafikonjából az  $f(x+a)$ ,  $f(x)+b$ ,  $f(kx)$ ,  $lf(x)$ ,  $|f(x)|$ ,  $f(|x|)$  ( $a, b, k, l \in \mathbf{R} - \{0\}$ ) függvények grafikonjai, ha értelmezve vannak?

78.° Milyen geometriai transzformációkkal származtatható az  $f(x)$  függvény grafikonjából az  $lf(k(x+a)) + b$  függvény grafikonja, ha értelmezve van? Ezek segítségével ábrázoljuk a  $\sqrt{x}$  függvényből kiindulva a  $\frac{3}{2}\sqrt{-2x-4} - 1$  függvényt.

79.° Ábrázoljuk transzformációval az  $\frac{1}{x}$  függvényből kiindulva a  $\frac{2x+5}{x+1}$  függvényt.

80.° Ábrázoljuk transzformációval a  $\cos x$  függvényből kiindulva a  $3 \cos x - \sqrt{3} \sin x$  függvényt.

Ábrázoljuk a következő függvényeket:

$$81.^\circ |x^2 - 2x - 3|,$$

$$82.^\circ ||x| - 1|,$$

$$83.^\circ \log_2 |x + 2|.$$

Nívóvonalakkal (vagy a függvény grafikonjára jellemző más síkmetszetekkel) szemléltessük az alábbi egyenletekkel megadott  $(x, y) \mapsto z$  függvényeket:

$$84.^\circ z = x^2 + y^2,$$

$$85.^\circ z^2 = x^2 + y^2,$$

$$86.^\circ z = y^2 - x^2,$$

$$87. z = (x + y)^2,$$

$$88.^\circ z = x^2 + y,$$

$$89.^\circ z^2 = x^2 + y^2 - 1,$$

$$90.^\circ z^2 = x^2 + y^2 + 1.$$

Az alábbi  $x \mapsto y$  egyváltozós valós függvényeket paraméteres egyenletrendszerrel adtuk meg. Kiszöböljük ki a  $t$  paramétert!

$$91. x = 3t, \quad y = 6t - t^2,$$

$$92.^\circ x = t^2 - 2t + 3, \quad y = t^2 - 2t + 1,$$

$$93. x = \cos t, \quad y = \sin 2t, \quad t \in [0, \pi], \quad 94.^\circ x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad (a, b > 0),$$

$$95. x = a \sin^3 t, \quad y = a \cos^3 t, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad 96.^\circ x = \operatorname{tg} t, \quad y = \sin 2t + 2 \cos 2t,$$

$$97. x = t^3 + 1, \quad y = t^2,$$

$$98. x = \frac{a}{\sqrt{1+t^2}}, \quad y = \frac{at}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$99.^\circ x = a^t + a^{-t}, \quad y = a^t - a^{-t} \quad (a > 0).$$

## Függvény határértéke

**D 8.4 (Heine)** Az egyváltozós valós  $f$  függvény határértéke az  $x_0$  helyen  $l$ , ha  $f$  értelmezve van  $x_0$  valamely  $E$  környezetében, és minden olyan  $E$ -beli  $[x_n]$  sorozatra, amelyre  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$ . Jelölés:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ .

Az egyváltozós valós  $f$  függvény az  $x_0$  helyen végtelenhez (mínusz végtelenhez) divergál, ha  $f$  értelmezve van  $x_0$  valamely  $E$  környezetében, és minden olyan  $E$ -beli  $[x_n]$  sorozatra, amelyre  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$ ). Jelölés:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  ( $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ ).

Az egyváltozós valós  $f$  függvény határértéke a végtelenben  $l$ , ha  $f$  értelmezve van a  $\infty$  valamely  $E$  környezetében, és végtelenhez divergáló minden  $E$ -beli  $[x_n]$  sorozatra  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$ . Jelölés:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = l$ .

Hasonlóan definiálható a mínusz végtelenben a határérték, a végtelenben és a mínusz végtelenben végtelenhez, illetve mínusz végtelenhez divergálás.

**D 8.5 (Cauchy)** Az egyváltozós valós  $f$  függvény határértéke az  $x_0$  helyen  $l$ , ha bármely pozitív  $\varepsilon$ -hoz van olyan pozitív  $\delta$ , hogy ha  $x$  benne van  $x_0$ -nak  $\delta$  sugarú környezetében, azaz ha  $0 < |x - x_0| < \delta$ , akkor az  $f$  függvény értelmezve van az  $x$  helyen és  $f(x)$  benne van az  $l$  szám  $\varepsilon$  sugarú teljes környezetében, azaz  $|f(x) - l| < \varepsilon$ .

Az egyváltozós valós  $f$  függvény az  $x_0$  helyen végtelenhez (mínusz végtelenhez) divergál, ha bármely pozitív (negatív)  $k$  számhoz van olyan pozitív  $\delta$ , hogy ha  $0 < |x - x_0| < \delta$ , akkor  $f(x)$  értelmezve van és  $f(x) > k$  ( $f(x) < k$ ).

Az egyváltozós valós  $f$  függvény határértéke a végtelenben  $l$ , ha bármely pozitív  $\varepsilon$ -hoz van olyan pozitív  $k$  szám, hogy ha  $x > k$ , akkor  $f(x)$  értelmezve van és  $|f(x) - l| < \varepsilon$ .

Hasonlóan definiálható a mínusz végtelenben a határérték, a végtelenben és a mínusz végtelenben végtelenhez, illetve mínusz végtelenhez divergálás.

**T 8.6** A függvényhatárérték Heine- és Cauchy-féle definíciója ekvivalens.

**T 8.7**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad (\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0),$$

ha az egyenlőségek jobb oldalán álló határértékek léteznek.

## Feladatok

A függvényhatárérték Heine- és Cauchy-féle definíciója (D 8.4 és D 8.5) alapján bizonyítsuk be a következő állításokat:

$$100. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x + 1}{5x + 4} = \frac{1}{2},$$

$$101. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = 2,$$



$$102. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 1}{3x + 9} = \frac{5}{3},$$

$$103. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = \infty,$$

$$104. \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty (0 < a < 1), \quad 105. \lim_{n \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x} \text{ nem létezik.}$$

106.\* Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \dots + a_{p-1} x + a_p}{b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \dots + b_{q-1} x + b_q} = \begin{cases} 0, & \text{ha } p < q; \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{ha } p = q; \\ \infty, & \text{ha } p > q \text{ és } \frac{a_0}{b_0} > 0; \\ -\infty, & \text{ha } p > q \text{ és } \frac{a_0}{b_0} < 0; \end{cases}$$

ahol  $p, q \in \mathbf{N}; a_i, b_j \in \mathbf{R}$  ( $i = 0, 1, \dots, p; j = 0, 1, \dots, q$ ) és  $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ .

107.\* Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \dots + a_p}{b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \dots + b_q} = \begin{cases} 0, & \text{ha } p < q; \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{ha } p = q; \\ \infty, & \text{ha } p > q, p - q = 2k + 2, \frac{a_0}{b_0} > 0; \\ \infty, & \text{ha } p > q, p - q = 2k + 1, \frac{a_0}{b_0} < 0; \\ -\infty, & \text{ha } p > q, p - q = 2k + 2, \frac{a_0}{b_0} < 0; \\ -\infty, & \text{ha } p > q, p - q = 2k + 1, \frac{a_0}{b_0} > 0; \end{cases}$$

ahol  $k, p, q \in \mathbf{N}; a_i, b_j \in \mathbf{R}$  ( $i = 0, 1, \dots, p; j = 0, 1, \dots, q$ ) és  $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ .

Az  $x$  megfelelő hatványával egyszerűsítve határozzuk meg a következő függvényhatárértékeket:

$$108. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{x^2 - 2},$$

$$109. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 1}{6x^2 + 3x + 2},$$

$$110. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^3 + x^2 - 1}{x^2 + x - 1},$$

$$111. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+5)^5 + (x+6)^5 + (x+7)^5}{x^5 + 5^5},$$

$$112. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}},$$

$$113. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1} - x \right),$$

$$114. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{2x+1} + \frac{x^3 + 4x^2 - 2}{1 - 2x^2} \right),$$

$$115. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+2) \dots (x^n+1)}{((nx)^n + 1)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Számítsuk ki az alábbi függvényhatárértékeket (ha szükséges, akkor az  $x - x_0$  tényezővel való egyszerűsítés útján):

$$116. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1},$$

$$117. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1},$$

$$118. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1},$$

$$119. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^7 + 5x^6 + x^3}{x^7 + 2x^3},$$

$$120. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-1} \right),$$

$$121. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1} \quad (p, q \in \mathbf{N}^+),$$

$$122. \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2}{2x - x^2} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right),$$

$$123. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - 1 - 5x}{x^2 + x^5}.$$

8. Függvényhatárérték és folytonosság — Vegyes feladatok

Számítsuk ki az alábbi, végtelenbeli függvényhatárértékeket az  $x$  alkalmas hatványával való egyszerűsítése útján:

$$124.^{\circ} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1},$$

$$125. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{\sqrt{x} + 1}},$$

$$126.^{\circ} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x + 1}},$$

$$127.^{\circ} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2 + 1}}{\sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt[5]{x^4 + 1}}.$$

Vegyes feladatok

$$128.^{\circ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

$$129.^{\circ} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 3} - \sqrt[5]{x^3 + 4}}{\sqrt[3]{x^7 + 1}}.$$

Számítsuk ki az alábbi függvényhatárértékeket a  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}$ , illetve a  $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b} = \frac{a \pm b}{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$  azonosságok alapján:

$$130.^{\circ} \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x - 2} - 2}{x - 6},$$

$$131.^{\circ} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{\sqrt{6x^2 + 3} + 3x},$$

$$132.^{\circ} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{6 - x} - 1}{3 - \sqrt{4 + x}},$$

$$133.^{\circ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt[3]{1 - x}}{x},$$

$$134.^{\circ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x} - 1},$$

$$135.^{\circ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt[3]{1 - x}},$$

$$136.^{\circ} \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x),$$

$$137.^{\circ} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}),$$

$$138.^{\circ} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1 - x^3} + x),$$

$$139.^{\circ} \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 (\sqrt[3]{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2 - 1}),$$

$$140.^{\circ} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right),$$

$$141. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{(x + c)(x + d)} - x),$$

$$142.^{\circ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}}{\sin x},$$

$$143.^{\circ} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{8}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}.$$

Az alábbi feladatokban szereplő kifejezéseket ismert trigonometriai azonosságok alkalmazásával olyan alakra hozhatjuk, hogy a felírt függvényhatárértéket közvetlenül leolvashatjuk. Végezzük el a átalakítást, és írjuk fel a határértéket!

$$144.^{\circ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x},$$

$$145.^{\circ} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x + 1}{\cos x + \sin x - 1},$$

$$146.^{\circ} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right)}{\sqrt{3} - 2 \cos x},$$

$$147.^{\circ} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left| \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1 - \sin x)^2}} \right|,$$

8. Függvényhatárérték és folytonosság — Vegyes feladatok

$$148.^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right),$$

$$149.^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x},$$

$$150.^\circ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2} \cos x - 1},$$

$$151.^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}.$$

Felhasználva a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  határértéket, vizsgáljuk meg léteznek-e az alábbi határértékek; ha igen, számítsuk ki azokat!

$$152.^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x},$$

$$153.^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin x},$$

$$154.^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} \quad (\beta \neq 0),$$

$$155.^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 6x - \sin 7x},$$

$$156.^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2},$$

$$157.^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x},$$

$$158.^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2},$$

$$159.^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{\sin^2 x},$$

$$160.^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3},$$

$$161. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\sin 2x \sin x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right),$$

$$162.^\circ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - x},$$

$$163.^\circ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x},$$

$$164.^\circ \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi^2 - x^2},$$

$$165.^\circ \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{\pi}{x}.$$

Számítsuk ki a következő függvényhatárértékeket (a 7.164 — 7.166 feladatok és a függvényhatárérték Heine-féle definíciója (D 8.4) alapján):

$$166.^\circ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{7x},$$

$$167.^\circ \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{3x}},$$

$$168.^\circ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x-1} \right)^{1+2x},$$

$$169.^\circ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^3 - 1} \right)^{\frac{x^3}{2}},$$

$$170. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x},$$

$$171.^\circ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{2x+1} \right)^x,$$

$$172.^\circ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7} \right)^x.$$

173.° Bizonyítsuk be, hogy ha  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a > 0$  és  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ , akkor  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = a^b$ . (Megjegyezzük, hogy az  $x_0$  a  $\infty$ -t vagy  $-\infty$ -t is jelentheti.)

174.° Bizonyítsuk be, hogy ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)(f(x) - 1) = b,$$

akkor  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = e^b$ . (Az előző feladathoz hasonlóan az  $x_0$  itt  $\infty$  vagy  $-\infty$  is lehet.)

A 173. és a 174. feladatok alapján számítsuk ki a következő függvényhatárértékeket:

8. Függvényhatárérték és folytonosság — Egyoldali függvényhatárérték

$$175. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}},$$

$$177. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2+3}{2x^2+5} \right)^{8x^2+3},$$

$$179. \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x},$$

$$181. \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} - x)^{\frac{1}{x}},$$

Számítsuk ki a következő függvényhatárértékeket:

$$183. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8},$$

$$185. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x^2+1} - \sin \sqrt{x^2-1}),$$

$$186. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x^3 - 1}{\sin^6 2x},$$

$$187. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin 3x} - \sqrt{1-4\sin 5x}}{\sin 6x},$$

$$189. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos^3 x)^{\frac{1}{x \sin x}},$$

191. Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \alpha \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{k(x)} \neq 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{k(x)},$$

( $\alpha \in \mathbf{R}$ ) (ahol  $x_0$  jelentheti a  $\infty$ -t vagy a  $-\infty$ -t is).

$$176. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 3x - 2} \right)^{\frac{2x+1}{x-1}},$$

$$178. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}},$$

$$180. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x},$$

$$182. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}.$$

$$184. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[5]{x}},$$

$$188. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg} x^2},$$

$$190. \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} \quad (a \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}),$$

## Egyoldali függvényhatárérték

**D 8.8** A  $v$  valós szám  $\delta$  hosszúságú bal oldali környezetén a  $(v - \delta; v)$ ,  $\delta$  hosszúságú jobb oldali környezetén a  $(v; v + \delta)$  intervallumot értjük.

**D 8.9** Az egyváltozós valós  $f$  függvény bal oldali határértéke az  $x_0$  helyen  $b$ , ha  $f$  értelmezve van  $x_0$  valamely  $B$  bal oldali környezetében és minden olyan  $B$ -beli  $[x_n]$  sorozatra, amelyre  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$ ; vagy, ami ezzel ekvivalens, ha bármely pozitív  $\varepsilon$ -hoz van olyan pozitív  $\delta$ , hogy ha  $x$  benne van  $x_0$ -nak  $\delta$  hosszúságú bal oldali környezetében, azaz, ha  $x_0 - \delta < x < x_0$ , akkor  $f$  értelmezve van az  $x$  helyen, és  $f(x)$  benne van  $b$ -nek  $\varepsilon$  sugarú teljes környezetében, azaz  $|f(x) - b| < \varepsilon$ . (Jelölés:  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = b$ ; ha  $x_0 = 0$ , akkor egyszerűen  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = b$ .) Hasonlóan definiálható az  $x_0$  helyen a jobb oldali határérték ( $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ ), a balról (jobbról) végtelenhez divergálás.

**T 8.10** Egyváltozós valós függvénynek valamely helyen akkor és csak akkor van határértéke, ha ezen a helyen bal oldali és jobb oldali határértéke is létezik, és a két egyoldali határérték egyenlő; ebben az esetben a határérték az egyoldali határértékekkel egyenlő.

### Feladatok

Határozzuk meg az alábbi egyváltozós valós függvények bal- és jobb oldali határértékét a megadott  $x_0$  helyen:

$$192. f(x) = \begin{cases} -2x + 3, & \text{ha } x \leq 1; \\ 3x - 5, & \text{ha } 1 < x; \end{cases} \quad x_0 = 1,$$

$$193. f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}; \quad x_0 = 1,$$

$$194. f(x) = 3 + \frac{1}{1 + 7^{\frac{1}{1-x}}}; \quad x_0 = 1,$$

$$195. f(x) = \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}; \quad x_0 = 0,$$

$$196. f(x) = \cos \frac{\pi}{x}; \quad x_0 = 0,$$

$$197. f(x) = \frac{5}{(x - 2)^3}; \quad x_0 = 2,$$

$$198. f(x) = \frac{2(1 - x^2) + |1 - x^2|}{3(1 - x^2) - |1 - x^2|}; \quad x_0 = 1.$$

### Függvények folytonossága

**D 8.11** Az egyváltozós valós  $f$  függvényt **folytonosnak** nevezzük az  $x_0$  helyen (pontban), ha  $f$  értelmezve van az  $x_0$  helyen, van határértéke az  $x_0$  helyen és  $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ . Hasonlóan értelmezhető az  $f$  függvény bal oldali, illetve jobb oldali folytonossága. (A definícióban határérték helyett bal oldali, illetve jobb oldali határértéket veszünk.)

**T 8.12** Adott pontban folytonos függvények összege, különbsége és szorzata is folytonos ebben a pontban; két ilyen függvény hányadosa is folytonos, ha az osztó nem zérus az adott pontban.

**D 8.13** Ha az  $f$  függvény az  $x_0$  helyen (pontban) folytonos, akkor azt is szokás mondani, hogy  $x_0$  az  $f$  **folytonossági helye**. Ha viszont az  $f$  függvény az  $x_0$  helyen nem folytonos, de az  $x_0$  valamely környezetének minden pontjában folytonos, akkor az  $x_0$ -t  $f$  **szakadási helyének** nevezzük.

A szakadási helyek típusai:

$x_0$  **hézagpont**, ha  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  létezik, de az  $x_0$  helyen a függvény nincs értelmezve;

az  $x_0$  pontban **megszüntethető szakadása** van  $f$ -nek, ha  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  létezik,  $f(x_0)$  is létezik, de  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ ;

az  $x_0$  pontban **lényeges szingularitása** van, ha  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  nem létezik. A lényeges szingularitás fontos speciális esete a pólus: Akkor mondjuk, hogy az  $x_0$  helyen **pólusa** van a függvénynek, ha  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \infty$ .

### Feladatok

Vizsgáljuk meg, hogy hol folytonosak az alábbi függvények. Ha a függvényeknek szakadási helyeik vannak, akkor állapítsuk meg azok típusát:

8. Függvényhatárérték és folytonosság — Függvények folytonossága

$$199.^{\circ} f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 5x + 6},$$

$$201. f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 7},$$

$$203.^{\circ} f(x) = 3^{\frac{1}{x+1}},$$

$$205.^{\circ} f(x) = x + \frac{x+2}{|x+2|},$$

$$207.^{\circ} f(x) = \frac{5x^2 - 3x}{2x},$$

$$209.^{\circ} f(x) = \frac{1}{\sin 2x},$$

$$211.^{\circ} f(x) = \text{Ent } 2x - 2x + 2,$$

$$213.^{\circ} \text{sgn } |\sin x|,$$

$$215.^{\circ} f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x}, & \text{ha } x \neq 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$$

$$217.^{\circ} f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}, & \text{ha } x \neq 2k\pi; \\ 0, & \text{ha } x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

$$200. f(x) = \frac{1}{x^2 - 9},$$

$$202. f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2(x-3)^2},$$

$$204. f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}},$$

$$206. f(x) = \begin{cases} -x, & \text{ha } x \leq 1; \\ \frac{2}{x-1}, & \text{ha } 1 < x, \end{cases}$$

$$208. f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x},$$

$$210.^{\circ} f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x},$$

$$212.^{\circ} \text{sgn } |x^4 + x^2|,$$

$$214. f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{ha } x \leq 0; \\ (1 - x)^2, & \text{ha } 0 < x \leq 2; \\ 3 - x, & \text{ha } 2 < x, \end{cases}$$

$$216.^{\circ} f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}; \\ 4 - 2x, & \text{ha } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \end{cases}$$

Határozzuk meg — ha lehetséges — az  $a$  és  $b$  paraméterek értékét úgy, hogy a következő függvények mindenütt folytonosak legyenek:

$$218.^{\circ} f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0; \\ a, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$$

$$219. f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{1+x^3}, & \text{ha } x \neq -1; \\ a, & \text{ha } x = -1, \end{cases}$$

$$220.^{\circ} f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1, & \text{ha } 0 < x; \\ -x, & \text{ha } x \leq 0, \end{cases}$$

$$221. f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha } x \leq 0; \\ a(x-1), & \text{ha } 0 < x, \end{cases}$$

$$222.^{\circ} f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & \text{ha } x \leq 0; \\ ax + b, & \text{ha } 0 < x < 1; \\ \sqrt{x}, & \text{ha } 1 \leq x, \end{cases}$$

$$223. f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } |x| \leq 1; \\ x^2 + ax + b, & \text{ha } 1 < |x|, \end{cases}$$

$$224.^{\circ} f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{x^2-1}, & \text{ha } |x| \neq 1; \\ a, & \text{ha } x = -1; \\ b, & \text{ha } x = 1, \end{cases}$$

$$225.^{\circ} f(x) = \begin{cases} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{\sin x}, & \text{ha } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], x \neq 0, x \neq \pi; \\ a, & \text{ha } x = 0; \\ b, & \text{ha } x = \pi. \end{cases}$$

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvények szakadási helyeiken folytonosak-e balról vagy jobbról:

$$226.^* f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } |x| \leq 1; \\ 0, & \text{ha } |x| > 1, \end{cases} \quad 227.^* f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{x-1}, & \text{ha } x \neq 1; \\ a(\in \mathbf{R}), & \text{ha } x = 1, \end{cases}$$

$$228.^* f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} + x, & \text{ha } x \neq 0; \\ 1, & \text{ha } x = 0, \end{cases} \quad 229.^* (-1)^{\text{Ent}(x^2-1)},$$

$$230.^* f(x) = \ln x - \text{Ent}(\ln x),$$

$$231.^* f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x \leq 0; \\ 2 - \frac{2}{2x-1} - \text{Ent}\left(2 - \frac{2}{2x-1}\right), & \text{ha } 0 < x. \end{cases}$$

## Függvénygörbe aszimptotája

**D 8.14** Az  $e$  egyenest a végtelenbe nyúló  $g$  görbe **aszimptotájának** nevezzük, ha a  $g$  görbén végtelenbe távolodó pontnak az  $e$  egyenestől való távolsága 0-hoz konvergál. Az  $f$  egyváltozós valós függvény görbéjének (grafikonjának) aszimptotáját szokás egyszerűen az  $f$  függvény **aszimptotájának** nevezni.

**T 8.15** Az  $y = f(x)$  egyenletű görbének az  $y$  tengellyel párhuzamos aszimptotája, azaz **függőleges aszimptotája** csak olyan  $x_0$  helyen lehet, ahol az  $f$  függvény legalább egy oldalról végtelenhez vagy mínusz végtelenhez divergál, és ez esetben az  $x = x_0$  egyenletű egyenes az aszimptota.

**T 8.16** Az  $y = f(x)$  egyenletű görbének akkor és csak akkor van az  $y$  tengellyel nem párhuzamos, azaz **ferde aszimptotája**, ha az  $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  és  $c = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$  vagy pedig  $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  és  $c = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx)$  határértékek léteznek. Ha ezek a feltételek teljesülnek, akkor az  $y = mx + c$  egyenletű egyenes a ferde aszimptota  $\infty$ -ben, illetve  $-\infty$ -ben. (Speciálisan, ha  $m = 0$ , akkor **vízszintes aszimptotáról** beszélünk.)

## Feladatok

Állapítsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát! Vizsgáljuk meg folytonosságukat, és határozzuk meg aszimptotáik egyenletét:

$$232.^* f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$233.^* f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}},$$

$$234.^* f(x) = \sqrt{x^4 - 1},$$

$$235.^* f(x) = \frac{6(x^2 - 4)}{3x^2 + 8},$$

$$236.^* f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x},$$

$$237.^* f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 1},$$

$$238.^* f(x) = \frac{\sqrt{4x^4 + 1}}{|x|},$$

$$239.^* f(x) = 3\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1},$$

$$240.^* f(x) = \sqrt[3]{(2-x)^2} - \sqrt[3]{(2+x)^2}, \quad 241.^* f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 1},$$

8. Függvényhatárérték és folytonosság — Korlátos zárt halmazon folytonos valós függvények

$$242.* f(x) = \frac{x^4 - 2a^2x^2 + a^4}{x^3 - 3bx^2 + 2b^2x} \quad (a, b \neq 0),$$

$$243.* f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sin x}{x}, & \text{ha } x \neq 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$$

$$244.* f(x) = \frac{x - \text{Ent } x}{\text{Ent } x}; x_0 = n(n \in \mathbf{Z}),$$

$$245.* f(x) = \frac{\text{Ent } x^3}{x^2 + 1},$$

246.\* Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = \frac{a_0x^p + a_1x^{p-1} + a_2x^{p-2} + \dots + a_{p-1}x + a_p}{b_0x^q + b_1x^{q-1} + b_2x^{q-2} + \dots + b_{q-1}x + b_q}$$

( $a_0 \neq 0$ ,  $b_0 \neq 0$ ,  $p \in \mathbf{N}$ ,  $q \in \mathbf{N}^+$ ) függvénynek a  $p \leq q+1$  feltétel mellett van ferde aszimptotája, s ebben az esetben a ferde aszimptota egyenlete:

$$y = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}x + \frac{b_0a_1 - a_0b_1}{b_0^2}, & \text{ha } p = q + 1; \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{ha } p = q; \\ 0, & \text{ha } p < q. \end{cases}$$

Határozzuk meg az alábbi implicit alakban megadott  $x \mapsto y = y(x)$  függvények ferde aszimptotáinak egyenletét:

$$247.* (2x + y)^2(x + y) = x, \quad 248.* y^3 - x^3 + y - 2x = 0,$$

$$249.* (x^2 - y^2)^2 = 2x \quad (x \geq 0), \quad 250.* x^3 + y^3 = 3x^2,$$

$$251.* x^4 - 2x^2 = y^3(x - 1), \quad 252.* x^2y^2 + y^4 = 4x^2.$$

## Korlátos zárt halmazon folytonos valós függvények

**D 8.17** A valós (komplex) értékű  $f$  függvényt korlátosnak nevezzük, ha van olyan  $v$  valós szám, hogy  $|f(P)| \leq v$  a  $\text{Dom } f$  minden  $P$  elemére érvényes. Ha ez a feltétel csak az értelmezési tartomány valamely  $H$  részhalmazának  $P$  pontjaira teljesül, akkor azt mondjuk, hogy  $f$  a  $H$  halmazon korlátos. Megfelelő módon definiálható valós függvény alulról illetve felülről korlátossága.

**D 8.18** Az  $M_1$  metrikus térből az  $M_2$  metrikus térbe vivő függvényt a  $H(\subseteq M_1)$  halmazon folytonosnak nevezzük, ha  $f$  a  $H$  minden belső pontjában folytonos, továbbá a  $H$ -nak minden olyan  $P$  határpontjára, amely  $H$ -hoz tartozik, teljesül az, hogy ha  $[P_n]$  olyan  $H$ -beli sorozat, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = f(P)$ .

Ez azt jelenti, hogy egyváltozós valós függvény valamely  $[a, b]$  zárt intervallumon akkor és csak akkor folytonos, ha az  $(a, b)$  nyílt intervallum minden pontjában folytonos,  $a$ -ban jobb oldalról,  $b$ -ben pedig bal oldalról folytonos.

**T 8.19** Korlátos zárt halmazon folytonos valós függvény korlátos is ezen a halmazon.



**T 8.20** Legyen  $H$  az  $\mathbb{R}^k$  metrikus tér korlátos zárt részhalmaza. Ha  $f$  a  $H$  halmazon folytonos valós függvény akkor vannak olyan  $P_1, P_2 \in H$ , hogy  $f(P_1) = \inf\{f(P); P \in H\}$ ,  $f(P_2) = \sup\{f(P); P \in H\}$ , azaz az  $f$  a  $H$ -n felvett értékei halmazának infimumát és szuprimumát is felveszi a  $H$  bizonyos pontjaiban.

**T 8.21** Legyen az egyváltozós valós  $f$  függvény folytonos az  $[a, b]$  zárt intervallumon. Legyenek továbbá  $x_1, x_2 \in [a, b]$  tetszőleges olyan pontok, amelyekre  $f(x_1) \leq f(x_2)$ . Ha  $f(x_1) \leq c \leq f(x_2)$  ( $c \in \mathbb{R}$ ), akkor van olyan  $x_0 \in [x_1, x_2]$  (vagy  $x_0 \in [x_2, x_1]$ ), hogy  $f(x_0) = c$ .

**T 8.22 (Bolzano)** Ha az egyváltozós valós  $f$  függvény az  $[a, b]$  zárt intervallumon folytonos és az intervallum két végpontjában ellentétes előjelű, akkor az intervallum belsejében van zérushelye.

### Feladatok

253.\* Van-e valós megoldása a  $\sin x - x + 1 = 0$  egyenletnek?

254.\* Van-e megoldása az  $x^5 - 18x + 2 = 0$  egyenletnek a  $[-1, 1]$  intervallumban?

255.\* Bizonyítsuk be, hogy az  $a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \dots + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0$   
( $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2n + 1$ ,  $a_0 \neq 0$ ) egyenletnek van legalább egy valós gyöke.

256.\* Felveszi-e az  $f(x) = \frac{x^3}{4} - \sin \pi x + 3$  függvény a  $\frac{7}{3}$  értéket a  $[-2, 2]$  intervallumban?

257.\* Legyen  $f$  a  $[0, 1]$  zárt intervallumon folytonos függvény és  $\text{Ran } f \subseteq [0, 1]$ . Bizonyítsuk be, hogy van olyan  $c \in [0, 1]$ , hogy  $f(c) = c$ .

258.\* Feszítsünk ki egy rugalmas szalagot a  $[0; 1]$  zárt intervallumon úgy, hogy a szalag kezdőpontja 0, a végpontja 1 legyen. Mozgassuk a szalag két végét egyszerre úgy, hogy egy adott időpillanatban a kezdőpontja  $a$ , a végpontja pedig  $b$  legyen ( $0 \leq a < b \leq 1$ ). Mutassuk meg, hogy van a szalagnak olyan pontja, amely helyben marad.

259.\* Legyen  $f$  a  $[0, 1]$  zárt intervallumon folytonos függvény, és legyen  $f(0) = f(1) = 0$ . Bizonyítsuk be, hogy bármely  $d \in (0, 1]$  valós számhoz megadható a függvény grafikonjának olyan húrja, amely  $d$  hosszúságú.

260.\* Bizonyítsuk be, hogy egy elhanyagolható vastagságú, körgyűrű alakú elektromos vezetőlánc két olyan pont, amely ugyanolyan hőmérsékletű.

## 9. fejezet

# Differenciálhányados, derivált

### A differenciálhányados definíciója

**D 9.1** Az egyváltozós valós  $f$  függvény  $x_0$  pontbeli differenciálhányadosának nevezzük a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

határértéket, ha ez létezik. Ekkor azt mondjuk, hogy  $f$  az  $x_0$  pontban differenciálható. E határértéket szokás

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

alakban is írni, ahol  $x = x_0 + h$ . E definícióval ekvivalens az alábbi:

**D 9.2** Azt mondjuk, hogy az  $f$  függvény az  $x_0$  pontban differenciálható, ha megadható olyan valós szám — amelyet  $f'(x_0)$ -al jelölünk — és  $x_0$ -nak olyan  $E$  teljes környezete, hogy ha  $x \in E$ , akkor  $f$  értelmezve van az  $x$  helyen, és

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0),$$

ahol  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$ .

**D 9.3** Az  $f$  függvény differenciálható a  $H \subseteq \text{Dom } f$  halmazon, ha annak minden pontjában differenciálható.

**D 9.4** Az  $f$  függvény deriváltjának vagy differenciálhányados-függvényének nevezzük, és  $f'$ -vel jelöljük azt a függvényt, melynek értelmezési tartománya az összes olyan  $x_0$  pontok halmaza, ahol  $f$  differenciálható, értéke pedig minden ilyen pontban az  $f$  függvény  $x_0$  pontbeli differenciálhányadosa. Szokásos jelölések  $f'(x_0)$ -ra:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}, \quad \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}, \quad Df(x_0), \quad \frac{d}{dx}f(x_0), \quad \frac{df(x_0)}{dx}.$$

**T 9.5** Ha  $f$  differenciálható az  $x_0$  pontban, akkor folytonos is  $x_0$ -ban.

**D 9.6** Ha a többváltozós valós függvény mindegyik változóját rögzítjük, kivéve az  $i$ -ediket, akkor az így kapott egyváltozós valós függvény differenciálhányadosát az  $f$  függvény  $i$ -edik változója szerinti parciális differenciálhányadosának nevezzük. Például a kétváltozós  $f$  függvény  $(x_0, y_0)$  pontbeli  $x$  szerinti parciális differenciálhányadosán a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

határértéket értjük, melynek szokásos jelölései:

$$f'_x(x_0, y_0), f_x(x_0, y_0), \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x=x_0, y=y_0)}, D_x f(x_0, y_0), \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0).$$

Az  $(x, y) \rightarrow f(x, y)$  függvény  $x$  szerinti **parciális deriváltján** azt a kétváltozós függvényt értjük, melynek értelmezési tartománya az összes olyan  $(x_0, y_0)$  pontokból áll, ahol az  $f$  függvény  $x$  szerinti parciális differenciálhányadosa létezik, értéke pedig minden ilyen pontban ezzel a parciális differenciálhányadossal egyenlő.

### Feladatok

Számítsuk ki az alábbi függvények differenciálhányadosát az  $x_0 = 2$  pontban a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2)$$

határérték segítségével:

- |                       |                         |
|-----------------------|-------------------------|
| 1.° $f(x) = 4,$       | 2.° $f(x) = 4x + 2,$    |
| 3. $f(x) = 2x^3 - 1,$ | 4. $f(x) = \sqrt{x-1},$ |
| 5. $f(x) = x^{-2},$   | 6.° $f(x) = \sin x.$    |

Számítsuk ki az alábbi függvények differenciálhányadosát az  $x_0$  pontban a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

határérték segítségével:

- |                      |                                   |
|----------------------|-----------------------------------|
| 7.° $f(x) = x^3,$    | 8.° $f(x) = \sqrt{x},$            |
| 9.° $f(x) = \sin x,$ | 10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},$  |
| 11. $f(x) = \cos x,$ | 12. $f(x) = \operatorname{tg} x.$ |

Bizonyítsuk be, hogy

- |   |  |
|---|--|
| 13.° $(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbf{N}^+,$ | 14.° $(x^{\frac{1}{m}})' = \frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}, \quad x > 0, \quad m \in \mathbf{N}^+.$ |
|---|--|

Határozzuk meg az alábbi  $f$  függvények  $x_0$  pontbeli differenciálhányadosát a törtmentes alak (D 9.2) segítségével:

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(x)\Delta x,$$

ahol  $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ ,  $\Delta x = x - x_0$ ,  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$  ha  $x \rightarrow x_0$ . (Ellenőrizzük, hogy  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$  valóban fennáll!)

- |   |   |
|---|---|
| 15.° $f(x) = 3x^2 - 2x + 1,$                | 16. $f(x) = x^3 + x,$                       |
| 17.° $f(x) = \sin x, [f'(x_0) = \cos x_0],$ | 18. $f(x) = \cos x, [f'(x_0) = -\sin x_0].$ |
- 19.° Legyen  $h(x)$  folytonos az  $x_0$  helyen. Határozzuk meg  $f'(x_0)$  értékét, ha

$$f(x) = (x - x_0)h(x),$$

9. Differenciálhányados, derivált — A differenciálhányados definíciója

és mutassuk meg, hogy a  $g(x) = |x - x_0|h(x)$  függvény csak akkor differenciálható  $x_0$ -ban, ha  $h(x_0) = 0$ .

20<sup>?</sup> A D 9.1 definíció felhasználásával mutassuk meg, hogy ha  $\text{Dom } f = \mathbf{R}$  és  $\forall x \in \mathbf{R}$  esetén  $f(x) = f(-x)$ , akkor  $f'(x) = -f'(-x)$ , ha pedig  $\forall x \in \mathbf{R}$  esetén  $f(x) = -f(-x)$ , akkor  $f'(x) = f'(-x)$ . (Páros függvény deriváltja páratlan, páratlané páros.)

21. Tegyük fel, hogy  $f$  differenciálható az  $a$  pontban. Fejezzük ki a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$$

kifejezést  $f'(a)$  segítségével.

22<sup>\*</sup> Tegyük fel, hogy  $f$  differenciálható az  $a$  pontban, és

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{ha } x \neq a \\ f'(a) & \text{ha } x = a. \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy  $g$  folytonos  $a$ -ban.

Adjunk példát olyan  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  függvényre, mely mindenütt értelmezve van és amely kielégíti az alábbi feltételt:

- 23.  $f$  mindenütt folytonos, de az  $x_0 = 1$  pontban nem differenciálható;
- 24.  $f$  mindenütt differenciálható, de az  $x_0 = 1$  pontban nem folytonos;
- 25.  $f$  mindenütt differenciálható, és deriváltja mindenütt folytonos;
- 26.  $f$  mindenütt differenciálható, de deriváltja az  $x_0 = 0$  pontban nem differenciálható.

A D 9.6 definíció alapján határozzuk meg az alábbi függvények parciális deriváltjait és azok értékét a megadott  $P$  pontban:

27<sup>?</sup>  $f : (x, y) \mapsto xy, \quad P(1, 2),$       28.  $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2, \quad P(0, 0),$

29.  $f(x, y) = 4x + 2y - 1, \quad P(1, 1),$       30<sup>?</sup>  $f(x, y, z) = xyz, \quad P(1, 2, 3),$

31.  $f : (x, y, z) \mapsto 3x - 4y + 2z - 6, \quad P(0, 0, 0),$

32.  $f : (x, y, z) \mapsto 0, \quad P(1, 1, 1).$

33<sup>?</sup> Legyen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ a, & \text{ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Határozzuk meg  $a$  értékét úgy, hogy  $f$  mindkét parciális differenciálhányadosa létezzék a  $(0, 0)$  pontban, és számítsuk ki ezeket a parciális differenciálhányadosokat.

## Differenciálási szabályok

**T 9.7** Konstans függvény deriváltja az azonosan 0 függvény. Két differenciálható függvény összege, különbsége, szorzata ugyancsak differenciálható, két differenciálható függvény hányadosa, ill. differenciálható függvény reciproka minden olyan helyen differenciálható, ahol a nevező nem 0. Ha  $f$  és  $g$  két differenciálható függvény és  $c \in \mathbf{R}$ , akkor

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (cf)' = cf', \quad (fg)' = f'g + fg',$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}, \quad (f^n)' = n f^{n-1} f' \quad (n \in \mathbf{Z}).$$

**T 9.8**  $(\sin x)' = \cos x$ ,  $(\cos x)' = -\sin x$ .

**T 9.9**  $(x^q)' = qx^{q-1}$ , ha  $q$  racionális szám,  $x > 0$ . (l. 34. feladat).

**D 9.10** Az  $f$  külső és  $g$  belső függvényből összetett  $f \circ g$  függvényen azt a függvényt értjük, melynek értelmezési tartománya  $g$  értelmezési tartományának azon  $x_0$  pontjaiból áll, melyekre  $g(x_0)$  benne van  $f$  értelmezési tartományában, azaz

$$\text{Dom } f \circ g = \{x_0 \in \text{Dom } g; g(x_0) \in \text{Dom } f\},$$

és amelyre  $x_0 \in \text{Dom } f \circ g$  esetén  $(f \circ g)(x_0) = f(g(x_0))$ .

**T 9.11** Ha  $g$  folytonos  $x_0$ -ban,  $f$  folytonos a  $g(x_0)$  pontban, akkor  $f \circ g$  folytonos  $x_0$ -ban.

**T 9.12** Ha a  $g: x \mapsto g(x)$  függvény differenciálható  $x_0$ -ban, az  $f: u \mapsto f(u)$  függvény pedig az  $u_0 = g(x_0)$  pontban, akkor  $f \circ g$  differenciálható  $x_0$ -ban, és

$$\left(\frac{d(f \circ g)}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{df}{du}\right)_{u=g(x_0)} \left(\frac{dg}{dx}\right)_{x=x_0}.$$

Tehát minden ilyen  $x_0$  pontban:  $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$ .

### Feladatok

34.<sup>p</sup> Bizonyítsuk be a T 9.9 tételt a T 9.7-beli szabályok és a 14. feladat eredményének felhasználásával.

35.<sup>s</sup> Számítsuk ki az  $f(x) = x^{\frac{n}{m}}$  függvény deriváltját, ha  $m, n \in \mathbf{N}^+$ ,  $m$  páratlan és  $x \in \mathbf{R}$ .

Deriváljuk az alábbi függvényeket a T 9.7-9-beli szabályok felhasználásával.

36.  $x^2 - 2x + 3$ ,

37.  $7 - x - x^3$ ,

38.  $2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{2}{3}}$ ,

39.  $2x^{\frac{3}{2}} + \sqrt{2x}$ ,

40.  $\frac{1}{x} + \sqrt{x^5}$ ,

41.  $(x+2)\sqrt{x^3}$ ,

42.  $x \sin x$ ,

43.  $(x^3 + 1) \cos x$ ,

44.  $\frac{\sin x}{x}$ ,

9. Differenciálhányados, derivált — Differenciálási szabályok

45.  $\operatorname{tg} x$ , 46.  $\operatorname{ctg} x$ , 47.  $\frac{\sin x + 1}{\cos x - 1}$ ,  
 48.  $\frac{x-1}{x^2}$ , 49.  $\frac{x^3+4}{1+2x}$ , 50.  $(x+3)^4$ ,  
 51.  $(1-x)^{20}$ , 52.  $(x^2+1)^4$ , 53.  $(1-x^2)^{10}$ ,  
 54.  $(7x^2 - \frac{4}{x} + 6)^6$ , 55.  $(\frac{x+1}{x-1})^2$ , 56.  $(\frac{x^2+1}{x+1})^5$ ,  
 57.  $(\sin x + 1)^{20}$ , 58.  $(\sin^{20} x + 1)^{20}$ , 59.  $\operatorname{tg}^n x$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$ ,  
 60.  $\operatorname{ctg}^5 x$ .

Legyen  $f$  differenciálható függvény. Írjuk fel  $f'$ -vel kifejezve az alábbi függvények deriváltját:

61.  $f(-x)$ , 62.  $f(x^2)$ , 63.  $f(ax)$ ,  
 64.  $f(1/x)$ , 65.  $f(\sin^2 x)$ , 66.  $f(\sqrt{1-x^2})$ .

Határozzuk meg az alábbi függvény deriváltját:

67.  $F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$ , 68.  $F(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}$ .

69. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f'_{21}(x) & f'_{22}(x) \end{vmatrix}.$$

Állapítsuk meg, hogy mely függvények összetételéből származnak az alábbi függvények, majd számítsuk ki a deriváltjukat:

70.  $f(x) = \sin^3 x$ , 71.  $f(x) = \sin x^3$ , 72.  $f(x) = \sin(\operatorname{tg} x)$ ,  
 73.  $f(x) = \sin^2(\operatorname{tg} x)$ , 74.  $f(x) = \sin(\operatorname{tg}^2 x)$ , 75.  $f(x) = \sin(\operatorname{tg} x^2)$ .

Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltjának értelmezési tartományát! Vegyük észre, hogy ez egyik esetben sem egyezik meg a függvény értelmezési tartományával!

76.  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ , 77.  $f(t) = \sqrt{1-a^2t^2}$ ,  $a \neq 0$ ,

78.  $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ , 79.  $f(v) = (3v+18v^2)^{\frac{1}{3}}$ ,

80.  $f(x) = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{-\frac{2}{3}}$ , ahol  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , és  $ac \neq 0$ ,

81.  $g(t) = \sqrt{1+\sin t}$ .

Számítsuk ki az alábbi függvények parciális deriváltjait.

82.  $f(x, y) = 3x^2 + xy - 2y^3$ , 83.  $g(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$ ,  
 84.  $\rho(\varphi, \psi) = \sin \varphi \cos \psi$ , 85.  $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ ,  
 86.  $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ , 87.  $f(x, y, z) = x \sin(xyz)$ ,

88.  $g(x, y) = \frac{ax + by}{cx + dy}$ ,                      89.  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ,  
 90.  $h(x, y) = f^2(x)g(y)$ ,                      91.  $h(x, y, z) = f^2(x, y)g^3(y, z)$ ,  
 92.  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$ ,                      93.  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1x_2 \dots x_n$ ,  
 94.  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ , ( $a_i \in \mathbf{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Határozzuk meg  $f_x(0, 0)$  és  $f_y(0, 0)$  értékét, ha

95.  $f(x, y) = \sqrt[3]{(x+1)(y-1)}$ ,                      96.\*  $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ ,

97.  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ ,                      98.  $f(x, y) = \sqrt{|x|}$ .

99.† Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény differenciálható minden  $x \in \mathbf{R}$  pontban, de a derivált nem folytonos az  $x_0 = 0$  pontban.

100. Mutassuk meg, hogy az  $x_0 = 0$  pont tetszőleges környezetében található olyan hely, ahol az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 |\sin \frac{1}{x}|, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény nem differenciálható, de a 0-ban mégis differenciálható.

A mértani sorozat összegképletéből, azaz az

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad (x \neq 1)$$

képletből vezessünk le formulát az alábbi két összegre:

101.†  $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$ ,                      102.\*  $1 + 4x + 9x^2 + \dots + n^2x^{n-1}$ .

103.† A  $2 \sin x \cos kx = \sin(k+1)x - \sin(k-1)x$  azonosság felhasználásával bizonyítsuk be, hogy

$$\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x} \quad (x \neq k\pi),$$

és ennek segítségével számítsuk ki az alábbi összeget:

$$\sin x + 3 \sin 3x + \dots + (2n-1) \sin(2n-1)x.$$

Számítsuk ki az alábbi magasabb rendű deriváltakat:

104.  $(\sin(3x+1))^{(4)}$ ,                      105.  $(\cos(4-2x))^{(7)}$ ,

106.  $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(5)}$ ,                      107.  $(\sqrt{x})^{(10)}$

Számítsuk ki az alábbi függvények másodrendű parciális deriváltjait:

108.  $f(x, y) = x^4 + xy^3$ ,                      109.  $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ ,

110.  $f(x, y) = \sin x^2 y,$

111.  $f(x, y) = \frac{\cos x^2}{y},$

112.  $f(x, y, z) = (x + y^2 + z^3)^2.$

Számítsuk ki az alábbi függvények megadott magasabbrendű parciális deriváltjait:

113.  $g(x, y) = x^3 \sin y + y^3 \sin x, \quad \frac{\partial^6 g}{\partial x^3 \partial y^3},$

114.  $f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y},$

115.  $f(x, y) = (x - x_0)^n (y - y_0)^m, \quad \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^n \partial y^m} \quad (m, n \in \mathbf{N}),$

116.\*  $f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}, \quad \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} \quad (m, n \in \mathbf{N}, m + n > 0).$

Mutassuk meg, hogy tetszőleges  $c, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$  konstansok esetén az alábbi függvények kielégítik a megadott egyenleteket:

117.<sup>p</sup>  $y(x) = cx^2, \quad y'(x)x - 2y(x) = 0 \quad (x \in \mathbf{R}),$

118.  $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad y'' + y = 0 \quad (x \in \mathbf{R}),$

119.  $y(x) = c_1 x + \frac{c_2}{x}, \quad x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0 \quad (x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}),$

120.  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$  (Laplace egyenlet),

121.  $f(x, t) = (c_1 x + c_2)(c_3 t + c_4) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$  (hullámegyenlet),

122.  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$

Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket ( $m, n \in \mathbf{N}, a \in \mathbf{R}$ )!

123.<sup>p</sup>  $(x^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n} \quad (m \geq n),$

124.  $(x^n)^{(n)} = n!,$

125.<sup>p</sup>  $\left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x-a)^{n+1}},$

126.<sup>p</sup>  $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$

127.  $(\cos ax)^{(n)} = a^n \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right).$

Alkalmas átalakítás után, az előző feladatok eredményeit felhasználva számítsuk ki az alábbi függvények  $n$ -edik deriváltját:

128.\*  $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \quad 129. \sin x \cos x,$

130.\*  $\sin 3x \cos 2x,$

131.\*  $\cos ax \cos bx,$

132.  $\frac{x}{x^2 - 1}, \quad |x| \neq 1,$

133.  $\frac{2x + 1}{x^2 + x - 2}, \quad x \neq -2, x \neq 1.$

134. Határozzuk meg az  $\frac{ax + b}{cx + d}$  függvény  $n$ -edik deriváltját! Ehhez bizonyítsuk be

és használjuk fel, hogy  $c \neq 0$  esetén  $\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} (cx + d)^{-1}.$



135.<sup>b</sup> **Leibniz formula:** Ha  $f$  és  $g$   $n$ -szer differenciálható függvények, akkor  $fg$  is:

$$(fg)^{(n)} = \binom{n}{0} f^{(n)}g + \binom{n}{1} f^{(n-1)}g' + \dots + \binom{n}{n} fg^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}g^{(k)}.$$

Az előző feladatbeli Leibniz-formulát felhasználva határozzuk meg az alábbi deriváltakat:

136.<sup>b</sup>  $(x^2 \sin x)''$ ,

137.  $(x \sin x)^{(25)}$ ,

138.  $(x^2 \sin x)^{(25)}$ ,

139.  $(\sin 2x \cos(x+1))'''$ .

Számítsuk ki az alábbi  $f$  függvények összes magasabb rendű deriváltját, és azok értékét az  $x = 0$  pontban:

140.  $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$ ,

141.<sup>o</sup>  $f(x) = x|x|$ ,

142.  $f(x) = \sin x$ ,

143.  $f(x) = \cos x$ .

144.<sup>b</sup> Mutassuk meg, hogy az  $f_1(x) = x^{\frac{4}{3}}$  függvény differenciálható 0-ban, de kétszer nem, az  $f_2(x) = x^{\frac{7}{3}}$  függvény kétszer differenciálható 0-ban, de háromszor nem. Keressünk olyan  $k$  számot, hogy az  $f_3(x) = x^k$  függvény  $(n-1)$ -szer legyen differenciálható 0-ban, de ne legyen differenciálható  $n$ -szer.

## A differenciálszámítás középértéktételei

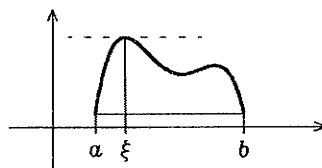
### T 9.13 (Rolle-féle középértéktétel)

Ha az egyváltozós valós  $f$  függvény

1. folytonos az  $[a, b]$  intervallumon,
2. differenciálható az  $(a, b)$  intervallumon,
3.  $f(a) = f(b)$ ,

akkor van legalább egy olyan  $c \in (a, b)$  hely, ahol

$$f'(c) = 0.$$

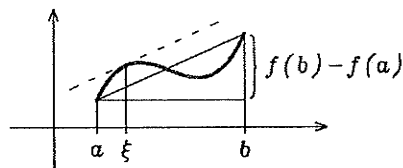


### T 9.14 (Lagrange-féle középértéktétel)

Ha az egyváltozós valós  $f$  függvény

1. folytonos az  $[a, b]$  intervallumon,
  2. differenciálható az  $(a, b)$  intervallumon,
- akkor van legalább egy olyan  $c \in (a, b)$  hely, ahol

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



### T 9.15 (Cauchy-féle középértéktétel)

Ha az egyváltozós valós  $f$  és  $g$  függvények

1. folytonosak az  $[a, b]$  intervallumon,
2. differenciálhatóak az  $(a, b)$  intervallumon,
3. és  $x \in (a, b)$  esetén  $g'(x) \neq 0$ ,

akkor van legalább egy olyan  $c \in (a, b)$  hely, ahol  $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ .

**Feladatok**

Eleget tesznek-e az alábbi függvények a Rolle-tétel feltételeinek az adott intervallumon? Ha igen, adjunk meg egy  $c$  értéket, ahol  $f'(c) = 0$ .

145.  $f(x) = 1 - |x|$ ,  $[-1, 1]$ ,                      146.  $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ ,  $[-1, 1]$ ,  
 147.  $f(x) = \sin x$ ,  $[0, \pi]$ ,                      148.  $f(x) = |\sin x|$ ,  $[0, 2\pi]$ .

Ellenőrizzük a Lagrange-tétel feltételeit és konklúzióját az alábbi függvényekkel, a megadott intervallumokon:

149.  $f(x) = 3x^2 - 5$ ,  $[-2, 0]$ ,                      150.  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $[-1, 1]$ ,  
 151.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $[-1, 8]$ ,                      152.  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ,  $[-1, 8]$ .

Ellenőrizzük a Cauchy-tétel feltételeit és konklúzióját az alábbi függvényekkel, a megadott intervallumokon:

153.  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ,  $g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ ,  $[1, 4]$ ,  
 154.  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ,  $g(x) = x$ ,  $[-1, 8]$ ,                      155.  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x^3$ ,  $[-1, 1]$ .

A Rolle-tétel segítségével bizonyítsuk be az alábbi állításokat:

156.  $a$   $3x^5 + 15x - 2 = 0$  egyenletnek pontosan egy valós gyöke van;  
 157. az

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény deriváltjának végtelen sok zérushelye van a  $(0, 1)$  intervallumban;

158.  $a$   $c_1 + c_2x + \dots + c_nx^{n-1} = 0$ ,  $(c_1, \dots, c_n \in \mathbf{R})$  egyenletnek van gyöke a  $(0, 1)$  intervallumban, ha  $c_1 + \frac{c_2}{2} + \dots + \frac{c_n}{n} = 0$ .

A Lagrange-féle középértéktétel segítségével bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenségeket:

159.  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ,  $x, y \in \mathbf{R}$ ,  
 160.  $|\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y| \geq |x + y|$ ,  $x, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  
 161.  $\sqrt{xy} < \frac{x+y}{2}$ ,  $x, y > 0$ ,  $x \neq y$ .

162. Tegyük fel, hogy  $f$  értelmezve van és differenciálható minden  $x > 0$  esetén, és hogy  $f'(x) \rightarrow 0$ , ha  $x \rightarrow \infty$ . Bizonyítsuk be, hogy  $f(x+1) - f(x) \rightarrow 0$ , ha  $x \rightarrow \infty$ .

## Differenciálható függvények monotonitása

**T 9.16** Legyen  $f$  differenciálható az  $(a, b)$  intervallumon. Az  $f$  függvény pontosan akkor monoton növekvő [csökkenő] az  $(a, b)$  intervallumon, ha  $f'(x) \geq 0$  [ $f'(x) \leq 0$ ] az  $(a, b)$  minden  $x$  pontjában.

**T 9.17** Ha az  $(a, b)$  intervallumon  $f$  differenciálható, és minden  $x \in (a, b)$  esetén  $f'(x) > 0$  [ $f'(x) < 0$ ], akkor  $f$  szigorúan monoton növekszik [csökken] az  $(a, b)$  intervallumon.

**T 9.18** Ha az  $f$  függvény deriváltja az  $(a, b)$  intervallum minden pontjában 0, akkor  $f$  konstans az  $(a, b)$  intervallumon.

### Feladatok

A deriváltak segítségével állapítsuk meg, hogy az alábbi függvények értelmezési tartományuk mely részhalmazán (szigorúan) monoton növekvőek és melyeken (szigorúan) monoton csökkenőek:

$$163. f(x) = x^3 - 3x^2 + 1,$$

$$164. f(x) = (x + 2)^3,$$

$$165. f(x) = \frac{x}{x^2 + 4},$$

$$166. f(x) = \sin^2 2x, \quad 0 < x < \pi,$$

$$167. f(x) = \sqrt[3]{x + 2},$$

$$168. f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x + 4).$$

Igazoljuk a következő egyenlőtlenségeket:

$$169. x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x, \quad \text{ha } x > 0,$$

$$170. x + \frac{x^3}{3} > \operatorname{tg} x, \quad \text{ha } 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

$$171. x^\alpha - 1 > \alpha(x - 1), \quad \text{ha } \alpha > 1, \quad x > 1.$$

172.\* Bizonyítsuk be, hogy a

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \quad (n \geq 1, a_0 \neq 0)$$

polinomfüggvény szigorúan monoton a  $(-\infty, -b)$  és a  $(b, \infty)$  intervallumokon, ha  $b$  legendően nagy pozitív szám.

## Implicit és inverz függvény differenciálása

**P 9.19** Ha egy  $F(x, y) = 0$  egyenlettel implicit módon megadott  $x \mapsto y(x)$  függvény az egyenletből kifejezhető egy  $I$  intervallum fölött, akkor ott az  $y'(x)$  derivált a már ismert módon számítható. Például:

$$xy - 1 = 0 \implies y(x) = \frac{1}{x} \implies y'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

## 9. Differenciálhányados, derivált — Implicit és inverz függvény differenciálása

Az  $y'(x)$  függvény úgy is kiszámítható, hogy  $F(x, y(x))$ -et összetett függvényként  $x$  szerint differenciáljuk. Például:

$$(xy(x) - 1)' = y(x) + xy'(x) = 0 \implies y'(x) = -\frac{y(x)}{x}.$$

Ez megegyezik az előző eredménnyel, hisz  $y(x) = 1/x$  behelyettesítése után  $y'(x) = -1/x^2$  adódik. Azzal a kérdéssel, hogy egy  $F(x, y) = 0$  alakú egyenlet mikor ír le függvénykapcsolatot és hogy  $y(x)$  mikor fejezhető ki ebből az egyenletből, nem foglalkozunk.

**D 9.20** Az  $f$  függvény az értelmezési tartományának egy  $H$  részalmazán invertálható, ha tetszőleges két  $x_1, x_2 \in H$  elem esetén

$$f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2.$$

Ha  $f$  invertálható a  $H$  halmazon, akkor a  $f|_H$  (azaz a  $H$ -ra korlátozott  $f$ ) függvény **inverzén** azt a  $\varphi$  függvényt értjük, melyre

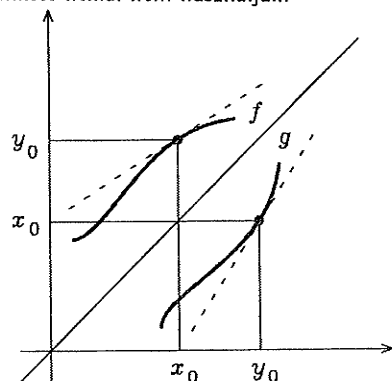
$$1. \text{ Dom } \varphi = \{f(x); x \in H\},$$

$$2. y_0 \in \text{Dom } \varphi \text{ esetén } \varphi(y_0) = x_0 \iff f(x_0) = y_0.$$

Az  $f$  függvény inverzére az  $f^{-1}$  jelölés használatos. Ez összetéveszthető a reciprok jelölésével, ezért példatárunk e pontját kivéve e jelölést külön említés nélkül nem használjuk.

**T 9.21** Az egyváltozós valós  $f$  függvény legyen invertálható az  $x_0$  pontot tartalmazó valamely  $H \subseteq \text{Dom } f$  halmazon, és legyen  $g$  az  $f|_H$  függvény inverze. Ha az  $f$  függvény differenciálható az  $x_0$  pont valamely teljes környezetében, és  $f'(x_0) \neq 0$ , akkor  $g$  differenciálható az  $y_0 = f(x_0)$  pontban, és

$$\left(\frac{dg}{dy}\right)_{y=y_0} = \frac{1}{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}}.$$



### Feladatok

Számítsuk ki az alábbi, implicit alakban adott  $x \mapsto y(x)$  függvények deriváltját:

$$173. x^2y + 3xy^3 - x = 3,$$

$$174. \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1,$$

$$175. 3xy = (x^3 + y^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$176. \sin(x^2y^2) = x.$$

Számítsuk ki az alábbi, implicit alakban adott  $x \mapsto y(x)$  függvények második deriváltját:

$$177. 2xy - y^2 = 3,$$

$$178. x \cos y = y.$$

Határozzuk meg az alábbi  $f(x)$  függvények  $f^{-1}(x)$  inverzét:

$$179. f(x) = x^2 + 1, x \geq 0,$$

$$180. f(x) = x^2 - 6x + 8, x \geq 3,$$

$$181. f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbf{R}, ad - bc \neq 0).$$

Az eredeti és az inverz függvény közötti kapcsolat segítségével mutassuk meg, hogy az alábbi függvények grafikonja szimmetrikus az  $y = x$  egyenesre:

$$182^\circ f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}, \quad (a, b, c \in \mathbf{R}), \quad 183. f(x) = \frac{3-x}{1-x}.$$

184. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ irracionális,} \\ -x, & \text{ha } x \text{ racionális} \end{cases} \quad x \in \mathbf{R}$$

függvény invertálható, de nem monoton  $\mathbf{R}$ -en.

185. Mutassuk meg, hogy ha  $f$  nem monoton, akkor van három olyan  $x_1, x_2, x_3$  pont, hogy  $x_2 \in (x_1, x_3)$ , de  $f(x_2) \notin (f(x_1), f(x_3))$ .

186. Mutassuk meg, hogy egy intervallumon értelmezett folytonos  $f$  függvény pontosan akkor invertálható, ha szigorúan monoton.

Határozzuk meg az alábbi függvények inverzének deriváltját és annak értékét a megadott  $x_0$ -hoz tartozó  $y_0 = f(x_0)$  pontban, és ellenőrizzük az eredményt implicit függvény deriválásával:

$$187^\circ f(x) = 5x^3 + x - 7, \quad x \in \mathbf{R}, \quad x_0 = 1,$$

$$188. f(x) = \operatorname{tg} 2x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \quad x_0 = \frac{\pi}{8},$$

$$189. f(x) = 7x - \sin 3x, \quad x \in \mathbf{R}, \quad x_0 = 0,$$

$$190. f(x) = 2x^5 + x^3 + 1, \quad x \in \mathbf{R}, \quad x_0 = 1.$$

191 $^\circ$  Tegyük fel, hogy az  $f : B \rightarrow C$  és a  $g : A \rightarrow B$  függvények kölcsönösen egyértelmű leképezések az adott halmazok között. Mutassuk meg, hogy  $f \circ g$  is kölcsönösen egyértelmű függvény, és

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

192 $^\circ$  Igazoljuk, hogy az  $f : x \mapsto x^4 + x^3 + 1$ ,  $x \in (0, 3)$  függvény szigorúan monoton növekedő. Képezzük az  $F(x) = f(2g(x))$  függvényt, ahol  $g$  az  $f$  inverze, és határozzuk meg az  $F'(3)$  értéket.

## Görbék érintkezése, érintő, simulókör

**T 9.22** Ha az egyváltozós valós  $f$  függvény az  $x_0$  helyen differenciálható, akkor az  $f$  grafikonjának az  $x_0$  abszcisszájú pontban van érintője, és az érintő iránytangense éppen  $f'(x_0)$ . Így az érintő egyenlete:  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ , míg az érintőre merőleges u.n. normális egyenes egyenlete:  $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ , ha  $f'(x_0) \neq 0$ , és  $x = x_0$ , ha  $f'(x_0) = 0$ .

**D 9.23** Ha két görbe közös pontja  $M$ , és mindkettőnek van érintője e pontban, akkor a görbék  $M$  pontnál bezárt szögén az érintőik által bezárt szöget értjük. Ha e szög  $0$ , akkor azt mondjuk, hogy a két görbe az  $M$  pontban érinti egymást.

**D 9.24** Legyenek  $f$  és  $g$  az  $x_0$  helyen legalább  $r$ -szer differenciálható valós függvények, amelyekre  $0 \leq k \leq r$  esetén  $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$ . Ha az  $f^{(r+1)}(x_0)$  és a  $g^{(r+1)}(x_0)$  differenciálhányadosok nem mindketten léteznek, vagy ha mindkettő létezik, nem egyeznek meg, akkor

azt mondjuk, hogy az  $y = f(x)$  és az  $y = g(x)$  egyenletű görbék az  $x_0$  helyen  $r$ -edrendben érintik egymást.

**T 9.25** Ha az egyváltozós valós  $f$  függvény az  $x_0$  helyen legalább kétszer differenciálható, és  $f''(x_0) \neq 0$ , akkor az  $y = f(x)$  egyenletű görbének az  $x_0$  helyen egyértelműen meghatározott simulóköre — azaz a görbét legalább másodrendben érintő köre — van, és ennek a körnek a sugara és középpontjának koordinátái:

$$r(x_0) = \frac{(1 + f'^2(x_0))^{3/2}}{|f''(x_0)|}, \quad \left( x_0 - \frac{f'(x_0)(1 + f'^2(x_0))}{f''(x_0)}, f(x_0) + \frac{1 + f'^2(x_0)}{f''(x_0)} \right).$$

**T 9.26** Ha az  $f$  függvény legalább  $n$ -szer differenciálható és  $f(c) \neq 0$ , akkor az

$$y = (x - c)^n f(x), \quad \text{és az } y = (x - c)^n f(c)$$

egyenletű görbék legalább  $n$ -edrendben érintik egymást.

### Feladatok

Határozzuk meg az alábbi függvények grafikonjának érintőjét és normálisát az adott  $x_0$  abszcisszájú pontban:

193.  $f(x) = \sin \sqrt{x}$ ,  $x_0 = \pi^2$ ,

194.  $f(x) = \sin \frac{\pi^2}{x}$ ,  $x_0 = \pi$ ,

195.  $f(x) = x^3 - 8x$ ,  $x_0 = 3$ .

Írjuk fel az alábbi egyenletű síkgörbék adott pontbeli érintőjének és normálisának egyenletét:

196<sup>†</sup>  $x^3 + y^3 - 6xy = 0$ ,  $(3, 3)$ ,

197.  $y = \sin(x + y)$ ,  $(\pi, 0)$ .

198<sup>†</sup> Legyen  $f$  pozitív értékű, differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy az  $f(x)$  és az  $f(x) \sin ax$  ( $a \neq 0$ ) függvények grafikonjai metszéspontjaikban érintik egymást.

199<sup>†</sup> Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, mely átmege az origón és érinti az  $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$  egyenletű görbét.

200. Milyen összefüggés áll fenn  $a$ ,  $b$  és  $c$  között, ha az  $f(x) = ax^2 + bx + c$  egyenletű parabola érinti az  $x$ -tengelyt?

201<sup>†</sup> Igazoljuk, hogy ha az  $y(x) = x^3 + px + q$  egyenletű harmadfokú görbe érinti az  $x$ -tengelyt, akkor  $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{4}\right)^2 = 0$ .

Mutassuk meg, hogy az alábbi függvények grafikonjai  $k$ -adrendben érintik egymást az  $x_0 = 0$  helyen:

202.  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ ,  $k = 4$ ,

203.  $f(x) = \cos x$ ,  $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ ,  $k = 5$ ,

204.  $f(x) = 1 + x + x^2$ ,  $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ ,  $k = 2$ ,

205.  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $k = 2$ .

Hányad rendben érintik egymást az alábbi függvények grafikonjai a megadott pontban:

206.  $x^3 \cos x$ ,  $x^2$ ,  $a = 0$ ,

207.  $(x-1)(|x-1|+1)$ ,  $x-1$ ,  $a = 1$ .

Határozzuk meg az alábbi egyenletekkel adott görbék metszési szögeit:

208.  $y^2 = 4x - x^2$ ,  $x^2 + y^2 = 8$ ,

209.  $2x^2 + y^2 = 20$ ,  $4y^2 - x^2 = 8$ ,

210.  $xy = 12$ ,  $x^2 + y^2 = 25$ .

Az alábbi görbék adott  $P$  pontjaiban számítsuk ki a görbületi sugarat és a simulókör középpontjának koordinátáit:

211.  $6y = x^3 - 12x - 2$ ,  $P(2, -3)$ ,

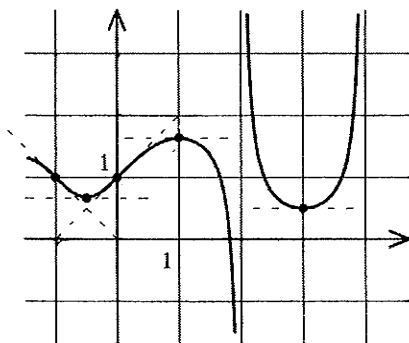
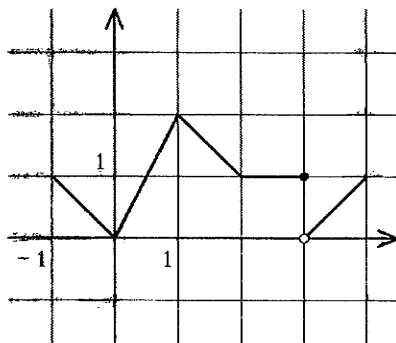
212.  $y^2 = 2px$ ,  $(p > 0)$ ,  $P(x, y)$ ,

213.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $P(0, b)$ ,

214.  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $P(a, 0)$ .

### Vegyes feladatok

215. Vázzuk fel szabad kézzel az alábbi grafikonokról leolvasható információk, valamint a differenciálhányados geometriai jelentése alapján az ábrázolt függvények deriváltfüggvényét!



216. Határozzuk meg  $a$  és  $b$  értékét úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \leq x_0 \\ ax + b, & \text{ha } x > x_0 \end{cases}$$

függvény differenciálható legyen  $x_0$ -ban.

217. Legyen  $f$  differenciálható  $x_0$ -ban. Mutassuk meg, hogy a

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ha } x \leq x_0 \\ f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) & \text{ha } x > x_0 \end{cases}$$

9. Differenciálhányados, derivált — Vegyes feladatok

függvény differenciálható  $x_0$ -ban. Határozzuk meg  $g'(x_0)$ -t! Vázzoljuk fel  $g$  grafikonját!

218.<sup>o</sup> Határozzuk meg az  $a$  és  $b$  paraméterek értékét úgy, hogy az

$$y = \begin{cases} m^2/|x|, & \text{ha } |x| > c \\ ax^2 + b, & \text{ha } |x| \leq c \end{cases}$$

egyenletű görbe folytonos, és minden pontjában érintővel rendelkező legyen.

219.<sup>o</sup> Legyen  $f$  kétszer differenciálható minden  $x \leq x_0$  pontban. Határozzuk meg az  $a$ ,  $b$  és  $c$  paraméterek értékét úgy, hogy a

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \leq x_0 \\ a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c, & \text{ha } x > x_0 \end{cases}$$

függvény kétszer legyen differenciálható  $x_0$ -ban.

220. Igaz-e, hogy az  $F(x) = f(x) + g(x)$  függvény nem differenciálható  $x_0$ -ban, ha

a)  $f(x)$  differenciálható  $x_0$ -ban, de  $g(x)$  nem,

b) sem  $f(x)$ , sem  $g(x)$  nem differenciálható  $x_0$ -ban.

221. Igaz-e, hogy az  $F(x) = f(x)g(x)$  függvény nem differenciálható  $x_0$ -ban, ha

a)  $f(x)$  differenciálható  $x_0$ -ban, de  $g(x)$  nem,

b) sem  $f(x)$ , sem  $g(x)$  nem differenciálható  $x_0$ -ban.

Vizsgáljuk me az a)  $f(x) = x$ ,  $g(x) = |x|$ , b)  $f(x) = g(x) = |x|$  függvényeket a 0 pontban.

222. Igaz-e, hogy az  $F(x) = f(g(x))$  függvény nem differenciálható  $x_0$ -ban, ha

a)  $f(x)$  differenciálható  $g(x_0)$ -ban, de  $g(x)$  nem differenciálható  $x_0$ -ban,

b)  $f(x)$  nem differenciálható  $g(x_0)$ -ban, de  $g(x)$  differenciálható  $x_0$ -ban,

c)  $f(x)$  nem differenciálható  $g(x_0)$ -ban, és  $g(x)$  sem differenciálható  $x_0$ -ban.

Vizsgáljuk me az a)  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = |x|$ , b)  $f(x) = |x|$ ,  $g(x) = x^2$ , c)  $f(x) = 2x + |x|$ ,  $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|$  függvényeket a 0 pontban.

223. Legyenek  $f$  és  $g$  háromszor differenciálható függvények, és legyen  $F : x \mapsto f(g(x))$ . Határozzuk még az  $F''$  és  $F'''$  függvényeket.



## 10. fejezet

# Egyváltozós valós elemi függvények

## Racionális függvények

**D 10.1** Valós [komplex] együtthatós  $n$ -edfokú racionális egész függvényen, más néven polinomfüggvényen olyan,

$$f(x) := a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_0 \neq 0, \quad n \in \mathbf{N}$$

alakú függvényt értünk, amelyben az  $a_0, \dots, a_n$  együtthatók adott valós [komplex] számok,  $x$  értéke pedig tetszőleges valós [komplex] értéket felvehet. Az  $n$  számot  $f$  fokszámának nevezzük, és  $f^*$ -gal jelöljük. A zérusfüggvény foka  $-\infty$ . Az  $a_0$  együtthatót a polinom főegyütthatójának nevezzük. Racionális függvényen két polinomfüggvény hányadosát értjük, amit racionális törtfüggvénynek hívunk, ha a nevező nem konstansfüggvény.

**D 10.2** Az  $f$  polinomfüggvény  $g$  polinomfüggvénnyel való maradékos osztásán olyan  $q$  és  $r$  polinomfüggvények meghatározását értjük, amelyekkel  $f = gq + r$ , és  $r^* < g^*$ . (E maradékos osztás egyértelműen elvégezhető, ha  $g$  nem a zérusfüggvény.)

**T 10.3** Az egyváltozós valós (vagy komplex)  $f$  polinomfüggvénynek az  $(x - c)$  elsőfokú polinomfüggvénnyel való maradékos osztásának maradéka az  $f(c)$  értékű konstansfüggvény.

**T 10.4** Polinomfüggvény gyöktényezős alakja: Minden valós vagy komplex együtthatós nemkonstans egyváltozós  $n$ -edfokú  $f$  polinomfüggvényhez található olyan  $c_1, c_2, \dots, c_s \in \mathbf{C}$ , ( $s \leq n$ ), és  $k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbf{N}^+$  számok, hogy minden  $x$ -re

$$f(x) = a_0(x - c_1)^{k_1}(x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_s)^{k_s},$$

ahol  $a_0$  az  $f$  polinom főegyütthatója, és  $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$ . (A  $c_j$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ) számot az  $f$  polinom  $k_j$ -szeres zérushelyének nevezzük.) Ha  $f$  minden együtthatója valós, és a nemvalós  $c_j$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ) szám  $k_j$ -szeres zérushely, akkor van olyan  $c_l$  ( $l = 1, 2, \dots, s; l \neq j$ ), hogy  $c_l = \bar{c}_j$  és  $k_l = k_j$ .

**T 10.5** Valós polinomfüggvény valós gyöktényezős alakja: Ha a valós együtthatós  $f$  polinomfüggvény valós zérushelyei  $c_1, c_2, \dots, c_r$ , akkor  $f$  felírható

$$f(x) = (x - c_1)^{k_1}(x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_r)^{k_r} p(x)$$

alakban, ahol  $k_1, k_2, \dots, k_r \in \mathbf{N}^+$ , és  $p$  olyan valós együtthatós polinom, amelynek nincs valós zérushelye.

**T 10.6** Valós együtthatós polinomfüggvény valós szorzatalakja: Minden valós együtthatós polinomfüggvény felírható elsőfokú és negatív diszkriminánusú másodfokú polinomfüggvények szorzataként.

**P 10.7 Horner módszer.** Egy polinom helyettesítési értéke kiszámítható az alábbi zárójelezést felhasználva is:

$$f(c) = a_0c^n + a_1c^{n-1} + \dots + a_{n-1}c + a_n = (\dots((a_0c + a_1)c + a_2)c + \dots + a_{n-1})c + a_n.$$

A kiszámított  $a_0, a_0c + a_1, (a_0c + a_1)c + a_2, \dots$  részeredmények az  $f(x) : (x - c)$  maradékos osztás hányadosának együtthatóit adják. Az eljárást az ú. n. Horner-sémában ábrázoljuk. Ez például az  $f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$  polinomfüggvénnyel felírva a következő:

$$\begin{array}{r|rrrr} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ c & a_0 & a_0c + a_1 & (a_0c + a_1)c + a_2 & ((a_0c + a_1)c + a_2)c + a_3 \end{array}$$

ahol tehát  $f(c) = ((a_0c + a_1)c + a_2)c + a_3$ , és

$$\frac{f(x)}{x - c} = a_0x^2 + (a_0c + a_1)x + ((a_0c + a_1)c + a_2) + \frac{f(c)}{x - c}.$$

**T 10.8 Rolle gyöktétele.** Egészgyütthatós polinomfüggvénynek csak olyan racionális zérushelye lehet, amelynek nem egyszerűsíthető alakjában a számláló a polinom konstans tagjának, a nevező a legmagasabb fokú tag együtthatójának osztója. Ha egy egészgyütthatós polinomfüggvény főegyütthatója 1, akkor annak minden racionális zérushelye egész szám.

### Feladatok

Végezzük el az alábbi  $f$  polinomnak a  $g$  polinommal való maradékos osztását, azaz határozzuk meg a  $q$  hányadost és az  $r$  maradékot!

1.  $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 4x - 2, g(x) = x^2 + 3x + 1,$
2.  $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1, g(x) = x^4 + x^2 + 1,$
3.  $f(x) = x^6 - x^5 + x^2 + 2x + 3, g(x) = x^3 - x^2,$
4.  $f(x) = x^{10} + 2x^9 - x^3 - 2x^2 + 8x + 3, g(x) = x^8 - x + 3,$
5.  $f(z) = z^3 + 2iz^2 + 3z + 6i, g(z) = z + i,$
6.  $f(z) = z^3 + z^2 + z + 1, g(z) = z^2 + (1 + i)z + i,$
7.  $f(x) = x^{3k} - 1, g(x) = x^3 - 1,$
8.  $f(x) = x^{3k}, g(x) = x^2 + x + 1,$

Írjuk fel

- a) gyöktényezős alakban (T 10.4),
- a) valós szorzatalakban (T 10.6),
- a) valós gyöktényezős alakban (T 10.5) és
- a) a D 10.1 szerinti polinom alakban

azt a legkisebb fokszámú  $f$  polinomot, amelynek főegyütthatója 1, zérushelyei  $c_1, c_2, \dots, c_r$ , mégpedig  $c_1$   $k_1$ -szeres, ...,  $c_r$  pedig  $k_r$ -szeres zérushely.

9.  $c_1 = -1, c_2 = \frac{1}{2}, k_1 = 2, k_2 = 1,$
10.  $c_1 = 1, c_2 = -2, c_3 = -1, k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 1,$
11.  $c_1 = a, c_2 = b, c_3 = c, k_1 = k_2 = k_3 = 1,$
12.  $c_1 = 1, c_2 = i, c_3 = -i, k_1 = k_2 = k_3 = 1,$

10. Egyváltozós valós elemi függvények — Racionális függvények

13.  $c_1 = 1, c_2 = i, c_3 = -i, k_1 = 1, k_2 = k_3 = 2,$   
 14.<sup>o</sup>  $c_1 = 1, c_2 = 1 + i, c_3 = 1 - i, k_1 = 1, k_2 = k_3 = 2,$   
 15.  $c_1 = -1, c_2 = i, c_3 = -i, c_4 = 1 + i, c_5 = 1 - i, k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 1,$   
 16.<sup>o</sup>  $c_1 = i, c_2 = -i, k_1 = 2, k_2 = 1,$   
 17.  $c_1 = i, c_2 = -i, k_1 = 2, k_2 = 3,$   
 18.<sup>p</sup>  $c_1 = i, c_2 = 2 + i, c_3 = 2 - i, k_1 = k_2 = k_3 = 1.$   
 19.<sup>a</sup> Mutassuk meg, hogy a

$$P_n(x) = \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

ú. n. Legendre-polinóm zérushelyei különbözőek, valóságosak és a  $(-1, 1)$  intervallumba esnek. [Útmutatás: Vizsgáljuk meg az  $(x^2 - 1)^n$  függvénynek és deriváltjainak zérushelyeit.]

A Horner-módszert felhasználva számítsuk ki az alábbi  $f$  polinomok helyettesítési értékét a megadott  $c$  helyen. (A kalkulátort használó feladatoknál tegyük  $c$  értékét a memóriába, és minden szorzáskor onnan hívjuk elő.)

- 20.<sup>o</sup>  $f(x) = x^6 - x^4 + 2x^3 + x - 1, c = -2,$   
 21.<sup>p</sup>  $f(z) = 3z^6 - 4z^5 + (13 + 8i)z^4 + (1 - 2i)z^3 + 4z, c = 2i,$   
 22.  $f(x) = 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1, c = -4.$   
 23.<sup>k</sup>  $f(x) = \sqrt{5}x^4 - 3x^3 + \sqrt{17}x^2 + 0,3939x + 2, c = 1,39,$   
 24.<sup>k</sup>  $f(a) = 17,39a^4 - 1,56a^3 + 0,11a^2 + a - 1, c = \cos 1.$

Horner-módszerrel végezzük el a megadott  $f$  polinom  $g$ -vel való maradékos osztását!

- 25.<sup>o</sup>  $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, g(x) = x - 1,$   
 26.  $f(x) = x^9 - x^7 + x^5 - x^3 + x, g(x) = x + 1,$   
 27.<sup>k</sup>  $f(x) = 3,11x^5 - 8,29x^3 + 5,44x^2 - 9,99; g(x) = x - 1,35$   
 28.<sup>k</sup>  $f(x) = x^3 \cos 1, 1 - x^2 \sin 5,4 + \cos 2,1; g(x) = x - \operatorname{tg} 0,5$   
 29.  $f(x) = x^5 + 2x^2 - x + 2, g(x) = x - i,$   
 30.  $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 + (6 + i)x^2 + 4 + 4i, g(x) = x + 2 + i.$

A Horner-módszer segítségével alakítsuk át  $f(x)$ -et  $(x - x_0)$  polinomjává!

- 31.<sup>p</sup>  $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1, x_0 = -1,$   
 32.  $f(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2, x_0 = -1,$   
 33.  $f(x) = x^5, x_0 = 1.$   
 34. Milyen  $a$  és  $p$  értékekre osztható maradék nélkül az  $f(x) = x^4 + pa^2x^2 - 5a^3x + a^4$  polinom az  $x - a$  polinommal?

A Rolle-féle gyöktétel alkalmazásával számítsuk ki az alábbi racionális együtthatós egyenletek racionális gyökeit, és e gyökök felhasználásával írjuk fel az egyenletek bal oldalán álló polinomot alacsonyabb fokú, racionális együtthatós polinomok szorzataként.

- 35.<sup>o</sup>  $x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x - 1 = 0,$       36.  $x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x - \frac{3}{2} = 0,$

**10. Egyváltozós valós elemi függvények — Páros, páratlan és periodikus függvények**

37.  $x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 3 = 0$ ,      38.  $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 = 0$ .

Ábrázoljuk az alábbi polinomfüggvényeket a T 9.26 segítségével:

39.  $f(x) = \frac{1}{12}x^2(x+1)(x-3)^2$ ,      40.  $f(x) = \frac{1}{9}x(x+2)^2(x-1)^3$ ,  
 41.  $f(x) = \frac{1}{25}x(x+3)^2(x-2)^2$ ,      42.  $f(x) = \frac{1}{16}x^2(x-2)^2(x+1)^2(x+2)$ .

Ábrázoljuk az alábbi racionális törtfüggvényeket a számláló és a nevező zérushelyeinek meghatározása, a  $\infty$ -ben, a  $-\infty$ -ben és a hízagpontokban vett határértékek kiszámítása segítségével:

43.  $r(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$ ,      44.  $r(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2(x+1)}$ ,  
 45.  $r(x) = \frac{(x-1)(x+1)/2}{x^2(x+1)}$ ,      46.  $r(x) = \frac{(x-1)^2(x+2)^2}{x^2(x+1)}$ ,

**Páros és páratlan függvények, periodikus függvények**

**D 10.9** Az egyváltozós (valós vagy komplex)  $f$  függvényt páros [páratlan] függvénynek nevezük, ha az értelmezési tartományába eső minden  $x$ -szel együtt  $-x$  is az  $f$  értelmezési tartományába tartozik, és  $f(-x) = f(x)$  [ $f(-x) = -f(x)$ ].

**T 10.10** Ha az egyváltozós valós  $f$  függvény értelmezési tartománya szimmetrikus a 0 pontra nézve, akkor előállítható egy páros  $f_1$  és egy páratlan  $f_2$  függvény összegeként, éspedig  $f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$  és  $f_2(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ .

**D 10.11** Az egyváltozós nem konstans (valós vagy komplex)  $f$  függvényt  $c$  szerint periodikusnak és a  $c \neq 0$  számot az  $f$  függvény periódusának nevezük, ha minden  $x \in \text{Dom } f$  esetén  $x + c \in \text{Dom } f$ , és  $f(x + c) = f(x)$ .

**T 10.12** Ha  $c$  az egyváltozós  $f$  függvény periódusa,  $k$  pedig nullától különböző egész szám, akkor  $kc$  is periódusa  $f$ -nek. Ha  $f$  valós változós, akkor periódusai között van egy legkisebb pozitív periódus, melynek egészszámu többszörösei adják  $f$  összes periódusát.

**Feladatok**

Állapítsuk meg, hogy az alábbi függvények közül melyek párosak és melyek páratlanok (l. D 10.9). Azokat, amelyek nem tartoznak egyik osztályba sem, bontsuk fel (D 10.10 segítségével) egy páros és egy páratlan függvény összegére!

47.  $x^{2n}$ ,  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ,      48.  $x^{2n+1}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,      49.  $\sin x$ ,  
 50.  $\cos x$ ,      51.  $\text{tg } x$ ,      52.  $x \sin x$ ,  
 53.  $x \cos x$ ,      54.  $x^2 - x^4$ ,      55.  $x + x^3$ ,  
 56.  $x^2 - x$ ,      57.  $(x + 1) \sin x$ ,      58.  $|x - 1|$ .

Legyenek az  $f$ ,  $f_1$ ,  $f_2$  függvények páros függvények, a  $g$ ,  $g_1$ ,  $g_2$  függvények páratlanok egy  $H$  halmazon. Az alábbi függvények közül melyek párosak, melyek páratlanok?

10. Egyváltozós valós elemi függvények — Trigonometrikus függvények

- |                              |                       |                    |
|------------------------------|-----------------------|--------------------|
| 59 <sup>o</sup> $f_1 + f_2,$ | 60. $g_1 + g_2,$      | 61. $f + g,$       |
| 62. $f_1 f_2,$               | 63. $g_1 g_2,$        | 64. $fg,$          |
| 65. $\frac{f_1}{f_2},$       | 66. $\frac{1}{g},$    | 67. $\frac{f}{g},$ |
| 68. $f \circ g,$             | 69 <sup>o</sup> $f',$ | 70. $g'.$          |

Határozzuk meg az alábbi függvények közül a periodikusak legkisebb pozitív  $p$  periódusát!

- |                 |                                   |  |
|-----------------|-----------------------------------|--|
| 71. $\sin 3x,$  | 72 <sup>o</sup> $\cos ax, a > 0,$ | 73. $\sin ax + \cos ax, a > 0,$  |
| 74. $\sin^2 x,$ | 75. $\sin \sqrt{x},$              | 76. $3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{3}.$ |
77. Mutassuk meg, hogy  $p$  szerint periodikus függvények összege, különbsége, szorzata, hányadosa vagy szintén periodikus  $p$  szerint, vagy konstans.

## Trigonometrikus függvények

### Feladatok

A  $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}$  függvények grafikonjából kiindulva függvénytranszformációk segítségével ábrázoljuk az alábbi függvényeket!

- |                                   |   |   |
|-----------------------------------|---|---|
| 78 <sup>o</sup> $3 \sin 2x + 1,$  | 79 <sup>o</sup> $3 \sin(2x - \frac{\pi}{3}) - 2,$ | 80. $\cos kx, k \neq 0,$                        |
| 81. $\sin \frac{x}{k}, k \neq 0,$ | 82. $-2 \operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{2}),$   | 83 <sup>o</sup> $a \sin(bx+c), a, b, c \neq 0.$ |

Vázoljuk fel az alábbi függvények grafikonját!

- |                             |                         |                                  |
|-----------------------------|-------------------------|----------------------------------|
| 84. $\frac{1}{\sin x},$     | 85. $\sin \frac{1}{x},$ | 86. $x \sin \frac{1}{x},$        |
| 87. $x^2 \sin \frac{1}{x},$ | 88. $ \sin x ,$         | 89. $\operatorname{sgn} \sin x,$ |
90.  $\operatorname{Ent}(2 \sin x).$

Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi függvényeket, majd ábrázoljuk őket.

- |  |  |
|--|--|
| 91. $\cos x \sin x(1 - 2 \sin^2 x),$                     | 92 <sup>o</sup> $\sin x + \cos x,$                             |
| 93 <sup>o</sup> $\sqrt{3} \sin x + 2 \cos x,$            | 94 <sup>o</sup> $a \sin x + b \cos x,$                         |
| 95. $\sin(x - \frac{\pi}{3}) + \sin(x + \frac{\pi}{3}),$ | 96. $\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}.$ |

Binyonyítsuk be, hogy ha  $\alpha + \beta + \gamma = \pi,$  akkor

97.  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2},$   
 98<sup>o</sup>  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma.$

Differenciáljuk az alábbi trigonometrikus függvényeket:

- |   |                         |   |
|---|-------------------------|---|
| 99. $\operatorname{tg}^2 \frac{1}{3x},$ | 100. $\sin \sqrt{x},$   | 101. $\left(\frac{\sin x}{\cos 2x}\right)^3,$ |
| 102. $\sin(\cos x^2),$                  | 103. $\sqrt{\sin x^2},$ | 104. $\operatorname{ctg}^3 \frac{x}{3}.$      |

## Arkuszfüggvények

**D 10.13** Az arkuszfüggvények a trigonometrikus függvények megadott intervallumra való leszűkítéseinek inverzei, nevezetesen:

$$\begin{aligned} \arcsin x = y &: \Leftrightarrow \sin y = x, \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], & \operatorname{arctg} x = y &: \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x, \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ \arccos x = y &: \Leftrightarrow \cos y = x, [0, \pi], & \operatorname{arcctg} x = y &: \Leftrightarrow \operatorname{ctg} y = x, (0, \pi). \end{aligned}$$

**T 10.14** Az arcsin és az arccos függvények a  $(-1, 1)$  intervallumon, az arctg és az arcctg függvények az egész számegyenesen differenciálhatók. Deriváltjuk:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

**T 10.15** Az arkuszfüggvényekre, értelmezési tartományuk minden  $x$  pontjában, fennállnak az alábbi összefüggések:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

### Feladatok

Számítsuk ki az alábbi függvényértékeket:

$$105.^k \arccos(-0,25), \quad 106.^k \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 200, \quad 107.^k \operatorname{arcctg} 10.$$

Kalkulátor használata nélkül számítsuk ki az alábbi függvényértékeket:

$$\begin{aligned} 108. \operatorname{arctg} 1, & \quad 109. \operatorname{arcctg} \sqrt{3}, & \quad 110. \arcsin(1/2), \\ 111. \arccos(-\sqrt{2}/2), & \quad 112. \arccos \cos 7, & \quad 113. \operatorname{arctg} \operatorname{tg} 1,6, \\ 114. \arcsin \sin 10, & \quad 115. \arcsin \sin 13, & \quad 116. \arcsin \sin(-13). \end{aligned}$$

Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltját és a derivált értelmezési tartományát!

$$\begin{aligned} 117. \arccos(1-2x), & \quad 118. \operatorname{arctg}(1-x^2), & \quad 119. \operatorname{ctg} \operatorname{arctg} x, \\ 120. \arcsin \frac{2x}{1+x^2}, & \quad 121. \arcsin \cos x, & \quad 122. \arcsin \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

**123.<sup>p</sup>** Mutassuk meg, hogy az alábbi függvények közül bármely kettő különbsége konstans. Határozzuk meg e konstansokat!

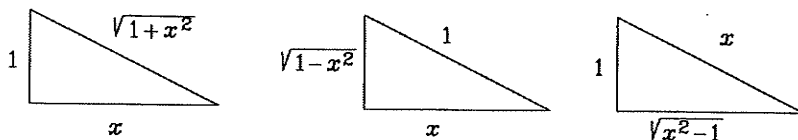
$$\begin{aligned} \arcsin(2x-1), \quad 2 \arcsin \sqrt{x}, \quad -2 \arcsin \sqrt{1-x}, \quad 2 \arccos \sqrt{1-x}, \\ 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{1-x}}, \quad -2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{x}}, \quad 4 \operatorname{arctg} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}, \quad -4 \operatorname{arctg} \frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

**124.<sup>p</sup>** A BASIC programozási nyelvben az  $\operatorname{ATN}(x)$  függvény kiszámítja az  $\operatorname{arctg} x$  értéket. Igazoljuk a programozási kézikönyvekben az  $\arcsin$  és az  $\arccos$  függvényekre javasolt alábbi formulák helyességét:

$$\arcsin x = \operatorname{ATN} \left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right), \quad \arccos x = -\operatorname{ATN} \left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) + 1,5707963.$$

10. Egyváltozós valós elemi függvények — Arkuszfüggvények

A mellékelt ábrák valamelyikét felhasználva igazoljuk az alábbi azonosságok helyességét az  $x > 0$  esetben, majd az összefüggést trigonometriai átalakításokkal



bizonyítsuk minden lehetséges  $x$ -re!

$$125.^{\circ} \cos \arcsin x = \sin \arccos x = \sqrt{1-x^2},$$

$$126.^{\circ} \operatorname{tg} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{ctg} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{x},$$

$$127.^{\circ} \operatorname{tg} \arccos x = \operatorname{ctg} \arcsin x = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$128.^{\circ} \operatorname{tg} \arcsin x = \operatorname{ctg} \arccos x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$129. \sin \operatorname{arctg} x = \cos \operatorname{arcctg} x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$130. \sin \operatorname{arcctg} x = \cos \operatorname{arctg} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Igazoljuk az alábbi összefüggések helyességét! Mind a négy feladatban  $k \in \mathbf{Z}$ .

$$131.^{\circ} \arcsin \sin x = \begin{cases} x + 2k\pi, & \text{ha } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \\ -x + (2k+1)\pi, & \text{ha } (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

$$132. \arccos \cos x = \begin{cases} x + 2k\pi, & \text{ha } 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi, \\ -x + 2k\pi, & \text{ha } (2k-1)\pi \leq x \leq 2k\pi, \end{cases}$$

$$133. \operatorname{arctg} \operatorname{tg} x = x + k\pi, \quad \text{ha } k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$134. \operatorname{arcctg} \operatorname{ctg} x = x + k\pi, \quad \text{ha } k\pi < x < (k+1)\pi.$$

135. Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát, értékkészletét, és rajzoljuk fel a grafikonjukat!

$\sin \arcsin$ ,  $\cos \arccos$ ,  $\operatorname{tg} \operatorname{arctg}$ ,  $\operatorname{ctg} \operatorname{arcctg}$ ,

$\arcsin \sin$ ,  $\arccos \cos$ ,  $\operatorname{arctg} \operatorname{tg}$ ,  $\operatorname{arcctg} \operatorname{ctg}$ .

Kalkulátor használata nélkül — alkalmas trigonometriai azonosságok alkalmazásával — számítsuk ki az alábbi függvényértékeket:

$$136.^{\circ} \cos \left( 2 \arcsin \left( -\frac{2}{3} \right) \right),$$

$$137. \operatorname{tg} \left( 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} \right),$$

$$138. \sin \left( \arccos \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} \right),$$

$$139.^{\circ} \cos \left( \arccos \frac{3}{5} + \arcsin \frac{12}{13} \right).$$

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

$$140. \arcsin x = \arccos x,$$

$$141. \arccos x = \operatorname{arctg} x,$$

$$142.^{\circ} 2 \arcsin x = \arccos 2x,$$

$$143. \operatorname{arctg}(x-1) - \operatorname{arctg}(x-2) = \pi/4,$$

$$144. \arcsin \sqrt{x} + \arcsin \sqrt{1-x} = \arcsin 2x.$$

Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

10. Egyváltozós valós elemi függvények — Logaritmusfüggvények

$$145. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin ax}{x},$$

$$146. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x},$$

$$147. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin ax}{\arcsin bx},$$

$$148. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} ax}{\operatorname{arctg} bx},$$

$$149. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{\operatorname{arctg} bx},$$

$$150. \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}.$$

151.\* Bizonyítsuk be, hogy  $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \frac{\pi}{2}$  esetén

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}.$$

Az előző feladat eredményét, valamint az  $\operatorname{arctg} x < x$  (ha  $x > 0$ ) egyenlőtlenséget felhasználva bizonyítsuk be az alábbi egyenlőségeket! (A 155. feladatban szereplő formula segítségével számította ki  $\pi$  értékét 100 tizedesjegy pontossággal 1706-ban John Machin.)

$$152. \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4},$$

$$153. 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4},$$

$$154. 3 \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{5}{99} = \frac{\pi}{4},$$

$$155. 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

156.\* Igazoljuk az alábbi egyenlőséget:

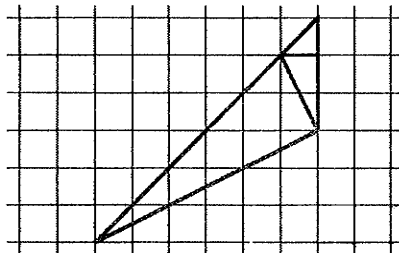
$$\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}.$$

Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat!

$$157. 2 \operatorname{arctg} (\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \sqrt{x}, \quad x \geq 0,$$

$$158. \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2 + x + 1} = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1}, \quad x > 0.$$

159. Adjunk 'geometriai bizonyítást' az  $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \pi$  egyenlőségre az alábbi ábra segítségével:



## Logaritmusfüggvények

T 10.16 Az  $\log_a x$  függvény a  $(0, \infty)$  intervallumon, az  $\log_a |x|$  (speciálisan az  $\ln |x|$ ) függvény pedig a 0 kivételével minden valós helyen differenciálható, és

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}, \quad (x > 0),$$

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}, \quad (x \neq 0), \quad (\ln |x|)' = \frac{1}{x}, \quad (x \neq 0).$$



**D 10.17** Ha az  $f$  függvény az értelmezési tartományán pozitív és differenciálható, akkor az  $\ln f$  függvény is differenciálható, és  $(\ln f)' = f'/f$ . Az  $\ln f$  függvény deriváltját az  $f$  függvény logaritmikus deriváltjának nevezzük. Logaritmikus deriváláson pedig az  $f'$  függvénynek az

$$f' = f(\ln f)'$$

képletrel való kiszámítását értjük.

### Feladatok

Kalkulátor használata nélkül számítsuk ki az alábbi értékeket:

160. a)  $10^{\lg 3,5}$ , b)  $\lg 10^5$ , c)  $e^{\ln 3}$ , d)  $\ln e^2$ ,  
 e)  $e^{-2 \ln 3}$ , f)  $2^{\log_4 9}$ , g)  $8^{\log_4 9}$ ,

161. a)  $\lg \sqrt[3]{100}$ , b)  $\log_9 27$ , c)  $\log_{27} 9$ , d)  $\log_{32} 512$ , e)  $\log_{1/6} 36$ ,  
 f)  $\log_6 \frac{1}{36}$ , g)  $\log_{1/4} \frac{1}{1024}$ , h)  $\ln \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$ , i)  $\ln \sqrt[3]{e}$ .

Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét!

162.  $f(x) = \log_x a$ ,  $a \neq 1$ , 163.  $f(x) = \log_x x$ , 164.  $f(x) = \ln x^2$ ,  
 165.  $f(x) = \ln \sin x$ , 166.  $f(x) = \ln \cos x$ , 167.  $f(x) = \ln \operatorname{tg} x$ ,  
 168.  $f(x) = \ln \arcsin x$ , 169.  $f(x) = \ln \arccos x$ , 170.  $f(x) = \arcsin \ln x$ .

Bizonyítsuk be a különböző alapú logaritmusokra vonatkozó alábbi azonosságokat! (A feladatokban szereplő konstansokra fennáll, hogy  $a, b, c, a_i > 0$ , de  $a, b, c, a_i \neq 1$ , ahol  $i = 1, 2, \dots, n$  és  $n \in \mathbf{N}^+$ .)

171.  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ , 172.  $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ ,

173.  $\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \dots \cdot \log_{a_n} a_1 = 1$ , 174.  $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$ ,

175.  $\log_{a^n} b^n = \log_a b$ , 176.  $\log_a b = -\log_{1/a} b = -\log_a \frac{1}{b}$ ,

177.  $\log_{ab} c = \frac{1}{\frac{1}{\log_a c} + \frac{1}{\log_b c}} = \frac{\log_a c}{1 + \log_a b}$ , 178.  $\log_{\frac{a}{b}} c = \frac{1}{\frac{1}{\log_a c} - \frac{1}{\log_b c}} = \frac{\log_a c}{1 - \log_a b}$ ,

179.  $\log_{a_1 \dots a_n} c = \frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} c} + \dots + \frac{1}{\log_{a_n} c}}$ .

Ahol jelezve van, ott kalkulátorral, ahol nincs, ott kalkulátor nélkül számítsuk ki az alábbi értékeket! Ahol szükséges, alakítsuk át a kifejezést az előző feladatokban megismert összefüggések segítségével.

180.  ${}^k \ln 2$ ,  $\lg 2$ ,  $\ln 10$ ,  $\lg e$ ,  $\ln \pi$ ,

181.  ${}^k \log_2 3$ ,  $\log_3 2$ ,  $\log_\pi e$ ,  $\log_2 10$ ,  $\log_{5,2} 3,8$ .

182.  $\frac{\lg 4}{1 - \lg 5}$ ,  $\frac{\lg 5}{1 + \lg 0,5}$ ,  $\frac{1}{1/\log_2 30 + 1/\log_3 30 + 1/\log_5 30}$ ,

183.  $\log_{27} 125 \cdot \log_{625} 9$ ,  $\log_{81} 256 \cdot \log_4 9$ ,  $\log_4 9 \cdot \log_3 5 \cdot \log_{25} 4$ ,

10. Egyváltozós valós elemi függvények — Logaritmusfüggvények

184.\* Számítsuk ki a  $\lg 8$ ,  $\lg 5$ ,  $\lg 0,72$ ,  $\lg \sqrt[7]{7,5}$  értékeket úgy, hogy csak a négy alapműveletet, a  $\lg 2 \approx 0,30103$  és a  $\lg 3 \approx 0,47712$  értékeket használjuk.

185.\* Bizonyítsuk be, hogy ha az  $\ln x$  függvény grafikonját az  $x$ -tengely irányában  $k$ -szorosára nyújtjuk, ugyanazt a görbét kapjuk, mint amikor a grafikont az  $y$ -tengely irányában eltoljuk egy alkalmasan választott  $c$  számmal. Határozzuk meg  $c$  értékét  $k$  függvényében!

Milyen transzformációkkal kaphatjuk meg az alábbi függvények grafikonját az  $\ln$  függvény grafikonjából?

186.  $\log_2 x$ ,                      187.  $\log_3 \frac{x^{3/2}}{9}$ ,                      188.  $\ln \sqrt[3]{1-x}$ .

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

189.  $\log_{x+2}(3x^2 + 12x + 14) = 2$ ,                      190.  $\ln x^2 + \ln x^8 = 10$ ,  
 191.  $\log_{32}(2x) - \log_8(4x) + \log_2 x = 3$ ,                      192.  $\log_x 8 - \log_{4x} 64 = \log_{2x} 4$ .

Differenciáljuk az alábbi függvényeket!

193.  $\ln(5x + 1)$ ,                      194.  $\lg \frac{x}{2} + \ln 3$ ,                      195.  $\ln \frac{1}{x}$ ,  
 196.  $\ln^2(1 - 2x)$ ,                      197.  $\ln \sin x$ ,                      198.  $\lg \cos x$ ,  
 199.  $\log_3(x^2 - 1)$ ,                      200.  $\frac{1}{\log_5 x}$ ,                      201.  $x^n \ln x$ .

202.\* Számítsuk ki az  $\ln x$  függvény  $n$ -edik deriváltját!

203. Mutassuk meg, hogy az  $y = \ln \sin x$ , ( $0 < x < \pi$ ) függvény kielégíti az  $y'' + (y')^2 = -1$  egyenletet!

204. Mutassuk meg, hogy az  $y = c_1 \sin \ln x + c_2 \cos \ln x$ , ( $x > 0$ ) függvény tetszőleges  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  együtthatókkal kielégíti az  $x^2 y'' + xy' + y = 0$  egyenletet!

205. Mutassuk meg, hogy  $0 < a < b$  esetén

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a}.$$

206. Bizonyítsuk be, hogy  $x > 1$  esetén  $\ln x < 2(\sqrt{x} - 1)$ .

207.\* Jelölje  $\pi(x)$  az  $x$  számnál kisebb prímekek számát. A prímszámtétel szerint

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \ln x}{x} = 1.$$

Becsüljük meg e tétel segítségével a  $10^7$ -nél kisebb prímekek számát.

208. A zenei hangköz nagyságát a két hang frekvenciájának hányadosával mérjük. Az oktáv hangtávolság esetén a frekvenciák hányadosa 2. Johann Sebastian Bach kora óta a "jóltemperált" zongorán az oktáv 12 egyenlő nagyságú — kisszekund nevű — hangközre van osztva (wohltemperiertes Klavier).  $n$  kisszekundnyi hangköznek milyen frekvenciahányados felel meg? Az  $x$  és  $y$  ( $x > y$ ) frekvenciájú hangok közti hangköz hány kisszekundból áll?

Logaritmikusan deriválással (D 10.17) számítsuk ki az alábbi függvények deriváltját!

209.\*  $\frac{(x^2 + 2)(x + 9)^{1/2}}{x - 1}$ ,                      210.  $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$ ,                      211.  $(2x + 1)(x^2 + 1)x^{4/5}$ ,

$$212. \sqrt[3]{\frac{x(x-1)}{x^2+2}}, \quad 213. \sqrt[3]{\frac{x^2(x+1)}{(x-2)(x^2+2)}}, \quad 214. \frac{\sqrt{x+11}}{(x-7)\sqrt[3]{2x+1}},$$

$$215. (1+x)^{1-x}, \quad 216. (1-3x)^{\ln x}, \quad 217. \sqrt[3]{3x^2-6x+7}.$$

## Exponenciális függvények

T 10.18 Az  $a^x$ , ( $a > 0$ ) függvény az egész számegyenesen differenciálható, deriváltja

$$(a^x)' = a^x \ln a,$$

speciálisan  $(e^x)' = e^x$ , és így minden nemnegatív egész  $r$ -re  $(e^x)^{(r)} = e^x$ . Szokás az  $e$  alapú exponenciális függvényt  $\exp$ -vel jelölni, azaz  $\exp : x \mapsto e^x$ . E jelölést használva  $\exp^{(r)} = \exp$ .

### Feladatok

Milyen transzformációkkal kaphatjuk meg az alábbi függvények grafikonját az  $\exp$  függvény grafikonjából?

$$218. 2^x, \quad 219. 5^{x+1}, \quad 220. (3^{x/2}-1)^3.$$

221. Ha  $a < 0$ , akkor az  $a^x$  függvény mely valós  $x$  értékekre van értelmezve?

222. Melyek azok az  $x_0$  valós számok, amelyek megoldásai az  $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$  alakú egyenletnek?

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:

$$223. (2x+1)^{x-3} = (2x+1)^{5-3x}, \quad 224. (x-3)^{9/x} = (x-3)^x,$$

$$225. (x+1)^{2x+1} = (x^2+2x+1)^{2x+1}.$$

Számítsuk ki az alábbi  $x \mapsto y$  függvények deriváltját!

$$226. y = x^\pi, \quad 227. y = \pi^x, \quad 228. y = 2^x,$$

$$229. y = 2^{-x}, \quad 230. y = 2^{\lg x}, \quad 231. y = 5^{1/x} + 1/5^x,$$

$$232. y = \exp \sqrt{x} + \sqrt{\exp x}, \quad 233. e^{xy} - y = 3, \quad 234. e^{y \ln x} + \ln y = 0.$$

Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltját az  $a^b = e^{b \ln a}$  átalakítás segítségével!

$$235. (x \ln x)^x, \quad 236. x^{\sin x}, \quad 237. x^{\frac{1}{x}},$$

$$238. 2x^{\sqrt{3x}}, \quad 239. (1-x)^{x^2}, \quad 240. (\sin x)^{\lg x}.$$

241. Ha az  $f$  függvény konstans, akkor  $(f(x)^{g(x)})' = f(x)^{g(x)} g'(x) \ln f(x)$ ; ha a  $g$  függvény konstans, akkor  $(f(x)^{g(x)})' = g(x) f(x)^{g(x)-1} f'(x)$ . Mutassuk meg, hogy általában az  $f(x)^{g(x)}$  függvény deriváltja az előző két eredmény összege:

$$(f(x)^{g(x)})' = f(x)^{g(x)} g'(x) \ln f(x) + g(x) f(x)^{g(x)-1} f'(x).$$

242. Bizonyítsuk be, hogy  $(xe^x)^{(n)} = (x+n)e^x$ .

10. Egyváltozós valós elemi függvények — Exponenciális függvények

- 243.<sup>p</sup> Az  $e^{-x^2}$  függvény  $n$ -edik deriváltfüggvénye kifejezhető  $(e^{-x^2})^{(n)} = e^{-x^2} H_n(x)$  alakban, ahol  $H_n$  az  $n$ -edfokú **Csebisev-Hermite** polinom. Mutassuk meg, hogy  $H_n$  eleget tesz az alábbi rekurzív összefüggésnek:

$$H_{n+1}(x) + 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0, \quad (n \geq 1).$$

- 244.<sup>a</sup> A **Stirling-formula** (ejtsd: sztő'ling) szerint

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\frac{\Theta_n}{12n}\right),$$

ahol  $\Theta_n$  egy, a  $(0, 1)$  intervallumba eső valós szám. Ennek felhasználásával milyen alsó és felső becslést adhatunk  $n!$ -ra?

- 245.<sup>k</sup> Az előző feladat eredményét felhasználva, becsljük meg  $12!$  és  $60!$  értékét! Az előbbit számítsuk ki pontosan is!

- 246.<sup>k</sup> A Stirling-formulát felhasználva adjunk meg alsó és felső becslést az  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)$  szorzat értékére, majd számítsuk közelítőleg az  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 99$  szorzat értékét.

Mutassuk meg, hogy a megadott függvények a velük megadott egyenletet kielégítik:

247.  $f(x) = e^{mx}$ ,  $f(x + y) = f(x)f(y)$ ,

248.  $f(x) = \frac{\exp(2x)-1}{\exp(2x)+1}$ ,  $f'(x) = 1 - f^2(x)$ ,

249.  $y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{bx}$ ,  $c_1, c_2, a, b \in \mathbf{R}$  konstansok,  $y'' - (a + b)y' + aby = 0$ .

- 250.<sup>a</sup> Mutassuk meg, hogy az

$$f'(x) = kf(x)$$

( $k$  adott konstans) egyenletnek minden  $f(x) = ce^{kx}$  alakú függvény megoldása ( $c$  tetszőleges konstans), továbbá mutassuk meg, hogy más megoldása az egyenletnek nincs is. (Útmutatás: legyen  $f(x)$  egy tetszőleges megoldás, és vizsgáljuk az  $f(x)e^{-kx}$  függvényt.)

- 251.<sup>k</sup> Mekkora összeg lesz egy év elteltével egy 10000 Ft értékű, 15% kamatozású betétén, ha kamatos kamattal számolunk†, és a kamatot

- évente,
- havonta,
- naponta,
- 'folyamatosan' számoljuk (ami azt jelenti, hogy évente  $n$ -szer számoljuk, és ennek vesszük a határértékét, ha  $n \rightarrow \infty$ )?

- 252.<sup>k</sup> Mekkora összeg lesz  $E$  év elteltével egy  $A$  Ft értékű,  $K\%$  kamatozású betétén, ha kamatos kamattal számolunk† és a kamatot az előző feladatbeli a), b), c), d) pontoknak megfelelően számítjuk?

253. Egy évi  $s\%$  kamatozású betétén levő összeg hány százalékkal kamatozik, ha nem csak kamatot, hanem folyamatos kamatozással kamatos kamatot számítottunk?

† ami azt jelenti, hogy a kamatot hozzá kell adni a betét értékéhez, és legközelebb e megnövelt értékre számítottunk kamatot

- 254.\* Egy radioaktív anyag elbomlásakor a tömeg megváltozásának sebessége az anyag tulajdonságaitól függ, de minden pillanatban arányos az anyag tömegével; legyen az arányossági tényező  $k$ . Mutassuk meg, hogy az az idő, amely alatt az anyag fele elbomlik, nem függ a tömegétől, azaz csak az anyag jellemzője — ezt nevezik felezési időnek —, és ez az idő  $-\ln 2/k$ .
- 255.\* 3 gramm 14-es szénizotópból mennyi marad meg 1000 év elteltével, ha felezési ideje 5730 év?
256. (Kormeghatározás 14-es szénizotóppal) Az élő szervezetekben a stabil 12-es és a radioaktív 14-es szénizotóp aránya mindaddig állandó, amíg a szervezet él. Pusztulása után azonban az 5730 év felezési idejű 14-es szénizotóp mennyisége csökken. Egy barlangban talált emberi haj csak 40%-át tartalmazza az élő emberi haj szénizotópmennyiségének. Hány éve halt meg a haj viselője?
257. Egy populáció egyedeinek számát az idő függvényében leíró függvény nem folytonos, hanem szakaszonként konstans, hisz csak egész értékeket vehet fel. Ha azonban az egyedek száma nagy, a függvény jól közelíthető egy folytonos, sőt differenciálható függvénnyel. Tegyük fel, hogy egy falu lakossága minden évben a lakosok számának 2%-ával növekszik. Mennyi idő alatt duplázódik meg a falu lélekszáma? Hány lakosa lesz a falunak 30 hónap múlva, ha ma ezren lakják?

## Hiperbolikus függvények

D 10.19 A szinusz hiperbolikus (sh), a koszinusz hiperbolikus (ch), a tangens hiperbolikus (th), és a kotangens hiperbolikus (cth) függvények definíciói:

$$\operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x := \frac{1}{\operatorname{th} x}.$$

T 10.20 Az sh, ch, th, cth függvények egész értelmezési tartományukon differenciálhatók. Deriváltjuk:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (\operatorname{cth} x)' = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

### Feladatok

Számítsuk ki az alábbi függvényértékeket:

258.\*  $\operatorname{sh} 1, \operatorname{sh}(-1), \operatorname{sh} 1 + \operatorname{ch} 1, \operatorname{th} 1, \operatorname{cth} 1,$

259.  $\operatorname{sh} \ln 2, \operatorname{ch} \ln 2, \operatorname{cth}(\frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}), \operatorname{sh} 5 + \operatorname{ch} 5.$

Igazoljuk az alábbi azonosságokat:

260. **Paritási összefüggések:**  $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x, \quad \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x,$

261.  $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x, \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x},$

10. Egyváltozós valós elemi függvények — Area függvények

262. **Összegzési képletek:**  $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$ ,  
 $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$ ,  $\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$ ,
263.  $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$ ,  $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$ ,  $\operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$ ,
264. **Négyzetes összefüggések:**  
 $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ ,  $\operatorname{th}^2 x + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1$ ,  $\operatorname{cth}^2 x - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = 1$ .
265. **Linearizáló formulák:**  $\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$ ,  $\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$ ,
266. Bontsuk fel az  $e^x$  és az  $e^{-x}$  függvényeket egy páros és egy páratlan függvény összegére.
267. Mutassuk meg, hogy minden valós  $v$  számra  $(\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x)^v = \operatorname{sh} vx + \operatorname{ch} vx$ .
268. **Fejezzük ki az  $\operatorname{sh}$  és a  $\operatorname{ch}$  függvényeket a  $\operatorname{th}$  segítségével!**
269. **Fejezzük ki  $\operatorname{sh} x$ -et és  $\operatorname{ch} x$ -et  $\operatorname{th} \frac{x}{2}$  segítségével!**
- Differenciáljuk az alábbi függvényeket  $x$  szerint!
270.  $\operatorname{ch}(3x^2 - x + 1)$ ,      271.  $\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 4x}$ ,      272.  $\operatorname{sh}(e^{3x})$ ,  
 273.  $e^x \operatorname{ch} x$ ,      274.  $\operatorname{sh}(\cos x)$ ,      275.  $\operatorname{sh} 3x \operatorname{ch} 5x$ .
276. Mutassuk meg, hogy az  $y(x) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} + C$ , ( $a \neq 0$ ,  $C \in \mathbf{R}$ ) függvény kielégíti az  $y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + y'^2}$  egyenletet! (Ez a differenciálegyenlet, és így a megoldását adó  $y(x)$  függvény írja le egy két végén felfüggesztett, csak saját súlyával terhelt lánc alakját. Ezért szokták a  $\operatorname{ch}$  függvény grafikonját **láncgörbéknek** nevezni.)
277. Ha egy  $m$  tömegű test a sebességének négyzetével arányos légellenállás mellett szabadon esik, akkor sebessége eleget tesz az  $m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2$  differenciálegyenletnek, ahol  $k$  a test aerodinamikai tulajdonságaitól függő állandó. Mutassuk meg, hogy a

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \operatorname{th}\left(\sqrt{\frac{gk}{m}} \cdot t\right)$$

függvény kielégíti a fenti egyenletet. Határozzuk meg a határsebességet, azaz a  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$  határértéket.

## Area függvények

**D 10.21** Az areafüggvények a hiperbolikus függvények inverzei:

$\operatorname{arsh} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto y$ , ahol  $\operatorname{sh} y = x$ ,

$\operatorname{arch} : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty); x \mapsto y$ , ahol  $\operatorname{ch} y = x$ ,

$\operatorname{arth} : (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto y$ , ahol  $\operatorname{th} y = x$ ,

$\operatorname{arch} : \mathbf{R} \setminus [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}; x \mapsto y$ , ahol  $\operatorname{cth} y = x$ .

**T 10.22** Az areafüggvények kifejezhetőek a logaritmusfüggvényekkel:

$$\begin{aligned} \operatorname{arsh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad (x \in \mathbf{R}), & \operatorname{arth} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad (|x| < 1), \\ \operatorname{arch} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad (x \geq 1), & \operatorname{arch} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad (|x| > 1). \end{aligned}$$

**T 10.23** Az arch függvény az  $(1, \infty)$  intervallumon, a többi areafüggvény az egész értelmezési tartományán differenciálható, és

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad (\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1 - x^2}, \quad (\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad (\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{1 - x^2}.$$

### Feladatok

Igazoljuk az alábbi azonosságok helyességét!

$$\begin{aligned} 278^{\circ} \operatorname{arsh} \operatorname{sh} x &= \operatorname{arth} \operatorname{th} x = x, & \operatorname{arch} \operatorname{ch} x &= |x|, \\ 279^{\circ} \operatorname{ch} \operatorname{arsh} x &= \sqrt{1 + x^2}, & \operatorname{sh} \operatorname{arch} x &= \sqrt{x^2 - 1}, \text{ ha } x \geq 1, \\ & \operatorname{th} \operatorname{arch} x = \frac{1}{x}, \text{ ha } |x| \geq 1, & \operatorname{cth} \operatorname{arth} x &= \frac{1}{x}, \text{ ha } x \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \\ 280^{\circ} \operatorname{th} \operatorname{arsh} x &= \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, & \operatorname{th} \operatorname{arch} x &= \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}, \\ & \operatorname{sh} \operatorname{arth} x = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, & \operatorname{ch} \operatorname{arth} x &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán ( $a, b$  adott konstansok)!

$$\begin{aligned} 281^{\circ} \operatorname{arsh} x &= \operatorname{arch} x, & 282^{\circ} \operatorname{arsh} x &= \operatorname{arth} x, \\ 283^{\circ} \operatorname{arsh} x &= \operatorname{arsh} a + \operatorname{arsh} b, & 284. \operatorname{arch} x &= \operatorname{arch} a + \operatorname{arch} b, \\ 285. \operatorname{arth} x &= \operatorname{arth} a + \operatorname{arth} b, & 286. \operatorname{arsh} x &= \operatorname{arth} a + \operatorname{arch} b. \end{aligned}$$

Differenciáljuk az alábbi függvényeket:

$$\begin{aligned} 287. \operatorname{arsh} x^3, & & 288. \operatorname{arth} \frac{1}{x}, & & 289. \operatorname{arsh}(\sin 3x), \\ 290. \operatorname{arth}^2(3x), & & 291. \exp \operatorname{arch} x, & & 292. \operatorname{arsh} \frac{\operatorname{sh} x}{2}. \end{aligned}$$

Gudermann függvénynek nevezzük az  $u \mapsto \varphi = 2 \operatorname{arctg} e^u - \frac{\pi}{2}$  függvényt. Bizonyítsuk be e függvényről az alábbiakat:

$$\begin{aligned} 293. \operatorname{Ran} \varphi &= \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), & 294. \operatorname{páratlan}, & & 295. \operatorname{invertálható}, \\ 296. \varphi &= \operatorname{arctg} \operatorname{sh} u = \operatorname{arcsin} \operatorname{th} u, \\ 297. \operatorname{sh} u &= \operatorname{tg} \varphi, & \operatorname{ch} u &= \frac{1}{\cos \varphi}, & \operatorname{th} u &= \sin \varphi, \\ 298. u &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \ln \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi}. \end{aligned}$$

299.<sup>k</sup> Azonos magasságban és egymástól 2 m távolságra lévő két pont között kifeszítünk egy kötelet, mely a végpontoknál  $10^\circ$ -os szöveget zár be a vízszintessel. Tudva, hogy a kötel alakja az  $a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$  függvény valamely eltolásával írható le, számítsuk ki a kötel belógását.

## 11. fejezet

# Egyváltozós valós függvények menetének vizsgálata

### Szélsőérték meghatározása az első deriválttal

**D 11.1** Legyen  $f$  egy metrikus tér valamely részalmazán értelmezett valós értékű függvény. Azt mondjuk, hogy az  $f$  függvénynek az értelmezési tartományához tartozó  $P_0$  pontban **maximuma** (minimuma, szigorú maximuma, ill. szigorú minimuma) van, ha  $f(P) \leq f(P_0)$ , ( $f(P) \geq f(P_0)$ ,  $f(P) < f(P_0)$ , ill.  $f(P) > f(P_0)$ ). Ha az  $f(P) \leq f(P_0)$  egyenlőtlenség  $f$  értelmezési tartományának minden  $P$  pontjára teljesül, akkor a  $P_0$  pontot az  $f$  függvény **abszolút minimumhelyének** nevezzük. Hasonlóan definiálható az abszolút maximumhely, ill. a szigorú abszolút minimum- és maximumhely fogalma.

**T 11.2** Ha az egyváltozós valós  $f$  függvény az  $x_0$  pontban differenciálható, akkor az  $x_0$  pontbeli szélsőérték létezéséhez szükséges, hogy  $f'(x_0) = 0$  legyen.

**T 11.3** Ha az  $f$  függvény differenciálható az  $(a, x_0)$  intervallumon, és itt  $f' \geq 0$ , valamint differenciálható az  $(x_0, b)$  intervallumon is, ahol  $f' \leq 0$ , továbbá  $f$  folytonos az  $x_0$  pontban, akkor az  $f$  függvénynek  $x_0$ -ban maximuma van. (Másképpen fogalmazva: ha  $f$  monoton növekvőből monoton csökkenőbe vált egy  $x_0$  pontban, akkor ott maximuma van.)

**P 11.4** Azokat az intervallumokat, melyekben a derivált állandó előjelű, a derivált zérushelyei és szakadási helyei határolják. Például az  $f : x \mapsto x + 1/x$  függvény deriváltja az  $f' : x \mapsto 1 - 1/x^2$  függvény. Ennek zérushelyei:  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$ , szakadási helye:  $x_3 = 0$ . Így az alábbi intervallumokon kell a derivált előjelét vizsgálni:  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, \infty)$ . Praktikus lehet a derivált előjelére, valamint az  $f$  függvény viselkedésére vonatkozó ismereteket táblázatban összefoglalni, pl. a következőképpen:

	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 0)$	$0$	$(0, 1)$	$1$	$(1, \infty)$
$f'$	+	0	-	szak.	-	0	+
$f$	↗	MAX	↘	pólus	↘	MIN	↗

A megoldásokban az alábbi rövidítéseket használjuk:

MIN	minimum	MAX	maximum
INFL	inflexió pont	nincs sz.	nincs szélsőérték
n.ért.	nincs értelmezve	pólus	$f$ -nek pólusa van
+	$f' > 0$ (ill. $f'' > 0$ )	-	$f' < 0$ (ill. $f'' < 0$ )
↗	$f$ monoton nő	↘	$f$ monoton csökken
∪	$f$ konvex	∩	$f$ konkáv



## Feladatok

Határozzuk meg az alábbi  $x \mapsto f(x)$  függvények szélsőértékhelyeit a derivált zérushelyeinek és szakadási helyeinek, valamint az ezek által meghatározott intervallumokon felvett előjelének meghatározásával.

1.  $x^2 \sqrt[3]{x+2}$ ,
2.  $|x-3| + |2x+1|$ ,
3.  $|x-1||x+2|$ ,
4.  $\max\{2|x|, |1+x|\}$ ,
5.  $\sin^2 x - \sqrt{3} \sin x$ ,  $0 < x < \pi$ ,
6.  $\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x$ ,
7.  $x^x$ ,
8.  $x^{-x^2}$ .

## Taylor-formula

**D 11.5** Az  $x_0$  helyen legalább  $r$ -szer differenciálható egyváltozós valós  $f$  függvény  $x_0$  helyhez tartozó  $r$ -edik Taylor-polinomján az alábbi (legfeljebb  $r$ -edfokú) polinomfüggvényt értjük:

$$T_r(x) := \sum_{n=0}^r \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

**T 11.6 Taylor-formula:** Ha az  $f$  függvény az  $x_0$  és az  $x$  pontokat tartalmazó valamely intervallumon  $(r+1)$ -szer differenciálható, akkor az  $x_0$  és  $x$  pontok között található olyan  $\xi$ , hogy

$$f(x) := \sum_{n=0}^r \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_r(x),$$

ahol

$$R_r(x) = \frac{f^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!} (x - x_0)^{r+1}.$$

E képletbeli  $R_r(x)$  tagot a Taylor-formula **maradéktagjának** nevezzük. Mivel  $\xi$  az  $x_0$  és az  $x$  közé esik, ezért kifejezhető  $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$  alakban, ahol  $0 < \theta < 1$ . A Taylor-formulát **Maclaurin-formulának** is nevezzük, ha  $x_0 = 0$ . Ekkor a formula alakja:

$$f(x) := \sum_{n=0}^r \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(r+1)}(\theta x)}{(r+1)!} x^{r+1}, \text{ ahol } 0 < \theta < 1.$$



## Szélsőértékek meghatározása

**T 11.7** Legyen  $n \geq 1$  és  $f$  az  $x_0$  pont valamely teljes környezetében legalább  $n$ -szer folytonosan differenciálható egyváltozós valós függvény; továbbá legyen  $f^{(k)}(x_0) = 0$ , ha  $0 < k < n$ , de  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ . Ha  $n$  páros, akkor a függvénynek az  $x_0$  helyen szélsőértéke van, mégpedig szigorú minimuma van, ha  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , és szigorú maximuma, ha  $f^{(n)}(x_0) < 0$ . Ha  $n$  páratlan, akkor a függvénynek az  $x_0$  helyen nincs szélsőértéke, inflexió pontja van.

### Feladatok

Magasabbrendű deriváltak segítségével (az előző tételt használva) vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvényeknek van-e szélsőértékük az  $x_0 = 0$  pontban, és ha igen, milyen!

35.<sup>p</sup>  $\cos x - 2x^2$ ,

36.  $e^{2x} + 2e^{-x}$ ,

37.  $(e^{-1} + x) \ln(e^{-1} + x)$ ,

38.<sup>p</sup>  $\operatorname{tg} x - x$ ,

39.  $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$ ,

40.<sup>o</sup>  $\operatorname{ch} x + \cos x$ ,

41.  $1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$ ,

42.<sup>o</sup>  $\sin x - x + \frac{x^3}{3!}$ .

Határozzuk meg az alábbi  $f(x)$  függvények szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékhelyeit a megadott intervallumon. (Vizsgáljuk meg a függvényt az intervallum végpontjaiban, valamint a deriváltfüggvény zérushelyein és szakadási helyein.)

43.<sup>p</sup>  $x^3 + 6x^2 - 15x + 3$ ,  $[-6, 6]$ ,

44.<sup>p</sup>  $x^3 + 6x^2 - 15x + 3$ ,  $(-6, 6)$ ,

45.  $\sqrt[3]{x^2}$ ,  $[-1, 8]$ ,

46.  $\sqrt[3]{x^2} - \frac{x^2}{3}$ ,  $[-1, \sqrt{2}]$ ,

47.  $\sqrt[3]{x^2} - \frac{x^2}{3}$ ,  $(-1, \sqrt{8})$ ,

48.  $xe^{-x}$ ,  $[1/2, \infty)$ ,

49.  $x^2 \ln x$ ,  $[1, e]$ ,

50.  $e^{-|x|}$ ,  $[-1, 2]$ ,

51.  $\begin{cases} x^2 + 1, & x \in [-2, -1) \\ 5 + 2x - x^2, & x \in [-1, 3) \\ x - 1, & x \in [3, 8), \end{cases}$

52.  $\begin{cases} e^{1/x}, & x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \\ 1, & x = 0, \end{cases}$

53.\*  $x^m(1-x)^n$ ,  $m, n \in \mathbf{N}^+$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

54.\* Bizonyítsuk be, hogy ha  $f$  monoton, akkor a  $g$  és az  $f \circ g$  függvényeknek ugyanott vannak szélsőértékei, mégpedig

- ha  $f$  monoton nő, akkor  $g$ -nek és  $f \circ g$ -nek ugyanott vannak maximumai, és ugyanazonokon a helyeken vannak minimumai,
- ha  $f$  monoton csökken, akkor  $g$ -nek ott van maximuma, ahol  $f \circ g$ -nek minimuma, és fordítva.

Határozzuk meg az alábbi függvények szélsőérték helyeit az előző feladat eredményének felhasználásával!

11. Függvényvizsgálat — Szélsőértékek meghatározása

$$55^{\circ} f(x) = \frac{42}{3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 56}, \quad 56^{\circ} f(x) = \arctg(4 - \sqrt{e - e^{x^2}}),$$

$$57. f(x) = \cos \operatorname{arctg}(1 - x^2), \quad 58. f(x) = \operatorname{th} (1 - \ln(1 + x + x^2)).$$

Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenségeket:

$$59^{\circ} |3x - x^3| \leq 2, \text{ ha } |x| \leq 2, \quad 60^{\circ} |a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$61^{\circ} x^m(1-x)^n \leq \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}, \text{ ha } x \in [0; 1], m, n > 0,$$

$$62^{\circ} \frac{2}{3} \leq \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \leq 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Határozzuk meg az alábbi sorozatok legnagyobb elemét:

$$63^{\circ} a_n = \frac{n^2}{n^3 + 100}, \quad 64^k a_n = \frac{n^{10}}{2^n}, \quad 65^k a_n = \sqrt[n]{\frac{n}{100}}.$$

66.\* Milyen feltételek mellett van az  $x^3 + px + q$  egyenletnek (a) egy, (b) három valós gyöke? Ábrázoljuk a megfelelő tartományokat a  $(p, q)$  koordinátasíkon.

Határozzuk meg az alábbi függvényeknek a megadott intervallumokhoz tartozó infimumát és szuprimumát!

$$67^{\circ} f(x) = \frac{1+x}{3+x^2}, \quad (0, \infty), \quad 68^{\circ} f(x) = \frac{1+x^2}{3+x^2}, \quad (0, \infty).$$

Az  $[a, b]$  intervallumon értelmezett valós függvények halmazán távolságfüggvény az alábbi  $\rho$ :

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

Határozzuk meg az alábbi függvények távolságát a megadott intervallumon!

$$69^{\circ} f(x) = x^2, g(x) = x^3, [0, 1], \quad 70. f(x) = \sin x, g(x) = \cos x, [0, \pi].$$

71. Állapítsuk meg a  $c$  valós szám értékét úgy, hogy a  $[0, 2]$  intervallumon az  $x^2$  és a  $2x + c$  függvények távolsága minimális legyen.

Oldjuk meg az alábbi szöveges szélsőértékfeladatokat!

72.\* Bontsuk fel a pozitív  $b$  számot két szám összegére úgy, hogy a szorzatuk maximális legyen.

73. Adott átfogójú derékszögű háromszögek közül melyiknek maximális a területe?

74. Adott térfogatú egyenes hengerek közül melyiknek legkisebb a felszíne?

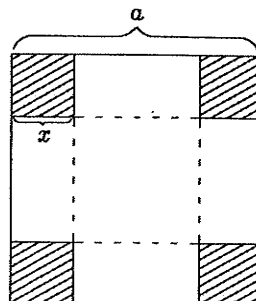
75. Határozzuk meg az  $A(2, 0)$  pont és az  $x^2 + y^2 = 1$  egyenletű körvonal pontjai közötti legkisebb és legnagyobb távolságot.

76. Az  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  egyenletű ellipszishez érintőt húzunk. Az érintő és a koordinátatengelyek által meghatározott háromszög területe milyen  $x$  és  $y$  értékekre lesz minimális, és mennyi a háromszög területe?

77. Az  $f$  fókusz-távolságú lencsétől  $t$  távolságra lévő tárgy  $k$  képtávolsága kielégíti az  $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$  összefüggést. Ha  $f$  adott, akkor mennyi a képtávolság és a tárgytávolság összegének infimuma és szuprimuma?

11. Függvényvizsgálat — Szélsőértékek meghatározása

78. Egy  $a$  oldalú négyzetlaphból az ábrán látható módon ki kell vágni a sarkán 4 kis négyzetet úgy, hogy a belőle hajtogatott doboz térfogata maximális legyen. Mekkora legyen a kivágott négyzet oldala?



- 79.<sup>k</sup> Tegyük fel, hogy az  $y$  és az  $x$  változók közötti függvénykapcsolat  $y = kx$  alakú, ahol  $k$  állandó. Négy mérést végzünk az  $x$  és az  $y$  értékeire:  $(x_1, y_1) = (1, 4)$ ,  $(x_2, y_2) = (2, 7)$ ,  $(x_3, y_3) = (3, 13)$ ,  $(x_4, y_4) = (4, 15)$ . Határozzuk meg  $k$  értékét úgy, hogy az eltérések négyzetösszege, azaz a

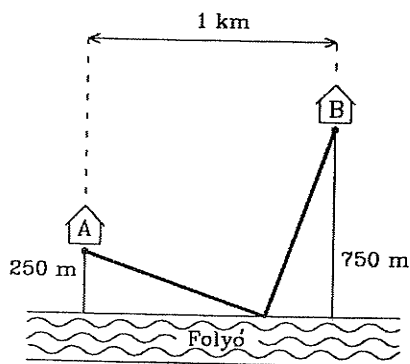
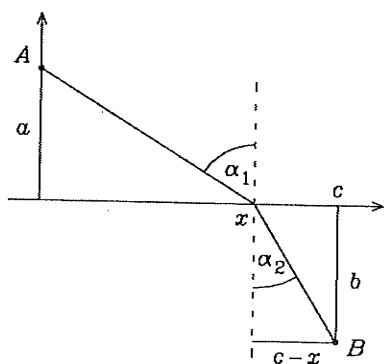
$$H(k) = \sum_{i=1}^4 (y_i - kx_i)^2$$

függvény értéke minimális legyen.

80. (Snell törvénye) A Fermat-elv szerint a fény két pont között azon az úton halad, melyet a legrövidebb idő alatt tesz meg. Mutassuk meg, hogy

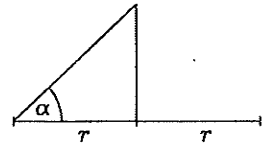
$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2},$$

ahol  $v_1$  illetve  $v_2$  a fény sebessége két különböző közegben, és  $\alpha_1$  illetve  $\alpha_2$  a közegek határára merőleges egyenes és a fénysugár által bezárt szög az egyik illetve a másik közegben. (Az alábbi ábrán a közegek határa az  $x$ -tengely, a fény az  $A(0, a)$  és  $B(c, -b)$  pont között halad.)



81. A jobb oldali ábrán látható  $A$  jelű házból a gazda elindul a folyó felé, megméri a vödrét, majd a) ugyanakkora sebességgel, b) harmadakkora sebességgel folytatja útját a  $B$  jelű házig. Milyen útvonalon halad, ha a legrövidebb idő alatt ér  $A$ -ból  $B$ -be.

- 82<sup>o</sup> Egy  $r$  sugarú, kör alakú asztal közepé fölött milyen magasra kell elhelyezni a lámpát, hogy az asztal szélén maximális legyen a megvilágítás erőssége? (A megvilágítás erőssége egyenesen arányos a hajlásszög szinuszával, és fordítva arányos a távolság négyzetével.)



- 83<sup>o</sup> Legfeljebb mekkora lehet annak a gerendának a hossza, amelyet egy 2 m sugarú kör alaprajzú, henger formájú toronyba be lehet vinni az oldalán lévő 2 m magas ajtón keresztül?

## Konvexitás, konkávitás, inflexiós pont

**D 11.8** Legyen  $f$  egyváltozós valós függvény. Ha az  $y = f(x)$  egyenletű görbének az  $x_0$  abszcisszájú pontban van érintője, és a görbe az  $x_0$  valamely környezetében az érintő felett (alatt) halad, akkor azt mondjuk, hogy az  $f$  függvény az  $x_0$  helyen **konvex (konkáv)**. Azt mondjuk, hogy az  $f$  függvény az  $(a, b)$  intervallumon **konvex (konkáv)**, ha annak minden pontjában az.

**T 11.9** Legyen  $n \geq 2$  és  $f$  az  $x_0$  pont valamely teljes környezetében legalább  $n$ -szer folytonosan differenciálható egyváltozós valós függvény; továbbá legyen  $f^{(k)}(x_0) = 0$ , ha  $1 < k < n$ , de  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ . A függvény az  $x_0$  helyen konvex, ha  $f^{(n)}(x_0) > 0$  és  $n$  páros, konkáv ha  $f^{(n)}(x_0) < 0$  és  $n$  páros. Ha  $n$  páratlan, akkor a függvénynek az  $x_0$  helyen inflexiós pontja van.

**T 11.10** Ha az egyváltozós valós  $f$  függvény az  $x_0$  pont valamely teljes környezetében legalább kétszer folytonosan differenciálható, és  $f''(x_0) > 0$ , akkor konvex, ha  $f''(x_0) < 0$ , akkor konkáv az  $f$  függvény az  $x_0$  pontban. Ha pedig  $f$  az  $x_0$  pont valamely teljes környezetében legalább háromszor folytonosan differenciálható, és  $f''(x_0) = 0$ , de  $f'''(x_0) \neq 0$ , akkor  $x_0$  a függvény inflexiós pontja.

**T 11.11** Ha az  $f$  függvény grafikonjának az  $x_0$  abszcisszájú pontjában van érintője, és  $f$  az  $x_0$  egy bal oldali környezetében konvex, egy jobb oldali környezetében konkáv (vagy fordítva), akkor  $f$ -nek az  $x_0$  helyen inflexiós pontja van.

## Feladatok

- 84<sup>o</sup> Legyen  $f$  legalább kétszer folytonosan differenciálható az  $x_0$  valamely teljes környezetében. A **T 11.10** felhasználásával mutassuk meg, hogy ha  $f$  szigorúan monoton nő és konvex (ill. konkáv)  $x_0$ -ban, akkor inverze szigorúan nő és konkáv (ill. konkáv)  $f(x_0)$ -ban, ha pedig  $f$  szigorúan monoton csökken és konvex (ill. konkáv)  $x_0$ -ban, akkor inverze is szigorúan csökken és konvex (ill. konkáv)  $f(x_0)$ -ban.

## 11. Függvényvizsgálat — L'Hospital szabály

Határozzuk meg, hogy az alábbi függvények mely intervallumokon konvexek, melyeken konkávok, és hol vannak inflexiós pontjaik:

$$85^\circ f(x) = x^3,$$

$$86^\circ f(x) = \sqrt[3]{x},$$

$$87^\circ f(x) = x + x^{5/3},$$

$$88. f(x) = (x - 5)^{5/3} + 2,$$

$$89^\circ f(x) = x \sin(\ln x),$$

$$90^\circ f(x) = 2 - |x^5 - 1|.$$

Magasabbrendű deriváltak segítségével határozzuk meg az  $f$  függvény inflexiós pontjait:

$$91. f(x) = x^3,$$

$$92. f(x) = x^{2n+1}, \quad n \in \mathbf{N}^+,$$

$$93. f(x) = x^{2n}, \quad n \in \mathbf{N}^+,$$

$$94. f(x) = \sin^2 x,$$

$$95^\circ f(x) = \operatorname{sh} x + \sin x,$$

$$96. f(x) = \operatorname{sh} x + \sin x + 3x,$$

97 $^\circ$  Mutassuk meg, hogy az  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$  függvény grafikonján az inflexiós pontok egy egyenesbe esnek.

98. Milyen  $c$  értékekre lesz az  $f(x) = x^4 + cx^3 + 3x^2 + 1$  függvény konvex minden  $x$ -re?

99 $^\circ$  Milyen feltételeket kell kielégítenie az  $a, b, c, d$  konstansoknak, hogy az  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$  függvénynek legyen inflexiós pontja?

## L'Hospital szabály

**T 11.12 L'Hospital szabály.** Legyen  $f$  és  $g$  két olyan egyváltozós valós függvény, amely az  $x_0$  valamely  $K$  környezetében értelmezve van és differenciálható, és  $g'(x) \neq 0$ , ha  $x \in K$ . Ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0, \quad \text{vagy} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty,$$

továbbá létezik az

$$L' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

határérték, akkor létezik az

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték is, és  $L = L'$ . Analóg állítás igaz  $K$  baloldali környezettel és a limeszjelben  $(x_0 - 0)$ -val, illetve  $K$  jobboldali környezettel és a limeszjelben  $(x_0 + 0)$ -val, valamint akkor, ha  $K$  a  $\infty$  ill.  $-\infty$  valamely környezete, és  $x_0$ -t a  $\infty$  ill.  $-\infty$  szimbólummal helyettesítjük.

**D 11.13** Ha  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , akkor az  $L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  határértéket,  $\frac{0}{0}$  típusú határértéknek nevezzük, ahol  $a$  lehet  $x_0, x_0 - 0, x_0 + 0, \infty, -\infty$ . Hasonló értelemben beszélhetünk  $\frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0$  vagy  $1^\infty$  típusú határértékekről. (Ezek azok a típusok, melyekről nem dönthető el ránézésre, hogy mi a határértékük, ezért határozatlan típus)oknak is nevezik őket.)

11. Függvényvizsgálat — L'Hospital szabály

**P 11.14** Ha egy  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$  vagy  $1^\infty$  típusú határértéket kell kiszámítanunk, akkor először algebrai átalakításokkal vagy logaritmálással  $\frac{\infty}{\infty}$  vagy  $\frac{0}{0}$  típusúvá alakítjuk, majd erre megpróbáljuk a L'Hospital szabályt alkalmazni. Azt, hogy a  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$  határérték kiszámítása helyett a  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x)$  kiszámítására térünk át, a két határérték közé tett  $\frac{L}{L}$  jellel fejezzük ki. Számítsuk ki az alábbi  $\infty - \infty$  (ellenőrizzük!) típusú határértéket (mely összevonás után  $\frac{0}{0}$  típusú határértékké alakul át):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{x}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x^2 + x}{(x-1)\ln x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x - 2x + 1}{(x-1)/x + \ln x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 2x^2 + x}{x - 1 + x \ln x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4x + 1}{2 + \ln x} = -\frac{3}{2}.$$

**Feladatok**

Ellenőrizzük, hogy az alábbi határértékek  $\frac{0}{0}$  típusúak-e, és számítsuk ki a határértékeket a L'Hospital szabály segítségével.

100.\*  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ ,      101.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$ ,      102.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ ,

103.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$ ,      104.\*  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{\ln(1+x)}$ ,      105.\*  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt{2+x+x}}$ ,

106.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x^2} - 1}{2 \operatorname{arctg} x^2 - \pi}$ .

Ellenőrizzük, hogy az alábbi határértékek  $\frac{\infty}{\infty}$  típusúak-e, és számítsuk ki a határértékeket a L'Hospital szabály segítségével.

107.\*  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x e^{x/2}}{e^x + x}$ ,      108.\*  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^2}{\sqrt{x}}$ ,      109.\*  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x \ln x}{e^x + x}$ ,

110.\*  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$ ,      111.\*  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{1 + \ln \sin x}$ ,      112.  $\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$ .

**113.\*** Ha  $x \rightarrow \infty$ , akkor az  $\log_a(x)$  ( $a > 1$ ),  $a^x$  ( $a > 1$ ),  $x^k$  ( $k > 0$ ) függvények is  $\infty$ -hez tartanak. Hasonlítsuk össze e három függvény értékét 'nagy'  $x$ -ekre, azaz, ha lehet, állítsuk őket nagyságszerinti sorrendbe. (Ehhez számítsuk ki a hányadosaik határértékét.)

Számítsuk ki az alábbi  $0 \cdot \infty$  típusú határértékeket!

114.\*  $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x$ ,      115.\*  $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln \sin x$ ,      116.  $\lim_{x \rightarrow +0} \ln x \ln(x+1)$ ,

117.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$ ,      118.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(-x)$ ,

119.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{arcsin} x \cdot \operatorname{ctg} x)$ ,      120.  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \operatorname{ctg} \pi x)$ ,

121.\*  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left( 1 + \frac{v}{x} \right)$ , ( $v \in \mathbf{R}$ ),      122.\*  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\epsilon e^{-x}$ , ( $\epsilon \in \mathbf{R}$ ),

123.\*  $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1 + \sin^2 x) \cdot \operatorname{ctg} \ln^2(1+x))$ .



11. Függvényvizsgálat — Függvények vizsgálata

124.\* Legyen  $p$  egy tetszőleges polinomfüggvény,  $r$  egy tetszőleges racionális törtfüggvény. Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x)e^{-x} = 0, \text{ illetve } \lim_{x \rightarrow \infty} r(x)e^{-x} = 0.$$

Számítsuk ki az alábbi  $\infty - \infty$  típusú határértékeket!

125.\*  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{x} - \frac{1}{\sin x} \right),$

126.\*  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left( x \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{2 \cos x} \right),$

127.\*  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right),$

128.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right),$

129.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right),$

130.\*  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{p}{1-x^p} - \frac{q}{1-x^q} \right), p, q \neq 0.$

Számítsuk ki az alábbi  $0^0$ ,  $\infty^0$  vagy  $1^\infty$  típusú határértékeket!

131.\*  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \right)^{\sin x},$

132.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x,$

133.\*  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x},$

134.  $\lim_{x \rightarrow +0} (1+x)^{\ln x},$

135.\*  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{s}{x} \right)^x, s \in \mathbf{R},$

136.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x^2}}.$

Vizsgáljuk meg, hogy alkalmazható-e a L'Hospital szabály az alábbi határértékekénél.

137.\*  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x},$

138.\*  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}.$

Határozzuk meg az alábbi függvényeknek a megadott intervallumokhoz tartozó infimumát és szuprimumát!

139.  $f(x) = \frac{\ln x}{x}, (1, \infty),$

140.  $f(x) = \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) e^{-x}, (0, \infty), n \in \mathbf{N}$  rögzített egész.

Határozzuk meg az alábbi függvények grafikonjának aszimptotáit!

141.  $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x} - 3x,$

142.  $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}.$

### Függvények vizsgálata

**M 11.15A** függvények vizsgálatához és ábrázolásához az alábbiakra lehet szükség:

- (1) határozzuk meg a függvény értelmezési tartományát;
- (2) vizsgáljuk meg, hogy a függvény páros-, páratlan-, vagy periodikus-e;
- (3) keressük meg a folytonossági intervallumokat és a szakadási helyeket;
- (4) vizsgáljuk meg a függvény viselkedését az értelmezési tartomány határpontjaiban, számítsuk a függvény határértékeit a szakadási pontokban és a  $\infty$  és  $-\infty$  helyeken, keressük meg az aszimptotákat;
- (5) határozzuk meg a függvény grafikonjának metszéspontjait a koordinátatengelyekkel;
- (6) keressük meg a szélsőérték helyeket, és azokat a szakaszokat, ahol a függvény monoton növekvő, illetve csökkenő;

## 11. Függvényvizsgálat — Paraméteresen adott síkgörbék vizsgálata

- (7) keressük meg az inflexió pontokat, és azokat a szakaszokat, ahol a függvény konvex, illetve konkáv;
- (8) esetleg egy-két további tulajdonság megállapítása, a grafikonon néhány pont koordinátáinak kiszámítása és az értékkészlet meghatározása után rajzoljuk fel a függvény grafikonját.

### Feladatok

Végezzük el az  $f$  függvény teljes vizsgálatát a bevezetőben leírtakat követve, ha  $f(x)$  az alábbi képlettel van megadva:

143.  $\frac{x^3 + 1}{x^2}$ ,                      144.  $\sqrt[3]{1 - x^3}$ ,                      145.  $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$ ,
146.  $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$ ,                      147.  $\arcsin \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$ ,                      148.  $x^2 e^{\frac{1}{x}}$ ,
149.  $x - 2 \arctg \frac{x}{x+1}$ ,                      150.  $\frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$ ,                      151.  $\frac{\ln x}{x}$ ,
152.  $x^x$ ,                      153.  $(x+1)^3 \sqrt[3]{x^2}$ ,                      154.  $x^2 \ln x^2$ ,
155.  $x^2 e^{-x}$ ,                      156.  $\sqrt{x} e^{\frac{1}{x}}$ ,                      157.  $4e^{(\sqrt{3}-2)x} \sin x$ ,
158.  $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$ .

### Paraméteresen adott síkgörbék vizsgálata

**D 11.16** Síma görbeívnek nevezzük az  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  ( $t_1 < t < t_2$ ) paraméteres egyenletrendszerrel jellemzett síkbeli ponthalmazt, ha a  $(t_1, t_2)$  nyílt intervallumban

1. az  $x(t)$  és  $y(t)$  akárhányszor differenciálhatók  $t$  szerint;
2. legfeljebb véges sok olyan  $t_0$  van, ahol  $\dot{x}(t_0) = 0$  vagy  $\dot{y}(t_0) = 0$ ;
3. egyetlen olyan  $t_0$  sincs, ahol egyidejűleg  $\dot{x}(t_0) = \dot{y}(t_0) = 0$  lenne.

**T 11.17** Síma görbeív bármely pontjában az  $y$  koordinátafüggvénynek  $x$  szerinti és az  $x$  koordinátafüggvénynek  $y$  szerinti differenciálhányadosa közül legalább az egyik létezik, mégpedig az  $x_0 = x(t_0)$  illetve  $y_0 = y(t_0)$  helyen

$$y'(x_0) = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}, \text{ ha } \dot{x}(t_0) \neq 0, \quad \left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=y_0} = \frac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)}, \text{ ha } \dot{y}(t_0) \neq 0.$$

**T 11.18** Síma görbeív bármely pontjában az  $y$  koordinátafüggvénynek  $x$  szerinti és az  $x$  koordinátafüggvénynek  $y$  szerinti második differenciálhányadosa közül legalább az egyik létezik, mégpedig az  $x_0 = x(t_0)$  helyen

$$y''(x_0) = \left(\frac{dy'/dt}{dx/dt}\right)_{t=t_0} = \left(\frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}\right)_{t=t_0}, \text{ ha } \dot{x}(t_0) \neq 0,$$

illetve az  $y$  és  $x$  felcserélésével adódó képlet érvényes az  $y_0 = y(t_0)$  helyen, ha  $\dot{y}(t_0) \neq 0$ .

**Feladatok**

A D 11.16 szerint mely  $(t_1, t_2)$  intervallumokon lesz az alábbi paraméteresen megadott görbe síma görbeiv?

159.  $x = t^2, y = t^3,$       160.  $x = |t|, y = t^3 + 1,$       161.  $x = \cos \frac{1}{t}, y = \sin \frac{1}{t}.$

Határozzuk meg az alábbi paraméteresen megadott  $x \mapsto y$  függvény  $x$  szerinti első és második deriváltját a paraméter kiküszöbölése nélkül:

162.  $x = 3t^2, y = 2t^3,$

163.  $x = 6t^2, y = t^3,$

164.  $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t,$

165.  $x = 3 \operatorname{tg} t - 1, y = \frac{5}{\cos t} + 2,$

166.  $x = \frac{2}{1+t^2}, y = \frac{2}{t(1+t^2)}.$  13.1.18

Határozzuk meg az alábbi paraméteres egyenletrendszerrel adott görbék  $t_0$  paraméterértékhez tartozó érintőjének egyenletét:

167.  $x = 4t + t^2, y = 2t^2, t_0 = 1,$

168.  $x = 2t - t^2, y = 3t - t^3, (a) t_0 = 0, (b) t_0 = 1.$

Határozzuk meg az alábbi paraméteres egyenletrendszerrel adott görbék  $t_0$  paraméterértékhez tartozó simulókörének egyenletét:

169.  $x = 2t - \frac{3}{t}, y = 2t + \frac{3}{t}, t_0 = \frac{1}{\sqrt{2}},$

170.  $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, t_0 = \pi/3.$

171. Mutassuk meg, hogy az  $x = 2t + |t|, y = 5t^2 + 4t|t|$  paraméteres egyenletrendszerrel megadott  $x \mapsto y$  függvény  $t = 0$  esetén differenciálható.

## 12. fejezet

# Határozatlan integrál

## Határozatlan integrál

**D 12.1** Azt mondjuk, hogy az egyváltozós valós  $f$  függvénynek a  $H$  halmazon primitív függvénye az  $F$  függvény, ha a  $H$  halmazon  $f$  és  $F$  értelmezve van, továbbá  $F$  differenciálható a  $H$  halmazon, mégpedig

$$F'(x) = f(x), \quad \text{ha } x \in H.$$

Az egyváltozós valós  $f$  függvény primitív függvényeinek összességét az  $f$  határozatlan integráljának nevezzük és a következőképpen jelöljük:  $\int f(x) dx$ , vagy  $\int f$ .

**T 12.2** Ha az egyváltozós valós  $f$  függvénynek valamely  $I$  intervallumon primitív függvénye  $F$  és  $G$ , akkor van olyan valós  $C$  szám, hogy az  $I$  intervallum minden  $x$  elemére  $G(x) = F(x) + C$ .

**D 12.3** Az elemi függvények differenciálási szabályaiból adódó integrálási képleteket alapintegráloknak nevezzük. A fontosabbak:

$$\begin{aligned} \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C^*, \quad \text{ha } n \neq -1, & \int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| + C^*; \\ \int e^x dx &= e^x + C, & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C; \\ \int \cos x dx &= \sin x + C, & \int \sin x dx &= -\cos x + C; \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \operatorname{tg} x + C^*, & \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\operatorname{ctg} x + C^*; \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C = -\arccos x + C, & \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \operatorname{arctg} x + C; \\ \int \operatorname{ch} x dx &= \operatorname{sh} x + C, & \int \operatorname{sh} x dx &= \operatorname{ch} x + C; \\ \int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx &= \operatorname{th} x + C, & \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx &= -\operatorname{cth} x + C; \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx &= \ln |x + \sqrt{x^2+1}| + C = \operatorname{arsh} x + C, & & \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx &= \ln |x + \sqrt{x^2-1}| + C = \operatorname{arch} x + C, & & \\ \int \frac{1}{1-x^2} dx &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C^* = \begin{cases} \operatorname{arth} x + C^*, & \text{ha } |x| < 1, \\ \operatorname{arch} x + C^*, & \text{ha } |x| > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

## 12. Határozatlan integrál — Az integrálás általános szabályai

Ahol  $C^*$  jelöli az integrációs konstans, ott ezzel azt jelezzük, hogy az integrandus értelmezési tartománya több intervallumból áll (az  $x^n$  függvényénél csak negatív  $n$  esetén), az összefüggés pedig csak egy, de bármelyik intervallumon érvényes. Az egész értelmezési tartományon érvényes összefüggést úgy kapunk, ha minden intervallumon külön konstans használunk. Pl.:

$$\int \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln x, & \text{ha } x > 0, \\ \ln(-x), & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

**T 12.4** A függvények differenciálási szabályaiból közvetlenül adódnak az integrálás alábbi általános szabályai:

$$(1) \quad \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx;$$

$$(2) \quad \int (k \cdot f(x)) dx = k \cdot \int f(x) dx \quad (k \in \mathbf{R});$$

$$(3) \quad \int f^v(x) f'(x) dx = \frac{f^{v+1}(x)}{v+1} + C, \quad (v \in \mathbf{R}, v \neq -1);$$

$$(4) \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C.$$

Ha  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , akkor bármely  $a$  és  $b$  ( $a \neq 0$ ) konstansokkal

$$(5) \quad \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C, \quad \text{speciálisan } \int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C.$$

Ha  $\int f(u) du = F(u) + C$ , akkor bármely differenciálható  $g$  belső függvénnyel

$$(6) \quad \int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C.$$

**P 12.5** Számítsuk ki az  $\frac{1}{(\sin^2 x)^{\sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}}$  határozatlan integrálját. A (3) szabályt alkalmazzuk:

$$\int \frac{dx}{(\sin^2 x)^{\sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}}} = - \int (\operatorname{ctg} x)^{-\frac{1}{4}} \cdot (\operatorname{ctg} x)' dx = - \frac{(\operatorname{ctg} x)^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + C = -\frac{4}{3} \sqrt[4]{\operatorname{ctg}^3 x} + C.$$

**P 12.6** Számítsuk ki az  $f(x) = \frac{\sin x \cdot \cos x}{1 + \sin^2 x}$  függvény határozatlan integrálját. Mivel

$(1 + \sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x$ , a (4) szabály alapján

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} \int 2f(x) dx = \ln \sqrt{1 + \sin^2 x} + C.$$

**P 12.7** Számítsuk ki az  $\int \frac{dx}{a + bx^2}$ , ( $a, b > 0$ ) határozatlan integrált. Átalakítás után az (5) szabályt alkalmazzuk:

$$\int f(x) dx = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{1 + \left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right)^2} = \frac{1}{a} \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{b}{a}}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{b}{a}}x \right) + C = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{b}{a}}x + C.$$

**P 12.8** Legyen  $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ . Állítsuk elő  $\int f(x) dx$ -et! A (5) szabállyal:

$$\int f(x) dx = \int \frac{\frac{dx}{x^2 + x + 1}}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

12. Határozatlan integrál — Az integrálás általános szabályai

**P 12.9** Számítsuk ki az  $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$  határozatlan integrált. A (6) szabállyal:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{\sin x}{\sqrt{2 \cos^2 x - 1}} dx = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2} \cos x)^2 - 1}} \cdot (\sqrt{2} \cos x)' dx = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arch}(\sqrt{2} \cos x) + C. \end{aligned}$$

**Feladatok**

Az összeg- és különbségfüggvény, illetve a konstanssal szorzott függvény integrálási szabályát alkalmazva oldjuk meg az alábbi feladatokat. (A gyökös kifejezéseket írjuk át törtkitevős alakba.)

- |                                 |  |
|---------------------------------|--|
| 1. $\int 7x^4 dx,$              | 2. $\int \sqrt[5]{x} dx,$  |
| 3. $\int (t^2 + 6t - 5) dt,$    | 4. $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}) dx,$                             |
| 5. $\int \sqrt{x} \sqrt{x} dx,$ | 6. $\int \left( 2e^x + \frac{5}{x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx.$ |

Oldjuk meg maradékos osztás után az alábbi feladatokat:

- |  |                                      |                                      |
|--|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 7.* $\int \frac{x^2 - 3x + 4}{x} dx,$                    | 8.* $\int \frac{x^3}{x + 5} dx,$     | 9.* $\int \frac{x^2}{1 - x^2} dx,$   |
| 10. $\int \frac{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2}{x - \sqrt{2}} dx,$ | 11. $\int \frac{x^4}{x^2 + a^2} dx,$ | 12. $\int \frac{x^5}{x^3 - a^3} dx,$ |
| 13. $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx.$                |                                      |                                      |

**A T 12.4** alatti (3) és (4) integrálási szabályok alapján oldjuk meg az alábbi feladatokat:

- |  |   |  |
|--|---|--|
| 14. $\int (2x - 3)^{100} dx,$                        | 15. $\int \frac{3x}{(2 + 3x^2)^3} dx,$        | 16. $\int \frac{x}{(1 + x^2)^2} dx,$                             |
| 17. $\int \frac{x^2 dx}{(8x^3 + 27)^{\frac{2}{3}}},$ | 18.* $\int \sqrt[3]{1 - 3x} dx,$              | 19.* $\int (a + bx)^n dx,$                                       |
| 20. $\int r^2 \sqrt[3]{1 + r^3} dr,$                 | 21. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4 + 1}},$  | 22. $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx,$                          |
| 23. $\int \sin^3 x \cos x dx,$                       | 24.* $\int \cos^3 x dx,$                      | 25. $\int \sin^3 x dx,$  |
| 26. $\int \sin^5 x dx,$                              | 27. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx,$              | 28. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx,$                         |
| 29. $\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx,$           | 30. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx,$ | 31. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx,$ |
| 32.* $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}},$       | 33. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx,$              | 34. $\int \frac{dx}{x \sqrt[3]{\ln x}},$                         |

$$\begin{array}{lll}
 35. \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x \, dx, & 36. \int \operatorname{ch}^3 x \, dx, & 37^\circ \int \sqrt{\operatorname{ch} x + 1} \, dx, \\
 38. \int \frac{7}{4x-1} \, dx, & 39. \int \frac{8x-7}{4x^2-7x+11} \, dx, & 40. \int \frac{2x+3}{x^2+3x-10} \, dx, \\
 41. \int \frac{3-4x}{2x^2-3x+1} \, dx, & 42. \int \frac{x}{x^2+a^2} \, dx, & 43. \int \frac{3x^2}{a^3+x^3} \, dx, \\
 44^\circ \int \frac{dx}{\sin x \cos x}, & 45^\circ \int \frac{dx}{\sin x}, & 46. \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}, \\
 47. \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}, & 48. \int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} \, dx, & 49. \int \frac{a^x}{a^x+1} \, dx,
 \end{array}$$

A T 12.4 alatti (5) és (6) integrálási szabályok alapján oldjuk meg az alábbi feladatokat:

$$\begin{array}{lll}
 50. \int \frac{dx}{2+3x^2}, & 51. \int \frac{dx}{3x^2+6x+5}, & 52. \int \frac{dx}{3x^2-2x-1}, \\
 53. \int \frac{1}{x^2-2x-3} \, dx, & 54. \int \frac{dx}{x^2-6x-16}, & 55^\circ \int \frac{x \, dx}{4+x^4}, \\
 56^\circ \int \frac{x}{a^4-x^4} \, dx, & 57^\circ \int \frac{x^3}{x^8-2} \, dx, & 58. \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}, \\
 59^\circ \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+5}}, & 60^\circ \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x-3}}, & 61^\circ \int \frac{dx}{\sqrt{3+6x-9x^2}}, \\
 62. \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}, & 63. \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}, & 64. \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}, \\
 65. \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx, & 66. \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \, dx, & 67^\circ \int \frac{dx}{a^{-x}+a^x} \, dx, \\
 68. \int \frac{\sin \ln x}{x} \, dx, & 69^\circ \int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}} \, dx, & 70. \int \frac{dx}{x \ln x}, \\
 71. \int \frac{dx}{x \ln x \cdot \ln \ln x}, & 72^* \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}, & 73^* \int \frac{a^2 b^2 \, dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}.
 \end{array}$$

## Parciális integrálás

D 12.10 A szorzatfüggvény differenciálási szabályából nyerhető

$$\int f'(x)g(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) \, dx$$

képletet a parciális integrálás képletének nevezzük, és ha ezt a képletet alkalmazzuk, akkor azt mondjuk, hogy az illető függvényt parciálisan integráljuk.

A parciális integrálásra különösen alkalmas függvények típusai:

1. típus. A

$$p(x) \cdot t(ax+b) \quad (a, b \in \mathbf{R}; a \neq 0)$$

alakú függvények, amelyekben  $p$ : polinomfüggvény,  $t$ : a  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{sh}$ ,  $\operatorname{ch}$ ,  $\exp$  valamelyike. Ebben az esetben legyen  $f'(x) = t(ax+b)$  és  $g(x) = p(x)$ . Annyi parciális integrálásra lesz

## 12. Határozatlan integrál — Parciális integrálás

szükségünk, amennyi  $p$  foka.

2. típus. Az

$$x^v \ln^n x \quad (n \in \mathbf{N}, v \in \mathbf{R}, v \neq -1)$$

alakú függvények. Ebben az esetben legyen  $f'(x) = x^v$  és  $g(x) = \ln^n x$ . Itt  $n$  parciális integrálásra lesz szükség.

3. típus. A

$$t_1(ax + b) \cdot t_2(cx + d) \quad (a, b, d \in \mathbf{R}; a \neq 0, c \neq 0)$$

alakú függvények, ahol  $t_1$  és  $t_2$  az 1. típusnál a  $t$ -ként felsorolt öt függvény valamelyike. (Az  $f'(x)$  és  $g(x)$  megválasztásához lásd P 12.11.)

4. típus. A

$$p(x) \cdot a(x)$$

alakú függvények, amelyekben  $p$ : polinomfüggvény,  $a$ : arkusz- vagy areafüggvény. Ebben az esetben legyen  $f'(x) = p(x)$  és  $g(x) = a(x)$ .

**P 12.11** A 3. típusú függvények parciális integrálásánál egyenletet írhatunk fel a kiszámítandó határozatlan integrálra, mely egyenlethez két módon is eljuthatunk. Szemléltessük ezt az

$$I = \int e^{ax} \sin bx \, dx \quad (a, b \neq 0 \text{ konstans})$$

kiszámításán. Eljárhatunk úgy, hogy  $I$ -t két különböző módon parciálisan integráljuk, egyszer  $f'(x) = \sin bx$  és  $g(x) = e^{ax}$  választással, majd  $f'(x) = e^{ax}$ ,  $g(x) = \sin bx$  választással:

$$I = -e^{ax} \frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx \, dx,$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx \, dx.$$

Az első egyenletet  $\frac{b}{a}$ -val, a másodikat  $\frac{a}{b}$ -vel szorozva és összeadva kapjuk, hogy

$$\frac{b}{a}I + \frac{a}{b}I = \frac{a^2 + b^2}{ab}I = \frac{e^{ax}}{b} \sin bx - \frac{e^{ax}}{a} \cos bx, \text{ amiből } I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + C.$$

Eljárhatunk úgy is, hogy a fenti első egyenletben tovább integráljuk parciálisan a második tagot  $f'(x) = \cos bx$ ,  $g(x) = e^{ax}$  választással:

$$I = -e^{ax} \frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b} \left( e^{ax} \frac{\sin bx}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx \right) = \frac{e^{ax}}{b^2}(a \sin bx - b \cos bx) - \frac{a^2}{b^2}I.$$

Ebből ismét

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + C.$$



## Feladatok

A parciális integrálás módszerével oldjuk meg az alábbi feladatokat:

- 74.°  $\int x \cos x dx$ ,      75.  $\int x \sin 2x dx$ ,      76.  $\int x^2 \cos 2x dx$ ,  
 77.  $\int x \cos 2x dx$ ,      78.  $\int x^2 \sin 2x dx$ ,      79.  $\int x^3 \sin x dx$ ,  
 80.  $\int x^3 \cos x dx$ ,      81.  $\int x \cos^2 x dx$ .      82.  $\int x \cdot 3^x dx$ ,  
 83.  $\int x e^{-x} dx$ ,      84.  $\int x^2 e^{-2x} dx$ ,      85.  $\int e^{-x} \sin x dx$ ,  
 86.  $\int e^{2x} \cos x dx$ ,      87.°  $\int e^{ax} \cos bx dx$ ,      88.  $\int e^{6x} \cos 4x dx$ ,  
 89.  $\int e^x \sin^2 x dx$ ,      90.  $\int \arcsin x dx$ ,      91.  $\int (\arcsin x)^2 dx$ ,  
 92.  $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$ ,      93.  $\int \arccos \frac{1}{x} dx$ ,      94.  $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{3} dx$ ,  
 95.°  $\int x \operatorname{arctg} x dx$ ,      96.°  $\int \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} dx$ ,      97.  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$ ,  
 98.  $\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$ ,      99.  $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ ,      100.°  $\int \ln x dx$ ,  
 101.  $\int \ln^2 x dx$ ,      102.  $\int \ln^3 x dx$ ,      103.  $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$ ,  
 104.  $\int \ln(x^2+1) dx$ ,      105.  $\int \ln \frac{8-x}{3} dx$ ,      106.  $\int \lg \frac{4}{x} dx$ ,  
 107.  $\int x^2 \ln(1+x) dx$ ,      108.  $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$ ,      109.  $\int x^v \ln x dx$ , ( $v \neq -1$ ),  
 110.  $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} dx$ ,      111.  $\int x \operatorname{sh} x dx$ ,      112.  $\int x^3 \operatorname{ch} 3x dx$ ,  
 113.  $\int (2x-x^2) \operatorname{sh} x dx$ ,      114.  $\int \operatorname{ch} x \cos 5x dx$ .
115. Igazoljuk, hogy  $\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$  ( $n \in \mathbf{N}^+$ ).
116. Igazoljuk, hogy  $\int \sin^n x dx = \frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$  ( $n \in \mathbf{N}^+$ ).

## Integrálás helyettesítéssel

**D 12.12** Az  $f(x)$  függvény helyettesítéssel történő integrálásáról beszélünk, ha

1. az  $x$  változó helyébe valamely  $t$  változónak egy invertálható és differenciálható  $u(t)$  függvényét helyettesítjük; kimutatható, hogy ekkor a  $dx$  helyébe az  $u'(t) dt$  kifejezést kell írunk, és a számítást a következőképpen kell folytatnunk;
2. elvégezzük a  $t$  szerinti integrálást;
3. végül az  $u$  függvény  $\bar{u}$  inverzét véve a  $t = \bar{u}(x)$  helyettesítéssel visszaírjuk az eredeti  $x$  változót. Képletben:

$$\int f(x) dx = \left( \int f(u(t))u'(t) dt \right)_{t=\bar{u}(x)}$$

Megjegyzés. A gyakorlatban esetenként nem közvetlenül az  $x$  változó helyébe vezetjük be az  $u(t)$  függvényt, hanem az  $f$  valamely belső függvényét helyettesítjük valamely más függvénnyel, vagy egyszerűen  $x$  valamely függvénye helyébe írjuk a  $t$  változót. Ez az utóbbi eset azonos a (6) képletben leírttal.

**T 12.13 A leggyakoribb helyettesítések:** Legyen  $R(x, y)$  egy racionális törtfüggvény. Az alább konkrétan megnevezett  $f$  és  $g$  függvényekből felépített  $R(f, g)$  függvények integrálásához használatos helyettesítések:

Az  $R(\sin x, \cos x)$  típus esetén a  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$  helyettesítés. Ekkor

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ha  $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$ , akkor használható az általában egyszerűbb  $\operatorname{tg} x = t$  helyettesítés is. Ekkor

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Az  $R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$  típus esetén vagy az ( $R(e^x)$  esetben használható)  $e^x = t$  helyettesítés, amikor  $dx = \frac{dt}{t}$ , vagy a  $\operatorname{th} \frac{x}{2} = u$  helyettesítés, amikor

$$\operatorname{sh} x = \frac{2u}{1-u^2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1+u^2}{1-u^2}, \quad dx = \frac{2du}{1-u^2}.$$

Az  $R\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$  esetén a helyettesítés  $x = \sin t$ .

Az  $R\left(x, \sqrt{x^2+1}\right)$  esetén a helyettesítés  $x = \operatorname{sh} t$ .

Az  $R\left(x, \sqrt{x^2-1}\right)$  esetén a helyettesítés  $x = \operatorname{ch} t$ , ha  $x \geq 0$ , és

az  $R\left(x, \sqrt{x^2-1}\right)$  esetén a helyettesítés  $x = -\operatorname{ch} t$ , ha  $x \leq 0$ .

Az  $R\left(x^{\frac{a}{b}}, x^{\frac{c}{d}}, \dots, x^{\frac{k}{l}}\right)$  ( $a, b, c, d, \dots, k, l \in \mathbf{N}^+$ ) esetén a helyettesítés  $x = u^\lambda$ , ahol  $\lambda$  a kitevők nevezőinek legkisebb közös többszöröse.

**P 12.14** Gyakran az alkalmas helyettesítés megtalálásához az integrálandó függvényen átalakítást kell végeznünk. Keressük például a  $\sqrt{1+2x-x^2}$  függvény határozatlan integrálját.

Előbb átalakítjuk a függvényt:

$$I = \int \sqrt{1+2x-x^2} dx = \int \sqrt{2-(x-1)^2} dx = \sqrt{2} \int \sqrt{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2} dx.$$

Ez utóbbi alak az  $u = \frac{x-1}{\sqrt{2}}$  helyettesítéssel  $R(u, \sqrt{1-u^2})$  típusú lesz, amelyre a T 12.13 szerint az  $u = \sin t$  helyettesítést alkalmazzuk. A több lépésből álló helyettesítés egy lépésben is elvégezhető:  $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \sin t$ . Ekkor  $dx = \sqrt{2} \cos t dt$ , és

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{2} \int \cos t \cdot \sqrt{2} \cos t dt = 2 \int \cos^2 t dt = 2 \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = t + \frac{\sin 2t}{2} + C = \\ &= \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2}} + \sin t \cdot \cos t + C = \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2}} + \frac{x-1}{\sqrt{2}} \sqrt{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2} + C = \\ &= \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2}} + (x-1)\sqrt{1+2x-x^2} + C. \end{aligned}$$

P 12.15 Előfordulhat, hogy a fentiekben ajánlott helyettesítésnél kevesebb számolással járó helyettesítést is találhatunk. Számítsuk ki például az  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$  ( $x > 1$ ) integrált. Az aján-

lott helyettesítés:  $x = \operatorname{ch} t$ . Ekkor  $dx = \operatorname{sh} t dt$  és  $I = \int \frac{\operatorname{sh} t dt}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dt}{\operatorname{ch} t}$ .

Ez utóbbit megoldhatjuk a  $\operatorname{th} \frac{t}{2} = u$  helyettesítéssel: a (13) képletek szerint  $I = \int \frac{2du}{1+u^2} = 2 \operatorname{arctg} u + C$ . A  $\operatorname{ch} t = \frac{1+u^2}{1-u^2}$  egyenletből  $u = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} t - 1}{\operatorname{ch} t + 1}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ , tehát  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C$ .

Számítsuk ki ugyanezt a feladatot  $t = \frac{1}{x}$  helyettesítéssel. Ekkor  $dx = -\frac{1}{t^2}$ , és

$$I = \int t \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arccos t + C = \arccos \frac{1}{x} + C.$$

Látható, hogy ez utóbbi helyettesítés kevesebb számolással jár.

Megjegyzés. Az  $\int \frac{dt}{\operatorname{ch} t}$  integrált más módon is kiszámíthatjuk. Bővítve a törtet  $\operatorname{ch} t$ -vel és  $\operatorname{ch}^2 t$  helyére  $(1 + \operatorname{sh}^2 t)$ -et írva,  $u = \operatorname{sh} t$  helyettesítéssel

$$I = \int \frac{\operatorname{ch} t dt}{1 + \operatorname{sh}^2 t} = \int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} t) + C = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} + C.$$

Más átalakítással és  $u = e^t$  helyettesítéssel:

$$I = \int \frac{dt}{\operatorname{ch} t} = \int \frac{dt}{\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})} = 2 \int \frac{e^t}{e^{2t} + 1} dt = 2 \int \frac{du}{1+u^2} = 2 \operatorname{arctg}(e^t) + C.$$

Az  $x = \operatorname{ch} t$  egyenlőségből  $t = \operatorname{arch} t = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ , tehát  $I = 2 \operatorname{arctg}(x + \sqrt{x^2-1}) + C$ .

Differenciálással meggyőződhetünk arról, hogy mind a négy módon a megadott függvény határozatlan integrálját kaptuk meg az  $(1, \infty)$  intervallumban. Ez azt is jelenti, hogy az eredmények jobb oldalán első tagként álló függvények legfeljebb konstans összeadandóban térhetnek el egymástól.

Feladatok

A T 12.13 alatt felsorolt helyettesítések valamelyikével vagy más alkalmas helyettesítéssel oldjuk meg az alábbi feladatokat ( $a, b, c$  konstansok és  $a > 0$ ).

- |  |   |  |
|--|---|--|
| 117 <sup>o</sup> $\int \sqrt{1-x^2} dx,$                         | 118. $\int \sqrt{a^2-x^2} dx,$                        | 119. $\int \sqrt{a^2+x^2} dx,$                       |
| 120. $\int \sqrt{5+3x^2} dx,$                                    | 121. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx,$            | 122 <sup>o</sup> $\int x\sqrt{c+x} dx,$              |
| 123. $\int \frac{dx}{x\sqrt{c+x}},$                              | 124. $\int \sqrt{(x^2-1)^3} dx,$                      | 125. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}},$             |
| 126 <sup>o</sup> $\int \sqrt{1+x^2} dx,$                         | 127. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} dx,$              | 128 <sup>o</sup> $\int \sqrt{\frac{x}{x-1}} dx,$     |
| 129 <sup>o</sup> $\int \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx,$                 | 130 <sup>o</sup> $\int \sqrt{3-2x-x^2} dx,$           | 131. $\int \sqrt{5-3x^2} dx,$                        |
| 132. $\int \sqrt{x^2+2x+2} dx,$                                  | 133 <sup>o</sup> $\int \sqrt{3x^2-3x+1} dx,$          | 134. $\int \sqrt{5-2x+x^2} dx,$                      |
| 135. $\int \sqrt{15+2x-x^2} dx,$                                 | 136. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}},$       |  |
| 137. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}},$                          | 138. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}},$              | 139. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+2x^2}},$            |
| 140. $\int \frac{dx}{x^4+x},$                                    | 141. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}},$          | 142. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})},$      |
| 143. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)} dx,$                          | 144. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+1}} dx,$      | 145. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x},$              |
| 146 <sup>o</sup> $\int \sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}} dx,$ | 147. $\int \frac{dx}{1+\sin x},$                      | 148. $\int \frac{dx}{1+\cos x},$                     |
| 149. $\int \frac{dx}{\cos x},$                                   | 150. $\int \frac{dx}{5+3\cos x},$                     | 151. $\int \frac{dx}{5+4\sin 2x},$                   |
| 152 <sup>o</sup> $\int \frac{dx}{1-\sin^4 x},$                   | 153 <sup>o</sup> $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x},$ | 154 <sup>o</sup> $\int \frac{3x^2-1}{(x^2+1)^3} dx,$ |
| 155. $\int \frac{\ln \ln x}{x} dx,$                              | 156 <sup>o</sup> $\int \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^4 x}},$ | 157 <sup>o</sup> $\int \sqrt{e^x-1} dx,$             |
| 158. $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx,$                             | 159. $\int \frac{1}{\operatorname{sh} x} dx,$         | 160 <sup>o</sup> $\int \frac{dx}{c+b\cos x}.$        |

## Racionális törtfüggvények integrálása

**T 12.16** A valós együtthatós racionális  $R(x)$  törtfüggvény maradékos osztással

$$R(x) = g(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$$

alakra hozható, ahol  $P(x)$  fokszáma kisebb  $Q(x)$  fokszámánál.

**T 12.17** A  $Q(x)$  valós együtthatós polinomfüggvény egyértelműen előállítható elsőfokú, és negatív diszkriminánusú másodfokú polinomfüggvények szorzataként:

$$Q(x) = a_0(x - x_1)^{\alpha_1} \cdots (x - x_k)^{\alpha_k} (x^2 + b_1x + c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2 + b_lx + c_l)^{\beta_l}.$$

**T 12.18** Ha  $Q(x)$ -nek az előző tétel szerinti felbontása ismeretes, akkor  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  törtfüggvényt

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1^{(1)}}{x - x_1} + \frac{A_2^{(1)}}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{\alpha_1}^{(1)}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \cdots \\ & \cdots + \frac{A_1^{(k)}}{x - x_k} + \frac{A_2^{(k)}}{(x - x_k)^2} + \cdots + \frac{A_{\alpha_k}^{(k)}}{(x - x_k)^{\alpha_k}} + \\ & + \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{x^2 + b_1x + c_1} + \frac{B_2^{(1)}x + C_2^{(1)}}{(x^2 + b_1x + c_1)^2} + \cdots + \frac{B_{\beta_1}^{(1)}x + C_{\beta_1}^{(1)}}{(x^2 + b_1x + c_1)^{\beta_1}} + \cdots \\ & \cdots + \frac{B_1^{(l)}x + C_1^{(l)}}{x^2 + b_lx + c_l} + \frac{B_2^{(l)}x + C_2^{(l)}}{(x^2 + b_lx + c_l)^2} + \cdots + \frac{B_{\beta_l}^{(l)}x + C_{\beta_l}^{(l)}}{(x^2 + b_lx + c_l)^{\beta_l}} + \cdots \end{aligned}$$

képlet szerint elemi törtfüggvények (parciális törtek) összegére bonthatjuk. Az itt még ismeretlen  $A^{(i)}$ ,  $B^{(i)}$ ,  $C^{(i)}$  számok meghatározására egyenletrendszert írhatunk fel.

**P 12.19** Számítsuk ki az  $\frac{1}{x^6 + x^4}$  függvény határozatlan integrálját.

A nevezőt a **T 12.17** szerinti alakra hozzuk:  $x^6 + x^4 = x^4(x^2 + 1)$ . Ezt felhasználva a függvényt előállítjuk elemi törtek összegeként:

$$\frac{1}{x^4(x^2 + 1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{A_4}{x^4} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}.$$

A jobb oldalt összevonva, a két oldal számlálójának azonosan egyenlőnek kell lennie:

$$1 = A_1x^3(x^2 + 1) + A_2x^2(x^2 + 1) + A_3x(x^2 + 1) + A_4(x^2 + 1) + (Bx + C)x^4.$$

Átrendezve  $x$  hatványai szerint:

$$1 = (A_1 + B)x^5 + (A_2 + C)x^4 + (A_1 + A_3)x^3 + (A_2 + A_4)x^2 + A_3x + A_4.$$

A megfelelő együtthatók összehasonlításával:

$$A_4 = 1, A_3 = 0, A_1 + B = 0, A_2 + C = 0, A_1 + A_3 = 0, A_2 + A_4 = 0.$$

Ezekből  $A_1 = 0, A_2 = -1, B = 0, C = 1$ . Tehát

$$\int \frac{dx}{x^6 + x^2} = \int \left( -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \arctg x + C.$$

Amennyiben  $Q(x)$  gyökei között több egyszeres gyök van, az  $A_j^{(i)}$ ,  $B_j^{(i)}$ ,  $C_j^{(i)}$  számok meghatározását célszerűbben az alábbi példában szemléltetett módon végezhetjük.

## 12. Határozatlan integrál — Vegyes feladatok.

P 12.20 Számítsuk ki az  $\frac{x^2}{1-x^4}$  függvény határozatlan integrálját. Elemi törtek összegére bontjuk a függvényt:

$$\frac{x^2}{1-x^4} = \frac{-x^2}{x^4-1} = \frac{-x^2}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Ebből  $-x^2 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)$ .

Legyen  $x = 1$ ; akkor  $-1 = 4A$ , azaz  $A = -\frac{1}{4}$ .

Legyen  $x = -1$ ; akkor  $-1 = -4B$ , azaz  $B = \frac{1}{4}$ .

Legyen  $x = 0$ ; akkor  $0 = A - B - D$ , azaz  $D = -\frac{1}{2}$ .

A  $C$ -t az  $x$  együtthatóiból állapítjuk meg:  $A + B - C = 0$ , azaz  $C = 0$ . Tehát

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{1-x^4} dx &= \int \frac{-x^2}{x^4-1} dx = \int \left( -\frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)} \right) dx = \\ &= -\frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

### Feladatok

Integráljuk az alábbi racionális törtfüggvényeket, illetve helyettesítéssel ilyenekre visszavezethető függvényeket.

161.  $\frac{1}{x^3-8},$

162.  $\frac{1}{x^2-2x-3},$

163.  $\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)},$

164.  $\frac{x-3}{x^3-x},$

165.  $\frac{1}{x^4-x^2},$

166.  $\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)},$

167.  $\frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4},$

168.  $\frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2},$

169.  $\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)},$

170.  $\frac{x}{x^3-1},$

171.  $\frac{1}{x(3+5x^6)}, (u = x^6),$

172.  $\frac{8}{7x+3x^5}, (u = x^4),$

173.  $\frac{6dx}{e^x-3},$

174.  $\frac{\ln x + 1}{x^x - 1},$

175.  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x+1}.$

### Vegyes feladatok.

176. Határozzuk meg az  $\int x f''(x) dx$  integrált.

177. Határozzuk meg az  $\int f'(2x) dx$  integrált.

178. Határozzuk meg az  $f$  függvényt, ha  $f'(x^2) = \frac{1}{x} (x > 0)$ .

179. Határozzuk meg az  $f$  függvényt, ha  $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$ .

12. Határozatlan integrál — Vegyes feladatok.

180. Legyen  $f$  folytonos és invertálható függvény, inverzét jelölje  $f^{-1}$ . Mutassuk meg, hogy ha

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

akkor

$$\int f^{-1}(x) dx = x f^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C.$$

Ellenőrizzük e formulát az  $x^n$ ,  $e^x$ ,  $\arcsin x$  függvényekkel!

Határozzuk meg az alábbi integrálok értékét.

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 181. <sup>▷</sup> $\int  x  dx,$                                 | 182. $\int x x  dx,$   | 183. $\int ( 1+x  -  1-x ) dx,$                                     |
| 184. $\int e^{- x } dx,$   | 185. $\int \max(1, x^2) dx,$   | 186. <sup>▷</sup> $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx,$                  |
| 187. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx,$                        | 188. $\int x \ln(4+x^4) dx,$   | 189. <sup>▷</sup> $\int \frac{x^2 dx}{x^6 - 10x^3 + 9},$            |
| 190. $\int \frac{x^3 dx}{x^4 - x^2 + 2},$                        | 191. $\int \frac{2x-3}{9x^2 - 12x + 4} dx,$                              | 192. $\int \frac{3x-2}{x^2 + 4x + 8} dx,$                           |
| 193. <sup>*</sup> $\int \frac{dx}{1+x^4},$                       | 194. $\frac{1}{x^2 - x + 2},$  | 195. $\int \frac{x}{x^4 - 2x^2 - 1} dx,$                            |
| 196. <sup>▷</sup> $\int \frac{dx}{\cos^3 x},$                    | 197. $\int \frac{dx}{\sin^3 x},$   | 198. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x}.$                       |
| 199. <sup>▷</sup> $\int \frac{dx}{\cos^4 x},$                    | 200. $\int \frac{dx}{\sin^4 x},$   | 201. $\int \operatorname{tg}^3 x dx,$                               |
| 202. $\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx,$          | 203. $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx,$                         | 204. $\int \operatorname{tg}^2 x dx,$                               |
| 205. $\int \operatorname{tg}^5 x dx,$                            | 206. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx,$                                | 207. $\int \cos^6 x dx,$  |
| 208. $\int x(\arctg x)^2 dx,$                                    | 209. $\int x^2 a^x dx \ (a > 1),$  | 210. $\int \frac{\operatorname{sh}^5 x}{\operatorname{ch}^4 x} dx,$ |
| 211. $\int \frac{dx}{a + b \operatorname{sh} x},$                | 212. <sup>*</sup> $\int \frac{dx}{(a + b \operatorname{sh} x)^2},$       | 213. $\int \sin \ln x dx.$  |
| 214. $\int \frac{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4-1}} dx,$ | 215. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx,$ |   |
| 216. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \sqrt{1 + 3 \cos^2 x} dx,$    | 217. $\int 2 \operatorname{tg} x \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^4 x}} dx,$      |   |
| 218. $\int \sin x \cos x \sqrt{\cos^6 x + \sin^6 x} dx,$         | 219. $\int \frac{dx}{(a + b \cos x)^2},$                                 |   |

### 13. fejezet

## Határozott integrál

### A határozott integrál fogalma és tulajdonságai

**D 13.1** Legyen  $f$  az  $[a, b]$  intervallumon legfeljebb véges számú pont kivételével mindenütt értelmezett korlátos valós függvény, továbbá legyen

$$B: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

az  $[a, b]$  intervallum valamely beosztása, és legyen  $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Az

$$I = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

összeget az  $f$  függvényhez, a  $B$  beosztáshoz és annak  $[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]$  reprezentánsrendszeréhez tartozó **integrálközelítő összegnek** nevezzük.

Ha az  $[a, b]$  intervallum minden határon túl finomodó  $[B_m; m \in \mathbf{N}^+]$  beosztássorozatához tartozó integrálközelítő összegek bármely  $[I_m]$  sorozatának van határértéke, akkor azt mondjuk, hogy  $f$  az  $[a, b]$  intervallumon **integrálható**; ezt a határértéket – amely minden ilyen  $[I_m]$  esetén ugyanaz a szám – az  $f$  függvény  $[a, b]$  intervallumon vett **határozott integráljának** nevezzük és így jelöljük:

$$\int_a^b f(x) dx \text{ vagy } \int_a^b f.$$

**T 13.2** Bármely integrálható  $f, g$  függvényekre és bármely  $a, b, c$  valós számokra érvényesek az alábbi tulajdonságok:

$$(1) \quad \int_a^b (c \cdot f(x)) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx,$$

$$(2) \quad \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$$

$$(3) \quad \int_a^a f(x) dx = 0,$$

$$(4) \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

$$(5) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

$$(6) \quad m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b - a), \text{ ahol } m \text{ az } f \text{ függvénynek alsó korlátja, } M \text{ pedig felső korlátja az } [a, b] \text{ intervallumon.}$$



### 13. Határozott integrál — Impropius integrálok

**T 13.3 (Integrál-középtéktétel.)** Ha az  $f$  függvény az  $[a, b]$  intervallumon folytonos, akkor integrálható is, és van olyan  $c \in [a, b]$ , hogy

$$(7) \quad \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c).$$

**T 13.4 Newton–Leibnitz-formula.** Ha  $f$  és  $F$  függvények az  $[a, b]$  intervallumon folytonosak, továbbá  $F$  a  $f$ -nek primitív függvénye az  $(a, b)$  intervallumon, akkor

$$(8) \quad \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b, \text{ ahol } [F(x)]_a^b := F(b) - F(a).$$

**P 13.5** Keressünk olyan  $c$  számot, amely kielégíti az  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  függvényre és a  $[-1, 1]$  intervallumra vonatkozó integrál-középtéktételt.

A (8) alapján

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} [\arctg x]_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{4} - \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right] = \frac{\pi}{4}$$

és  $f(c) = \frac{1}{1+c^2}$ ; ezért (7) szerint  $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1+c^2}$ , azaz  $c^2 = \frac{4-\pi}{\pi}$ . Tehát két ilyen szám van:

$$c_1 = -\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}} \text{ és } c_2 = \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}.$$

#### Feladatok

1<sup>o</sup> Számítsuk ki az  $f(x) = x + 1$  függvénynek a  $B = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$  beosztáshoz és a  $\{\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}\}$  reprezentánsrendszerhez tartozó integrálközelítő összegét.

Számítsuk ki a megadott integrálokat a D 13.1 definíció segítségével úgy, hogy az adott intervallumot  $n$  egyenlő részre osztjuk és reprezentánsrendszernek az intervallumok bal vagy jobb végpontját választjuk:

$$2^o \quad \int_0^1 x dx, \quad 3. \quad \int_0^2 x^2 dx, \quad 4. \quad \int_0^2 2 dx.$$

$$5^o \quad \int_0^1 x dx + \int_2^1 -x dx + \int_3^3 x^3 dx, \quad 6^o \quad \int_0^5 (5x^3 + 1) dx + \int_5^4 (5x^3 + 1) dx.$$

7<sup>o</sup> Adjunk alsó és felső becslést az  $I = \int_2^4 e^{-x^2} \sin \frac{\pi x}{4} dx$  integrál értékére!

Keressük meg azokat a  $c$  számokat, amelyek kielégítik az alább megadott  $f$  függvényre és  $[a, b]$  intervallumra vonatkozó integrál-középtéktételt.

$$8^o \quad f(x) = 3x^2, \quad [-4, -1], \quad 9. \quad f(x) = \sqrt{2x+1}, \quad [4, 12],$$

$$10. \quad f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \quad 11. \quad f(x) = \sin x; \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$12. \quad f(x) = \sin x; \quad [0, \pi].$$

### Improprius integrálok

**D 13.6** Az  $I = [a, \infty)$ , ill.  $I = (-\infty, b]$ , ill.  $I = (-\infty, \infty)$  intervallumon értelmezett  $f$  függvény (végtelenbe nyúló)  $I$  intervallumon vett improprius integráljának jele és értelmezése:

$$(9) \quad \int_a^\infty f := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f, \quad \text{ill.} \quad \int_{-\infty}^b f := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f, \quad \text{ill.} \quad \int_{-\infty}^\infty f := \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f,$$

amennyiben  $f$  minden véges  $[a, b]$  intervallumon integrálható, és a jobb oldalra írt határértékek léteznek (a legutóbbi esetben úgy, hogy  $a$  és  $b$  egymástól függetlenül tart mínusz végtelenhez, illetve végtelenhez).

**D 13.7** Ha az  $I = (a, b]$ , ill.  $I = [a, b)$ , ill.  $I = (a, b)$  intervallumon értelmezett  $f$  függvény az  $I$ -hez nem tartozó határpont(ok) környezetében nem korlátos, de integrálható minden

$$[t, b] \quad (a < t) \quad \text{ill.} \quad [a, u] \quad (u < b), \quad \text{ill.} \quad [t, u] \quad (a < t < u < b)$$

intervallumon, akkor az  $f$  függvény  $[a, b]$  intervallumon vett improprius integráljának jele és értelmezése:

$$(10) \quad \int_a^b f := \lim_{t \rightarrow a+0} \int_t^b f \quad \text{ill.} \quad \int_a^b f := \lim_{u \rightarrow b-0} \int_a^u f \quad \text{ill.} \quad \lim_{\substack{t \rightarrow a+0 \\ u \rightarrow b-0}} \int_t^u f,$$

amennyiben a feltüntetett jobb-, ill. baloldali határértékek léteznek (a legutóbbi esetben úgy, hogy  $t$  és  $u$  egymástól függetlenül tart jobbról  $a$ -hoz, illetve balról  $b$ -hez).

**D 13.8** Legyen értelmezve az  $f$  függvény az  $(a, u) \cup (u, b)$  halmazon. Ha  $f$  nem korlátos az  $u$  környezetében és esetleg az  $a$  vagy a  $b$  (vagy mindkettő) környezetében sem (vagy  $a = -\infty$  és/vagy  $b = \infty$ ), de az  $f$  függvénynek az  $[a, u]$  és  $[u, b]$  intervallumokon vett improprius integrálja létezik, akkor az  $f$  függvény  $[a, b]$  intervallumon vett improprius integrálja:

$$(11) \quad \int_a^b f(x) dx := \int_a^u f(x) dx + \int_u^b f(x) dx.$$

Ha a fenti definíciókban szereplő határértékek valamelyike létezik, akkor az illető improprius integrált **konvergensnek** nevezzük (ellenkező esetben **divergensnek**).

**P 13.9** Számítsuk ki az  $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$  improprius integrált (ha létezik). Az alsó határra a (10) alatti első képletet, a felső határra a (9) alatti első képletet alkalmazzuk. Akkor

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} &= \lim_{\substack{a \rightarrow 1+0 \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \lim_{\substack{a \rightarrow 1+0 \\ b \rightarrow \infty}} \left[ 2 \arctg \sqrt{x-1} \right]_a^b = \\ &= \lim_{\substack{a \rightarrow 1+0 \\ b \rightarrow \infty}} \left( 2 \arctg \sqrt{b-1} - 2 \arctg \sqrt{a-1} \right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 2 \cdot 0 = \pi. \end{aligned}$$

(Az  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$  határozatlan integrált legegyszerűbben az  $u = \sqrt{x-1}$  helyettesítéssel számíthatjuk ki.)

**Feladatok**

Állapítsuk meg, hogy az alábbi nem korlátos függvények improprius integráljai, illetve a végtelen intervallumokon vett improprius integrálok konvergensek-e, s ha igen, határozzuk meg az értéküket.

- |   |   |  |
|---|---|--|
| 13.* $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ ,               | 14.* $\int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt[5]{(x+2)^4}}$ ,             | 15.* $\int_0^2 \sqrt[3]{2x}^{-\frac{1}{3}} dx$ ,     |
| 16. $\int_{-1}^1 x^{-\frac{2}{3}} dx$ ,                 | 17. $\int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{3x^2 dx}{\sqrt{(x^3-1)^2}}$ , | 18. $\int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$ , |
| 19. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{x+2}$ ,                      | 20. $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$ ,       | 21. $\int_0^1 \ln^2 x dx$ ,                          |
| 22.* $\int_0^\infty e^{-x}$ ,                           | 23. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ ,         | 24. $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{3+4x^2}$ ,           |
| 25. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+1^2}}$ ,       | 26. $\int_{-\infty}^0 e^{2x} dx$ ,                            | 27. $\int_0^\infty xe^{-x} dx$ ,                     |
| 28. $\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x}$ ,                | 29. $\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln^2 x}$ ,                    | 30. $\int_0^\infty e^{-x} \cdot \cos x dx$ ,         |
| 31. $\int_1^\infty \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$ , | 32. $\int_0^\infty x^2 e^{-2x} dx$ .                          |  |

33.\* Keresünk olyan  $b \neq 0$  valós számot, amelyre  $\int_0^b \ln x dx = 0$ .

Számítsuk ki az alábbi határozott, vagy improprius integrálokat.

- |  |   |   |
|--|---|---|
| 34. $\int_0^2 (16x - x \cdot 4^x) dx$ ,                | 35. $\int_0^\pi \cos^2 2x$ ,                  | 36. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{2+3x^2}$ , |
| 37. $\int_0^\infty \frac{1}{1+x} dx$ ,                 | 38. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3}}$ ,    | 39. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ ,          |
| 40. $\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ , | 41. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ . | 42.* $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{ x-2  x-3 }}$ .  |
| 43. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$ .                   |   |   |

Bizonyítsuk be, hogy ha  $p > 0$  konstans, akkor

$$44.* \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & \text{ha } p > 1, \\ \infty, & \text{ha } p \leq 1. \end{cases} \quad 45.* \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & \text{ha } p < 1, \\ \infty, & \text{ha } p \geq 1. \end{cases}$$

## Terület

**D 13.10** Legyen  $f$  az  $(a, b)$  intervallumon előjelet nem váltó, korlátos, és legfeljebb véges számú hely kivételével folytonos valós függvény (az  $a = -\infty$  és  $b = \infty$  esetet is megengedve). A síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az  $y = f(x)$  egyenletű görbe, az  $(a, b)$  intervallum, valamint (véges  $a$  és  $b$  esetén) az  $x = a$  és az  $x = b$  egyenletű egyenes által határolt síkidomot az  $f$  függvény és az  $(a, b)$  intervallum által meghatározott görbevonalú trapéznek nevezzük, és ennek területén az

$$\int_a^b |f(x)| dx$$

határozott vagy improprius integrált értjük, feltéve, hogy ez az integrál létezik.

Ha az  $y_1$  és  $y_2$  is az  $[a, b]$  intervallumon értelmezett korlátos és legfeljebb véges számú hely kivételével folytonos valós függvény úgy, hogy minden  $x \in [a, b]$  esetén  $y_1 \geq y_2 \geq 0$ , akkor az  $y = y_1(x)$  és az  $y = y_2(x)$  egyenletű görbék, valamint az  $x = a$  és az  $x = b$  egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét az

$$\int_a^b (y_1(x) - y_2(x)) dx$$

integrállal számítjuk. Ezt a területet röviden a két görbe közötti területnek mondjuk.

Ha az  $f$  függvény az  $(a, b)$  intervallum egyes részintervallumain az  $f(x) \geq 0$  egyenlőtlenségnek, a többi részintervallumain pedig az  $f(x) \leq 0$  egyenlőtlenségnek tesz eleget, akkor részintervallumonként külön számítjuk ki a területet, és az ezekre kapott értékeket összeadjuk.

**P 13.11** Számítsuk ki az  $f(x) = x^2 - 2x$  függvény és a  $[-1, 3]$  intervallum által meghatározott görbevonalú trapéz területét. A függvény grafikonja a  $[-1, 0]$  és a  $(2, 3]$  intervallumon az  $x$  tengely felett, a  $(0, 2)$  intervallumon az  $x$  tengely alatt halad, ezért a keresett  $T$  terület:

$$T = \int_{-1}^0 (x^2 - 2x) dx - \int_0^2 (x^2 - 2x) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx = 4.$$

**T 13.12** Görbevonalú trapéz területe, ha a határoló görbe  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  ( $t_1 < t < t_2$ ) paraméteres egyenletrendszerrel van megadva, akkor az

$$\int_{t_1}^{t_2} |\dot{x}(t)y(t)| dt$$

integrállal számítható ki (feltéve, hogy az integrál létezik).

**P 13.13** Számítsuk ki az  $y_1(x) = e^x$  és  $y_2(x) = 8 - 3e^x$  egyenletű görbék közti területet 0-tól a görbék metszéspontjának abszcisszájáig terjedő intervallumon.

A metszéspont abcisszája az  $e^x = 8 - 3e^x$  egyenletből:  $x = \ln 2$ .

A görbék közti terület:

$$T = \int_0^{\ln 2} ((8 - 3e^x) - e^x) dx = [8x - 4e^x]_0^{\ln 2} = 4(2 \ln 2 - 1).$$

**D 13.14** Legyen  $r$  egy  $2\pi$ -nél nem hosszabb  $[\alpha, \beta]$  intervallumon értelmezett valós függvény. A síkbeli polárkoordináta-rendszerben az  $r = r(\varphi)$  egyenletű görbe, valamint a  $\varphi = \alpha$  és a

### 13. Határozott integrál — Terület

$\varphi = \beta$  egyenletű félegyenes által határolt síkidomot az  $r$  függvény és az  $[\alpha, \beta]$  intervallum által meghatározott szektornak nevezzük, és ennek területén az

$$(12) \quad \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$$

határozott integrált értjük, feltéve, hogy ez az integrál létezik.

**D 13.15** Ha két görbe van adva,  $r = r_1(\varphi)$  és  $r = r_2(\varphi)$  poláregyenletével és  $r_1(\varphi) \geq r_2(\varphi)$ , ha  $\varphi \in [\alpha, \beta]$ , akkor a két görbe közti területet az

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [r_1^2(\varphi) - r_2^2(\varphi)] d\varphi$$

képlettel számítjuk. Ha egy síkidom több, páronként közös belső pont nélküli szektorból áll, akkor a megfelelő részterületeket külön számítjuk ki, és összeadjuk.

**P 13.16** Számítsuk ki az  $r = \sqrt{2 \cos 2\varphi}$  egyenletű görbe (lemniskáta) által határolt síkidomból az  $r = 1$  egyenletű körön kívül eső rész területét.

A lemniskátát megkapjuk, ha  $\varphi$  befutja a  $H = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$  halmazba eső értékeket.

A kör és a lemniskáta metszéspontjaihoz tartozó  $\varphi$  értékeknek az  $1 = \sqrt{2 \cos 2\varphi}$  egyenletből származó  $\cos 2\varphi = \frac{1}{2}$  egyenletet kell kielégíteniük. Négy ilyen, a  $H$ -ba tartozó  $\varphi$  érték van.

$\varphi_1 = -\frac{\pi}{6}$ ,  $\varphi_2 = \frac{\pi}{6}$ ,  $\varphi_3 = \frac{5\pi}{6}$ ,  $\varphi_4 = \frac{7\pi}{6}$ . Tehát a (12) képlet és a 4. megjegyzés alapján a keresett  $T$  terület:

$$T = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (2 \cos 2\varphi - 1) d\varphi + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} (2 \cos 2\varphi - 1) d\varphi.$$

A szimmetria miatt  $T$ -t így is kiszámíthatjuk:

$$T = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2 \cos 2\varphi - 1) d\varphi = 2 \left( \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right).$$

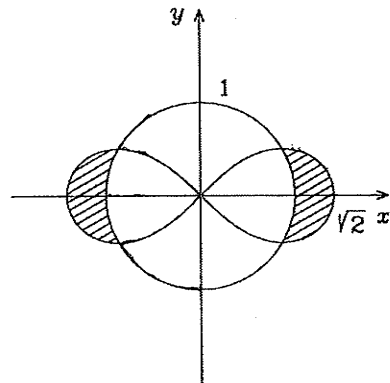
**T 13.17** A szektor területe, ha a határoló görbe az  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  ( $t_1 \leq t \leq t_2$ ) paraméteres egyenletrendszerrel van megadva, akkor az

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)y'(t) - x'(t)y(t)| dt$$

integrállal számítható ki (feltéve, hogy  $x$  és  $y$  léteznek).

**T 13.18** A szektor területe, ha a szektort határoló görbe egyenlete  $y = f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ), akkor az előbbi területképlet szerint

$$T = \frac{1}{2} \int_a^b |x f'(x) - f(x)| dx.$$



**Feladatok**

Számítsuk ki az alábbi függvények és intervallumok által meghatározott görbevel-nalú trapézok területét.

- 46<sup>p</sup>  $\frac{1}{2x+4}$ , [0, 3],  
 48<sup>o</sup>  $x^3 - 3$ , [1, 2],  
 50.  $x^3 - 3$ , [3, 4],  
 52.  $\frac{1}{1+x^2}$ , [0, 1],  
 54<sup>p</sup>  $1 - 3^{x-2}$ , [0, 4],  
 56.  $\sqrt{9-x}$ , [0, 8],  
 58.  $\frac{10}{\sqrt{x+4}}$ , [0, 5],  
 60<sup>o</sup>  $1 - (1 - (1-x)^{2/3})^{3/2}$ ,  $\left[1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3, 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right]$ ,  
 61<sup>p</sup>  $\lg \frac{4}{x}$ , [1, 6],  
 63.  $\operatorname{ch} 2x$ , [0, 3],  
 47.  $x^2 + x + 1$ , [2, 3],  
 49<sup>p</sup>  $\operatorname{sh}(x-1)$ , [0, 2],  
 51.  $x - \frac{x^3}{3} + \sqrt{x}$ , [0, 2],  
 53.  $\frac{5}{3x^2} + x$ , [1, 3],  
 55.  $\ln \frac{x}{2}$ , [1, e],  
 57.  $\sqrt{\frac{x^3}{2}}$ , [0, 2],  
 59.  $(1 - x^{1/3})^3$ , [0, 1],  
 62.  $\cos \frac{x}{2}$ , [0,  $\pi$ ],  
 64.  $5^x e^x - 1$ , [-1, 1].

Ábrázoljuk az alábbi egyenletű görbék által határolt korlátos síkidomokat, és szá-mítsuk ki a területüket:

- 65<sup>p</sup>  $y = 2x^2 - 1$ ,  $y = 0$ ,  
 67.  $y = x^2$ ,  $y = 1 - x^2$ ,  
 69<sup>p</sup>  $y = x^4$ ,  $y = 3x^2 - 2$ ,  
 71.  $y = x^2$ ,  $y = 2x$ ,  
 73.  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = \frac{x}{2}$ ,  
 75<sup>o</sup>  $y^2 = x + 3$ ,  $y = \frac{1}{2}x$ ,  
 77.  $x = y^2$ ,  $x = \frac{3}{4}y^2 + 1$ ,  
 79<sup>p</sup>  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ , ( $a > 0$  konstans),  
 80<sup>p</sup>  $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ ,  $y = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ , ( $b > 0$  konstans),  
 66.  $y = \frac{x^2}{2}$ ,  $y = x + \frac{1}{2}$ ,  $x = 0$ ,  
 68.  $y = \frac{4}{3x}$ ,  $y = \frac{13}{3} - x$ ,  
 70.  $y = \frac{8}{x^2 + 4}$ ,  $y = \frac{1}{4}x^2$ ,  
 72.  $y = x^2$ ,  $y = \frac{x^2}{2}$ ,  $y = x$ ,  
 74.  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ ,  $x + y = 1$ ,  
 76<sup>o</sup>  $y = x^2$ ,  $y = \frac{1}{4}x^2$ ,  $y = 4$ ,  
 78.  $y = x^3$ ,  $y = 2 - x$ ,  $y = 0$ ,

13. Határozott integrál — Terület

- 81<sup>▷</sup> Számítsuk ki az  $x^2 + (y+2)^2 = 16$  egyenletű kör és az  $x$ -tengely által határolt kisebbik körszelet területét,
- 82<sup>▷</sup> Számítsuk ki annak a síkidomnak a területét, amelyet az  $x^2 + y^2 \leq 4$  körlepből az  $x^2 + (y-2)^2 = 4$  körön kívül eső pontok elhagyásával kapunk,
83.  $x^{1/3} + y^{1/3} = 1, x + y = 1,$       84.  $y = \sin x, y = x, x = \frac{\pi}{2},$
85.  $y = \cos x, y = 4x^2 - \pi^2,$       86.  $y = e^x, y = e^{\sqrt{x}},$
87.  $y = xe^x, y = 0, x = 4,$       88.  $y = x \cdot 4^x, y = 16x,$
89.  $y = 2^x, y = 2^{-2x}, y = 4,$       90.  $y = 4^x, y = 4^{2-x}, y = 1,$
91.  $y = 3^x, y = 5^{1-x} + 2, x = 0,$       92<sup>▷</sup>  $y = 1 - 2^{x-3}, y = \ln \frac{x}{3}, x = 6,$
93.  $y = \ln \frac{x}{2}, x = 2e^2, y = 0,$       94.  $y = \ln \frac{x}{2}, y = \ln \frac{2}{x}, x = 4,$
95.  $y = \ln x, y = 2 \ln \frac{x}{3}, y = 0,$       96.  $y = \ln x, y = \ln^2 x,$
- 97<sup>▷</sup>  $y = \ln x, y = \ln \frac{8-x}{3}, y = 0,$       98<sup>▷</sup>  $y = \ln^2 \frac{x}{3}, y = \ln^2 3.$

Ábrázoljuk az alábbi paraméteresen megadott függvények és a kijelölt paraméter-intervallumok által meghatározott görbevonalú trapézokat, és számítsuk ki ezek területét ( $a$  és  $b$  pozitív konstansok).

99.  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), [0, 2\pi]$  (ciklois),
100.  $x = t^2, y = (1-t)^2, [0, 1],$
101.  $x = a \cos t, y = a \sin t, [0, 2\pi],$  (kör),
102.  $x = \frac{4}{3} \cos t - \frac{2}{3}, y = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin t, [0, 2\pi]$  (ellipszis),
103.  $x = a \cos^3 t, y = b \sin^3 t, [0, \frac{\pi}{2}]$  (asztrois),
104.  $x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t), [0, \pi/2]$  (kör evolvensse),
105.  $x = 1 - \cos^3 t, y = 1 - \sin^3 t, [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}],$
106.  $x = a(2 \cos t - \cos 2t), y = a(2 \sin t - \sin 2t), [0, \pi/3],$
107.  $x = t + \cos t, y = t \sin t, [0, \pi].$       108.  $x = at, y = a(1 - \cos t), [0, 2\pi].$

Számítsuk ki az alábbi, polárkoordinátáson megadott görbék és a feltüntetett intervallumok által meghatározott szektor területét (az  $a, b$  és  $\varphi_1$  pozitív konstans):

109.  $r = a, [0, 2\pi]$  (kör),
110.  $r = a\sqrt{\varphi}, [0, \varphi_1]$  (parabolikus spirális  $r^2 = a^2\varphi$ ),
111.  $r = \frac{a}{\varphi}, [1, \varphi_1], (\varphi_1 > 1)$  (hiperbolikus spirális),
112.  $r = a \cos 2\varphi, [0, \frac{\pi}{4}]$  (négyszirmú rózsza),
113.  $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}, [0, \frac{\pi}{4}]$  (lemniskáta),
114.  $r = a \cos \varphi + b, [0, \pi],$

13. Határozott integrál — Terület

$$115.^* r = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \cos \varphi}, [0, 2\pi] \text{ (ellipszis),}$$

$$116.^p r = \frac{1}{1 + \cos \varphi}, \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \text{ (parabola),}$$

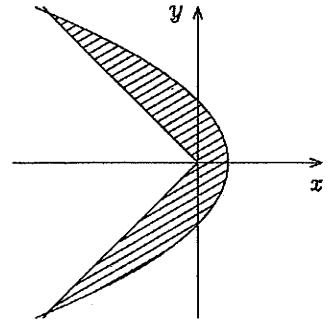
(lásd ábra.)

$$117. r = a\varphi, [0, 2] \text{ (archimedeszi spirális),}$$

$$118. r = ae^{b\varphi}, [0, \varphi_1] \text{ (logaritmikus spirális),}$$

$$119. r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}, [0, 2\pi] \text{ (ellipszis),}$$

$$120. r = 2a(1 + \cos \varphi), [0, \pi] \text{ (kardioid).}$$



Számítsuk ki az alábbi, paraméteres egyenletrendszerekkel megadott függvények és a feltüntetett intervallumok által meghatározott szektorok területét.

$$121. x = t^2, y = (1 - t)^2, [0, 1],$$

$$122. x = a \cos t, y = a \sin t, [0, 2\pi] \text{ (kör),}$$

$$123. x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), (a > 0), [0, 2\pi] \text{ (ciklois),}$$

$$124. x = \cos t, y = \sin 2t, \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$125. x = \cos 2t, y = \cos t, \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ (parabola),}$$

$$126.^p x = 1 - \cos^3 t, y = 1 - \sin^3 t, \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right],$$

$$127. x = \frac{4}{3} \cos t - \frac{2}{3}, y = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin t, [0, 2\pi] \text{ (ellipszis),}$$

$$128. x = \operatorname{ch} t, y = \operatorname{sh} t, [-t_1, t_1] \left(0 \leq t_1 < \frac{\pi}{4}\right) \text{ (hiperbola).}$$

Számítsuk ki a derékszögű koordináta-rendszerben  $y = f(x)$  alakú egyenlettel megadott görbék és a feltüntetett intervallumok által meghatározott szektorok területét.

$$129. y = x^2, [1, 2],$$

$$130. y = \frac{1}{x}, \left[\frac{1}{a}, a\right] (a > 1),$$

$$131. y = \frac{1}{\sqrt{x}}, \left[\frac{1}{a}, a\right] (a > 1),$$

$$132. y = \frac{1}{x^2}, \left[\frac{1}{a}, a\right] (a > 1),$$

$$133.^p y = (1 - x^{1/3})^3, [0, 1],$$

$$134. y = (1 - \sqrt{x})^2, \left[0, \frac{1}{4}\right],$$

$$135. y = \ln x, [1, e],$$

$$136. y = e^x, [1, \ln 4].$$

Ábrázoljuk az alábbi, polárkoordinátában megadott görbék által határolt síkidomokat, és számítsuk ki a területüket.

$$137.^p r = 2 \cos \varphi, r = \cos \varphi, \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4},$$

$$138.^p r = 4 \cos \varphi - \frac{1}{\cos \varphi}, \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4},$$

$$139.^p r = \operatorname{tg} 2\varphi, \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{8},$$

$$140.^p r = e^\varphi, r = \varphi, \varphi = 0, \varphi = \pi,$$



### 13. Határozott integrál — Ívhossz

141<sup>o</sup>  $r = e^\varphi$ ,  $r = e^{\varphi/2}$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi$ .

142<sup>o</sup> Számítsuk ki az  $r = 4$  egyenletű kör és az  $r = \frac{2}{\cos \varphi}$  egyenletű egyenes által határolt kisebbik (jobb oldali) körszelet területét. (Igazoljuk, hogy az előbbi egyenlet valóban egyenes egyenlete.)

143<sup>o</sup> Számítsuk ki az  $r = 4$  egyenletű kör, valamint az  $r = \frac{2}{\cos \varphi}$  és a  $\varphi^2 = (\pi/2)^2$  egyenletű egyenesek által határolt síkrész területét.

144<sup>o</sup> Számítsuk ki az  $r = 4 \sin \varphi$  egyenletű körből az  $r = 2$  egyenletű körön kívül eső rész területét.

### Ívhossz

**D 13.19** Legyen  $[t_n; n \in \mathbb{N}^+]$  a  $G$  görbe  $AB$  ívébe beírható töröttvonalak olyan sorozata, hogy az  $n$  növekedése közben a töröttvonalak oldalainak hosszúsága 0-hoz tart. Ha a  $t_n$ -ek hosszúsága minden ilyen sorozat esetén konvergál, akkor ugyanahhoz a számhoz konvergál, és ezt a számot az  $AB$  ív hosszúságának, az  $AB$  ívet pedig **rektifikálhatónak** nevezzük.

**T 13.20** Ha az  $f$  függvény az  $[a, b]$  intervallumon folytonosan differenciálható, akkor az  $y = f(x)$  egyenletű görbének az  $[a, b]$  intervallumhoz tartozó íve rektifikálható, és az ív hosszúsága:

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

**T 13.21** Ha egy sima görbe paraméteres egyenletrendszere  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $(t_1 \leq t \leq t_2)$ , akkor ívhosszúsága

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

**T 13.22** Síkbeli polárkoordináta-rendszerben  $r = r(\varphi)$ ,  $(\alpha \leq \beta)$  alakú egyenlettel megadott görbével hosszúsága

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + \dot{r}^2(\varphi)} d\varphi.$$

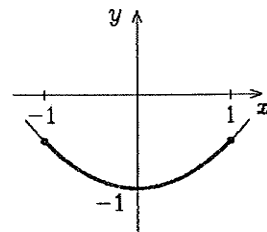
**Megjegyzés.** Ezek a képletek akkor is érvényesek, ha konvergens improprius integrált jelentenek.

### Feladatok

Számítsuk ki az alábbi egyenletű görbéknek a megadott intervallumhoz tartozó ívhosszát:

145<sup>o</sup>  $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ ,  $[-1, 1]$ ,

146.  $y = 1 - \frac{x^2}{4}$ ,  $[0, 2]$ ,



13. Határozott integrál — ívhossz

147.  $y = x^{3/2}$ ,  $[0, 4]$ ,                      148.  $y = \frac{x^2}{2p}$ ,  $[0, a]$ , ( $p > 0$  konstans),

149.  $9ay^2 = x(x - 3a)^2$ ,  $[0, a]$ , ( $a > 0$  konstans),

150.  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ,  $[0, a]$ , ( $a > 0$  konstans) (asztrois),

151.  $y = \ln x$ ,  $[\sqrt{3}, \sqrt{8}]$ ,                      152.  $y = \ln(1 - x^2)$ ,  $[0, 1/2]$ ,

153.  $y = \ln \cos x$ ,  $[0, \pi/6]$ ,                      154.  $y = \ln \frac{1}{\sin x}$ ,  $[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$ ,

155.  $y = \frac{1}{2} [x\sqrt{x^2 - 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})]$ ,  $[1, a + 1]$ ,

156.\*  $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ ,  $[0, \frac{5}{3}a]$ , ( $a > 0$  konstans) (cisszoid).

Számítsuk ki az alábbi, paraméteresen megadott görbék hosszát, (az  $a$ ,  $t_1$  és  $t_2$  pozitív konstansok).

157.  $x = t^2$ ,  $y = 2t$ ,  $[0, \sqrt{3}]$ ,                      158.  $x = \frac{1}{2}t^2$ ,  $y = \frac{4}{3}(1 + t)^{3/2}$ ,  $[0, 1]$ ,

159.  $x = t^2$ ,  $y = t^3$ ,  $[0, t_1]$ ,                      160.  $x = t \sin t$ ,  $y = t \cos t$ ,  $[0, t_1]$ ,

161.  $x = \cos t$ ,  $y = \frac{\sqrt{2}}{8} \sin 2t$ ,  $[0, 2\pi]$ ,

162.  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $[0, 2\pi]$  (ciklois),

163.  $x = a(\cos t + t \sin t)$ ,  $y = a(\sin t - t \cos t)$ ,  $[0, 2\pi]$  (kör evolvens),

164.\*  $x = a \cos^5 t$ ,  $y = a \sin^5 t$ ,  $[0, 2\pi]$ ,

165.†  $x = \cos 2t$ ,  $y = \sin t$ ,  $[0, \pi/2]$ ,                      166.  $x = e^t \sin t$ ,  $y = e^t \cos t$ ,  $[0, \pi/2]$ ,

167.  $x = a \left( \cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right)$ ,  $y = a \sin t$ ,  $[t_1, \frac{\pi}{2}]$  (traktrix),

168.  $x = 1 + \operatorname{arctg} t$ ,  $y = 1 - \ln \sqrt{1 + t^2}$ ,  $[0, 1]$ ,

169.  $x = \ln \cos 2t$ ,  $y = 2t$ ,  $[0, \pi/6]$ ,                      170.  $x = \operatorname{ch}^3 t$ ,  $y = \operatorname{sh}^3 t$ ,  $[0, t_1]$ ,

171.  $x = \frac{1}{2} \operatorname{sh} t$ ,  $y = 2\sqrt{2} \operatorname{sh} \frac{t}{2}$ ,  $[0, \ln a]$ ,                      172.  $x = \operatorname{arch} t$ ,  $y = \operatorname{arsh} t$ ,  $[t_1, t_2]$ ,

173.  $x = t - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$ ,  $y = 2 \operatorname{ch} t$ ,  $[0, t_1]$ .

Számítsuk ki az alábbi, polárkoordinátáson megadott görbék hosszát (az  $a$ ,  $p$  és  $\varphi_1$  pozitív konstans):

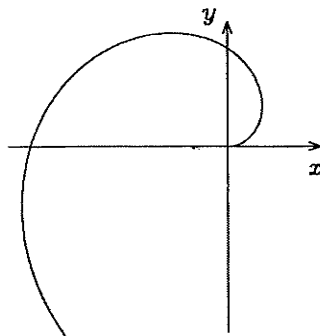
174.  $r = a$ ,  $0 \leq t < 2\pi$ ; (kör),

175.  $r = a\varphi$ ,  $\varphi \in [0, \varphi_1]$  (archimedeszi spirális),  
(1. ábra),

176.  $r = \frac{a}{\varphi}$ ,  $\varphi \in [1, \varphi_1]$  (hiperbolikus spirális),

177.  $r = \frac{2a}{\cos 2\varphi}$ ,  $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$  (egyenes),

178.  $r = \frac{4}{\sin \varphi}$ ,  $\varphi \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$  (egyenes),



13. Határozott integrál — Térfogat

179.  $r = 1 - \cos \varphi$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$  (kardioid),  
(l. ábra),

180.  $r = \frac{a}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}$ ,  $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  (parabola),

181.  $r = \frac{p}{1 + \cos \varphi}$ ,  $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  (parabola),

182.  $r = \frac{1}{1 - \cos \varphi}$ ,  $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$  (parabola),

183.  $r = 2a(1 + \cos \varphi)$ ,  $\varphi \in [0, \varphi_1]$  (kardioid),

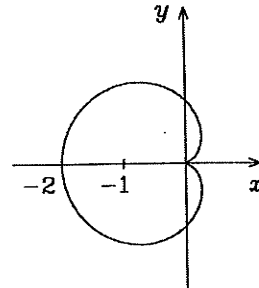
184.  $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ ,  $[0, 3\pi]$ ,

185.  $r = a \operatorname{th} \frac{\varphi}{2}$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,

186.  $r = a \frac{e^\varphi - 1}{e^\varphi + 1}$ ,  $\varphi \in [0, \varphi_1]$ ,

187.  $r = 1 - \varphi^2$ ,  $\varphi \in [-1, 1]$ .

188.  $r = e^{a\varphi}$ ,  $\varphi \in [0, \varphi_1]$  ( $\varphi_1$  konstans), (logaritmus spirális:  $\ln r = a\varphi$ ),



### Térfogat

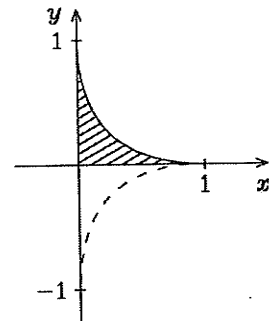
D 13.23 Legyen  $f$  az  $(a, b)$  intervallumon értelmezett valós értékű függvény (az  $a = -\infty$  és  $b = \infty$  esetet is megengedve). A  $f$  grafikonjának az  $x$  tengely körüli megforgatásával előálló forgásfelület, valamint (véges  $a$  és  $b$  esetén) az  $x = a$  és  $x = b$  egyenletű sík által határolt forgástest térfogatán a

$$\pi \int_a^b f^2(x) dx$$

határozott vagy impropius integrált értjük, feltéve, hogy ez az integrál létezik.

P 13.24 Számítsuk ki a  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$  egyenletű görbe  $x$  tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelület, és a görbe legkisebb abcisszájú pontjában az  $x$  tengelyre merőlegesen állított sík által határolt test térfogatát. Először megkeressük az integrálás határait. A  $\sqrt{x}$  értelmezési tartománya miatt  $0 \leq x$ . A  $\sqrt{x} = 1 - \sqrt{y}$  miatt  $\sqrt{x} \leq 1$ , tehát  $x \leq 1$ , lásd az ábrát. A  $V$  térfogat:

$$V = \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{x})^4 dx = \frac{\pi}{15}.$$



### Feladatok

Számítsuk ki az alábbi egyenletű görbék  $x$  tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelület, valamint a megadott intervallumok végpontjaiban az  $x$  tengelyre merőlegesen állított síkok által határolt forgástestek térfogatát.

189.  $y = x - \frac{1}{x}$ ,  $[1, 3]$ ,    190.  $y = \sqrt{1 + x^2}$ ,  $[0, 3]$ ,    191.  $y = \cos^2 x$ ,  $[0, \pi]$ ,

### 13. Határozott integrál — Felszín

192.  $y = \operatorname{ch} x$ ,  $[-1, 1]$ ,    193.  $y = e^{-x}$ ,  $[0, \infty)$ ,    194.  $y = \ln x$ ,  $[1, 3]$ ,  
195.  $y = xe^x$ ,  $(-\infty, 0]$ ,

196.  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $[-a, a]$ , (gömbtérfogat).

Számítsuk ki az alábbi egyenletű görbék  $x$  tengely körüli megforgatásával keletkező zárt forgásfelületek térfogatát.

197.  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ , (gömbtérfogat),    198.  $y = 1 - x^2$ ,

199.  $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ ,

200.  $y = b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$  (forgási ellipszoid).

### Felszín

**D 13.25** Legyen  $f$  az  $(a, b)$  intervallumon értelmezett valós értékű függvény (az  $a = -\infty$  és  $b = \infty$  esetet is megengedve). Az  $f$  grafikonjának az  $x$  tengely körüli megforgatásával előálló forgásfelület felszínén a

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

határozott vagy improprius integrált értjük, feltéve, hogy ez az integrál létezik.

**T 13.26** Ha egy sima görbe  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$  alakú paraméteres egyenletrendszerrel van megadva, akkor az  $x$  tengely körüli megforgatásával előálló forgásfelület felszíne

$$s = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

### Feladatok

Számítsuk ki az alábbi egyenletű görbeívek  $x$  tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelületek felszínét.

201.  $y = \sqrt{x}$ ,  $x \in [0, 1]$ ,    202.  $y = \sin x$ ,  $x \in [0, \pi]$ ,

203.  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $x \in [0, \pi/4]$ ,

204.  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ ,  $x \in [-a, a]$  (katenoid, láncfelület),

205.  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ,  $x \in [0, a]$ , ( $a > 0$  konstans).

Számítsuk ki az alábbi görbék  $x$  tengely körüli megforgatásával keletkező zárt forgásfelületek felszínét.

206.  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ , (gömbfelszín),

207.  $y = b\sqrt{1 - (x/a)^2}$ , ( $a > 0$  konstans) (ellipszoid),

208.  $y = \operatorname{ch} 2 - \operatorname{ch} x$ ,    209.  $y = 1 - x^2$ .

### 13. Határozott integrál — Tömegközéppont

Számítsuk ki az alábbi, paraméteresen adott görbék  $x$  tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelületek felszínét ( $a > 0$  konstans).

210.  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $t \in [0, \pi]$ , (gömbfelszín),

211.  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ ,  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,

212.  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , (ciklois),

213.  $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$ ,  $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$ ,  $t \in [0, \pi]$ ,

214.  $x = e^t \sin t$ ,  $y = e^t \cos t$ ,  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

### Tömegközéppont

**D 13.27** Az  $f$  függvény és az  $(a, b)$  intervallum által meghatározott görbevonálú trapéz  $P(x_s, y_s)$  tömegközéppontjának koordinátái az

$$x_s = \frac{M_y(a, b)}{T(a, b)}, \quad y_s = \frac{M_x(a, b)}{T(a, b)}$$

képletekkel számolt értékek, ahol

$$T(a, b) = \int_a^b f(x) dx \text{ (a görbevonálú trapéz területe),}$$

$$M_y(a, b) = \int_a^b x \cdot f(x) dx, \quad M_x(a, b) = \int_a^b f^2(x) dx \text{ (statikai nyomatékok).}$$

**T 13.28** Ha egy görbe sima és paraméteres alakban van megadva ( $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ ), akkor a görbéhez és az  $(x(t_1), x(t_2))$  intervallumhoz tartozó görbevonálú trapéz tömegközéppontjának koordinátáit is  $x_s = M_y/T$ ,  $y_s = M_x/T$  határozza meg, ahol

$$T = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \dot{x}(t) dt, \quad M_x = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \dot{x}(t) dt, \quad M_y = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) \dot{x}(t) dt.$$

**T 13.29** Síkbeli polárkoordináta-rendszerben  $r = r(\varphi)$ , ( $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ ) alakú egyenlettel megadott görbe és a polártengely közé eső görbevonálú trapéz tömegközéppontjának koordinátái:  $x_s = M_y/T$ ,  $y_s = M_x/T$ , ahol az  $x(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi$  és  $y(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi$  függvényekre vonatkozóan

$$T = \int_{\alpha}^{\beta} y(\varphi) x'(\varphi) d\varphi, \quad M_x = \int_{\alpha}^{\beta} x(\varphi) x'(\varphi) d\varphi, \quad M_y = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} y^2(\varphi) x'(\varphi) d\varphi.$$

### Feladatok

Ábrázoljuk az alábbi egyenletű görbék és egyenesek által határolt síkidomot, és határozzuk meg tömegközéppontjának koordinátáit.

215.  $y = x^3$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ , 216.  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$ ,

217.  $y = \frac{1}{x^2}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 3$ ,

218.  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ , ( $a > 0$  konstans),  $y = 0$ ,

### 13. Határozott integrál — Határozott integrál kiszámítása közelítő módszerekkel

$$219. y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad (a \text{ és } b \text{ pozitív konstansok}), \quad y = 0.$$

Határozzuk meg az alábbi, paraméteresen megadott görbék és az  $x$  tengely által határolt síkidomok tömegközéppontjának koordinátáit ( $a$  és  $b$  pozitív konstansok).

$$220. x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad (0 \leq t \leq \pi),$$

$$221. x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad (0 \leq t \leq \pi),$$

$$222. x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

$$223. x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Határozzuk meg az alábbi, polárkoordinátás egyenletű görbék által határolt szektorok tömegközéppontjának koordinátáit abban a derékszögű koordináta-rendszerben, amelynek origója a pólussal, pozitív  $x$  féltengelye pedig a polártengellyel esik egybe (az  $a$  pozitív konstans).

$$224. r = a, \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$225. r = a\varphi, \quad \varphi \in [0, \pi],$$

$$226. r = 2a(1 + \cos \varphi), \quad \varphi \in [0, \pi],$$

$$227. r = ae^\varphi, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

### Határozott integrál kiszámítása közelítő módszerekkel

**T 13.30** Legyen  $f$  az  $[a, b]$  intervallumon értelmezett és integrálható valós függvény. Osszuk fel az  $[a, b]$  intervallumot az  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  pontokkal  $n$  egyenlő részre. Legyen

$$h = \frac{b-a}{n} \quad \text{és} \quad t_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Minden egyes  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) részintervallumon az  $y = f(x)$  egyenletű görbének a  $P_{i-1}(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$  és  $P_i(x_i, f(x_i))$  pontját összekötő íve helyett az  $y = f(t_i)$  egyenletű szakaszt véve (téglalapmódszer)

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=1}^n f(x_i);$$

a pontos érték és a közelítő érték közötti  $D_n$  eltérésre

$$D_n \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \sup\{|f''|\}; \quad x \in [a, b],$$

ha  $f$  az  $[a, b]$  intervallumon kétszer folytonosan differenciálható.

Ha pedig az előbbi beosztás után minden egyes  $P_{i-1}P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ív helyett a  $P_{i-1}P_i$  húrt vesszük (trapéz módszer), akkor

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left[ \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

és

$$D_n \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup\{|f''|\}; \quad x \in [a, b],$$

13. Határozott integrál — Határozott integrál kiszámítása közelítő módszerekkel

ha  $f$  az  $[a, b]$  intervallumon kétszer folytonosan differenciálható.

A parabola vagy Simpson módszernél az intervallumot páros számú ( $2n$ ) részre osztjuk, és az  $y = f(x)$  grafikonjának az  $x_{2i-2}, x_{2i-1}, x_{2i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) abcisszájú pontjain átmenő görbeívét az ugyanezen a pontokon átmenő parabolaívvel (vagy, ha ezek a pontok kollineárisak, akkor összekötő szakaszukkal) helyettesítjük. Ekkor

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \left[ f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) \right]$$

és

$$D_{2n} \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \sup\{|f^{(4)}|\}; x \in [a, b],$$

ha az  $f$  az  $[a, b]$  intervallumon négyszer folytonosan differenciálható.

**Feladatok**

Számítsuk ki közelítőleg az alábbi integrálokat téglalap-, trapéz-, ill. parabola-módszerrel (az intervallumokat a zárójelben feltüntetett számú részre osztva). Amennyiben a függvény valamelyik integrálási határán nincs értelmezve, tekintsük függvényértéknek az ott felvett határértékét. Amely feladatokban trigonometrikus függvény fordul elő, ott a határok radiánban értendők, és ezért radiánban kell számolni.

228.<sup>k</sup>  $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4+x^3}}, (4),$

229.<sup>k</sup>  $\int_0^2 \sqrt{1+x^3} dx, (4),$

230.<sup>k</sup>  $\int_1^5 \sqrt{126-x^3} dx, (4),$

231.<sup>k</sup>  $\int_0^8 \frac{x}{\sqrt[3]{4+x^2}} dx, (6),$

232.<sup>k</sup>  $\int_0^{10} \sqrt[3]{125-x^2} dx, (6),$

233.<sup>k</sup>  $\int_0^1 \sqrt{1-x^3} dx, (10),$

234.<sup>k</sup>  $\int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx, (10),$

235.<sup>k</sup>  $\int_2^5 \frac{dx}{\ln x}, (6),$

236.<sup>k</sup>  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\cos x} dx, (10),$

237.<sup>k</sup>  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x} dx, (10),$

238.<sup>k</sup>  $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx, (10),$

239.<sup>k</sup>  $\int_0^9 \sqrt{x} dx, (4),$

240.<sup>k</sup>  $\int_0^\pi \sqrt{3+\cos x} dx, (6),$

241.<sup>k</sup>  $\int_0^1 \frac{x}{\ln(1+x)} dx, (6),$

242.<sup>k</sup>  $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx, (8),$

243.<sup>k</sup>  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x} dx, (6),$

244.<sup>k</sup>  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}, (12).$

## 1. Bevezetés (megoldások)

1. A szorzás elvégzésével adódik az állítás.
4.  $0 = (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$ .  
Ebből:  $3abc = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b + c) + 3ac(a + b + c) + 3bc(a + b + c) = a^3 + b^3 + c^3$ .
5. Ha  $x \geq 0$ , akkor  $x = x + 1$ , ami lehetetlen. Ha  $x < 0$ , akkor  $-x = x + 1$ , azaz  $x = -\frac{1}{2}$ .
6.  $x_1 = -1; x_2 = 3$ .
7.  $x = \frac{3k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .
8. Nincs megoldás.
9.  $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
10.  $|a| = a$  pontosan akkor, ha  $a \geq 0$ , ezért az  $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$  egyenlőtlenséget kell megoldani. A megoldások:  $x \geq 0, x < -1$ .
11. Az egyenlet átírható a bal oldal átalakításával a következőképpen:

$$|(x^2 + 4x + 9) + (2x - 3)| = |x^2 + 4x + 9| + |2x - 3|.$$

Tetszőleges  $a, b$  valós számokra  $|a + b| = |a| + |b|$  akkor és csak akkor, ha  $a$  és  $b$  egyenlő előjelűek. Mivel  $x^2 + 4x + 9 = (x + 2)^2 + 5 > 0$ , ezért szükségképpen  $2x - 3 \geq 0$ , azaz  $x \geq \frac{3}{2}$ .

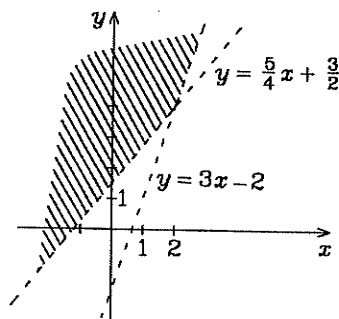
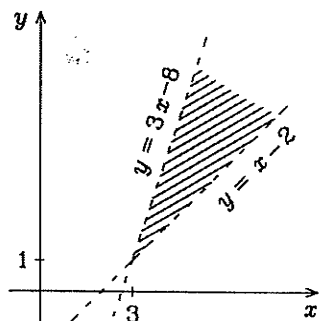
12.  $|a - b| = |a| - |b|$  pontosan akkor, ha  $|a| \geq |b|$  és  $b$  előjele megegyezik  $a$  előjével. Ezért:  $x^4 - 4 \geq x^2 + 2$ , amiből kapjuk, hogy:  $x^2 - 2 \geq 1$ , azaz  $|x| \geq \sqrt{3}$ .
13. Az egyenletnek csak pozitív  $x$ -ekre van értelme a valós számok körében. Az  $x = 1$  megoldása az egyenletnek. Ha  $x \neq 1$ , akkor az egyenletből  $2\sqrt{x} = x$ , amiből  $x = 4$  következik.
14.  $-\frac{5}{3} < x < \frac{7}{4}$ .
15.  $x < 3, x \geq 6$ .
16. Nincs megoldás.
17.  $x \neq -\frac{1}{2}$ .
18.  $|3x - 7| < 1$  pontosan akkor, ha  $-1 < 3x - 7 < 1$ , azaz ha  $2 < x < \frac{8}{3}$ .
19. Ha  $x \leq -6$ , akkor  $-x \leq -x - 6$ , ami lehetetlen. Ha  $-6 < x \leq 0$ , akkor  $-x \leq x + 6$ , azaz  $-3 \leq x$ . Ha  $0 < x$ , akkor  $x \leq x + 6$ , ami minden ilyen számra igaz. Tehát minden  $x \geq -3$  szám megoldása az egyenlőtlenségnek.
20.  $-6 \leq x \leq 6$ .
21.  $\frac{3}{5} < x < 1$ .
22.  $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ .
23.  $-1 < x < 0$ .
24.  $\frac{x^2 + 2x + 21}{(x - 4)(x + 1)} < 0; x^2 + 2x + 21 > 0$ , ezért  $(x - 4)(x + 1) < 0$ , ahonnan  $-1 < x < 4$ .
25.  $x^2 + 2x - 3 > 0$ , ha  $x < -3$  vagy  $x > 1$ . Ekkor a feladatbeli egyenlőtlenség ekvivalens az  $x^2 + 3x - 10 \leq 0$  egyenlőtlenséggel. Mivel az  $x^2 + 3x - 10$  kifejezés zérushelyei  $-5$  és  $2$ , ezért ez akkor igaz, ha  $-5 \leq x \leq 2$ . Ebben az esetben



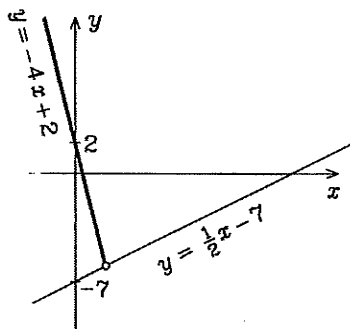


1. Bevezetés

38. Az első síknegyedben az  $y = x - 1$ , a második síknegyedben az  $y = -x - 1$ , a harmadik síknegyedben az  $y = x + 1$ , a negyedik síknegyedben az  $y = -x + 1$  egyenletű egyenes.
39. Nem lehet  $x$  és  $y$  különböző előjelű, így a halmazba a sík első és harmadik negyedének pontjai és a koordináta-tengelyek pontjai tartoznak.
40. Az  $x$ -tengely és az  $y = x$  egyenletű egyenes közötti  $45^\circ$ -os szögtartomány pontjai a határoló egyenesekkel.
41. Az egyenlőtlenségeket  $y$ -ra megoldva:  $y > x - 2$ ,  $y < 3x - 8$ , azaz  $x - 2 < y < 3x - 8$ . A bevonalmazott szögtartomány belső pontjainak koordinátái a egyenlőtlenségrendszer megoldásai. (bal oldali ábra)



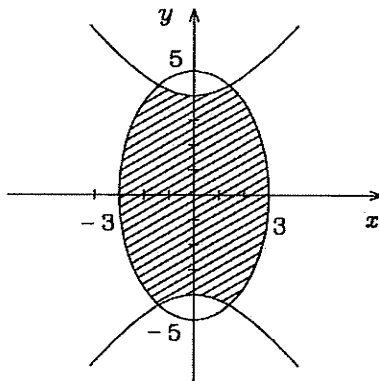
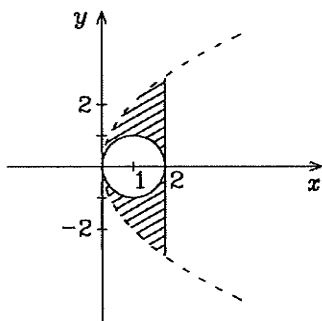
42.  $y > 3x - 2$ ,  $y > \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$ . Mivel  $3x - 2 \geq \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$ , ha  $x \geq 2$  és  $3x - 2 < \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$ , ha  $x < 2$ , ezért az egyenlőtlenségrendszer megoldása:  $y > 3x - 2$ , ha  $x \geq 2$ ;  $y > \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$ , ha  $x < 2$ . (jobb oldali ábra)
43.  $y > x + \frac{10}{3}$ .
44. Az  $y = -4x + 2$  egyenletű egyenesnek az  $\frac{x}{2} - 7 < y$  félsíkba eső része.



45.  $\frac{x+7}{5} < y < \frac{x+4}{2}$ , ha  $-2 < x \leq 3$  és  $x - 1 < y < \frac{x+4}{2}$ , ha  $3 \leq x < 6$ , azaz az  $y = \frac{x+7}{5}$ , az  $y = \frac{x+4}{2}$  és az  $y = x - 1$  egyenletű egyenesek által meghatározott háromszög belső pontjai adják a megoldáshalmazt.
46.  $y = \frac{3}{7}x + \frac{13}{7}$ , ahol  $-2 < x < 5$ .

## 1. Bevezetés

47. Az  $y^2 - 4x < 0$  egyenlőtlenséget az  $y^2 = 4x$  egyenletű parabola belső pontjainak koordinátái elégítik ki, az  $x^2 + y^2 - 2x \leq 0$  egyenlőtlenséget pedig az  $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$  körlap pontjainak koordinátái. Az egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazát a bal oldali ábra bevonalmazott része mutatja (a szaggatott vonal pontjai nem tartoznak a halmazhoz).



48. Az első egyenlőtlenséget kielégítő pontok halmaza az  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$  ellipszis belső és határpontjainak halmaza. A második egyenlőtlenséget pedig az  $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$  hiperbola határ- és külső pontjainak koordinátái elégítik ki. Az egyenlőtlenségrendszer megoldása a fenti jobb oldali ábrán látható.
49. 1.megoldás: Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy  $x \geq y \geq 0$  vagy  $x > 0 > y$  vagy  $0 \geq x \geq y$ . Ha  $x \geq y \geq 0$ , akkor  $|x| + |y| = x + y = |x + y|$ . Ha  $x > 0 > y$ , akkor  $|x| + |y| = x - y > -y = |y| > |x + y|$ . Ha  $0 \geq x \geq y$ , akkor  $|x| + |y| = -x - y = -(x + y) = |x + y|$ . Az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha  $x$  és  $y$  előjele megegyezik.
- 2.megoldás: Felhasználjuk, hogy nem negatív  $a$  és  $b$  számokra  $a \leq b$  akkor és csak akkor teljesül, ha  $a^2 \leq b^2$ . Emeljük négyzetre az egyenlőtlenség mindkét oldalát. Azonos átalakítások után az  $xy \leq |x||y|$  egyenlőtlenséget kapjuk, amely nyilvánvalóan igaz. Ebből az is leolvasható, hogy az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha  $x$  és  $y$  előjele megegyezik.
50. Ha  $ab \geq 0$ , akkor  $a^2 + b^2 - 2|ab| = (a - b)^2 \geq 0$ . Ha  $ab < 0$ , akkor  $a^2 + b^2 - 2|ab| = (a + b)^2 \geq 0$ . Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha  $|a| = |b|$ .
51. Az  $|x + y| \leq |x| + |y|$  felhasználásával kapjuk, hogy  $|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$  és  $|b| = |(b - a) + a| \leq |b - a| + |a| = |a - b| + |a|$ , amelyekből:  $|a - b| \geq |a| - |b|$  és  $|a - b| \geq |b| - |a|$ , azaz  $|a - b| \geq ||a| - |b||$ .
52. Felhasználva az előző feladatot is:

$$\frac{1}{|a - b|} \leq \frac{1}{||a| - |b||} = \frac{1}{|a| - |b|} < \frac{1}{|a| - \frac{|a|}{2}} = \frac{2}{|a|}.$$

53.  $a + \frac{1}{a} \geq 2$  pontosan akkor, ha  $a^2 + 1 \geq 2a$ , azaz ha  $(a - 1)^2 \geq 0$ . Az utolsó egyenlőtlenségből látható, hogy az egyenlőség csak az  $a = 1$  esetben teljesül.

## 1. Bevezetés

54. Az előző feladat és az  $\frac{x^2+1+1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$  átalakítás alapján adódik az állítás. Az egyenlőség csak az  $x = 0$  esetben érvényes.
55. Az 53. feladat alapján. Az egyenlőség csak az  $x = \pm 1$  esetekben teljesül.
56. A  $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$  és a  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$  egyenlőtlenségeket külön-külön vizsgálva, mindkét oldal négyzetreemelésével adódik az állítás. Az egyenlőségek pontosan akkor teljesülnek, ha  $a = b$ .
57. Ha  $a = 0$  vagy  $b = 0$ , akkor nyilvánvalóan igaz az állítás. Legyen  $a > 0$  és  $b > 0$ . Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy  $a \geq b$ . Ez azt jelenti, hogy  $0 < \frac{a}{b} \leq 1$ . Mivel  $\alpha > \beta$ , ezért  $0 < \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha < \left(\frac{a}{b}\right)^\beta$ . Mivel  $0 < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$ , ezért:  $\left(\frac{a^\alpha+b^\alpha}{b^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\frac{a^\beta+b^\beta}{b^\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ , amiből  $b > 0$  miatt adódik az állítás. Az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha  $a = 0$  vagy  $b = 0$ .
58. A halmaz zárt a műveletre nézve. A művelet asszociatív, de nem kommutatív.
59. A halmaz zárt a műveletre nézve. A művelet asszociatív és kommutatív.
60. A halmaz nem zárt a műveletre nézve.
61. A halmaz zárt a műveletre nézve. A művelet az egész számok halmazán kommutatív és asszociatív, ezért bármely részhalmazán is, így a páros számok halmazán is az.
62. A halmaz zárt a műveletre nézve. A művelet kommutatív és asszociatív.
63. A halmaz zárt a műveletre nézve.  $x \circ y = x + 2y$ ,  $y \circ x = y + 2x$ ,  $(x \circ y) \circ z = (x + 2y) \circ z = x + 2y + 2z$  és  $x \circ (y \circ z) = x \circ (y + 2z) = x + 2(y + 2z) = x + 2y + 4z$  ( $x, y, z \in \mathbf{R}$ ), ezért a művelet nem kommutatív és nem asszociatív.
64. A halmaz zárt a műveletre nézve. Ha  $c \neq 0$ , akkor az  $a = b = 1$  esetben, ha pedig  $c = 0$ , akkor az  $a, b \in \{0, 1\}$  esetekben a művelet kommutatív és asszociatív, minden más esetben nem kommutatív és nem asszociatív.
65. A halmaz zárt a műveletekre nézve. Mindkét művelet asszociatív, kommutatív és a szorzás az összeadásra nézve disztributív. Az összeadás a szorzásra nézve nem disztributív.
66. A halmaz zárt az összeadásra, de nem zárt a szorzásra nézve. Az összeadás kommutatív és asszociatív.
67. A halmaz zárt a műveletekre nézve. Mindkét művelet asszociatív, kommutatív és a  $\circ$  művelet a  $\star$  műveletre nézve disztributív. A  $\star$  művelet a  $\circ$  műveletre nézve nem disztributív.
68.  $\sum_{k=0}^5 (2k+1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$ .
69.  $(-3)^3 + (-2)^3 + (-1)^3 + 0^3 + 1^3 = -35$ .
70.  $-6$ .
71.  $0$ .
72.  $14\pi$ .
73.  $\sin \frac{\pi}{2} + 2 \sin \pi + 3 \sin \frac{3\pi}{2} + 4 \sin 2\pi = -2$ .
74.  $\sum_{k=0}^4 2^k$ .
75.  $\sum_{k=1}^5 (-1)^k \frac{1}{k}$ .
76.  $\sum_{k=4}^n (k^2 - 1)$ .
77.  $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ .
78.  $\sum_{k=0}^n a_k x^{n-k}$ .
79.  $\sum_{k=0}^5 (-1)^k a^{5-k} b^k$ .

80. Az összeadás kommutativitása és asszociativitása miatt igaz.

81. Igaz.

82. Nem igaz.

83. Igaz.

84.  $4 \left( \left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 - \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \right)$ .

85. Tekintjük az előző feladatbeli másodfokú függvényt. Egy másodfokú függvény akkor és csak akkor nagyobb vagy egyenlő 0-nál minden  $x$ -re, ha a megfelelő másodfokú egyenlet diszkriminánsa nem pozitív, amiből már adódik az egyenlőtlenség. Ebből az is látható, hogy  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 > 0$  esetben egyenlőség pontosan akkor van, ha létezik olyan  $x_0 \in \mathbb{R}$ , hogy minden  $k$ -ra  $a_k x_0 + b_k = 0$ . Az egyenlőség akkor is igaz, ha  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ .

86. A Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenségből következik.

87. Alkalmazzuk a Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenséget.

88.  $-3$ .

89.  $(n - m + 1)c$ .

90.  $1 - \frac{1}{51} = \frac{50}{51}$ .

91.  $-\frac{399}{400}$ .

92.  $a_1 - a_{n+1}$ .

93.  $1 - \frac{1}{n+1}$ .

94. Felhasználva a  $\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}$  azonosságot, ha  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin kx$ , akkor  $S_n(x) \cdot 2 \sin \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^n \left( \cos(k - \frac{1}{2})x - \cos(k + \frac{1}{2})x \right) = \cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x = 2 \sin \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{x}{2}$ , Ebből, ha  $\sin \frac{x}{2} \neq 0$ , akkor  $S_n(x) = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$ . Ha  $\sin \frac{x}{2} = 0$ , akkor  $S_n(x) = 0$ .

95.  $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} = \sum_{k=1}^n a_{kk} = n$ .

96.  $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} = \sum_{k=1}^n nk = \frac{n^2(n+1)}{2}$ .

97.  $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \sum_{k=1}^n \left( nk - \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n^2(n+1)}{2} = 0$ .

98.  $9 \cdot 10 + \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 1 = 209$ .

99.  $(n - 1)n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ .

100.  $\frac{n}{(2n + 2)(2n + 3)}$ .

101.  $\frac{(n + k + 1)(n + k + 2) \dots (2n + 1)}{(n - k + 1)(n - k + 2) \dots n}$ .

102. Ha  $k|m$  és  $k|(m + n)$ , akkor van olyan  $r, t \in \mathbb{Z}$ , hogy  $m = rk$  és  $m + n = tk$ , ezért  $n = (t - r)k$ . Mivel  $t - r \in \mathbb{Z}$ , így  $k|n$ . Hasonlóan látható be az állítás megfordítása is.

103.  $n = 1$  esetben igaz az állítás. Tegyük fel, hogy az  $n$  pozitív egész számra igaz az állítás, azaz  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ . Ebből bizonyítjuk, hogy  $(n + 1)$ -re is igaz, azaz  $1 + n + \dots + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ :

$$1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

Ez azt jelenti, hogy minden  $n$  pozitív egész számra igaz az állítás, azaz  $n_0 = 1$ .

104. Az állítás az  $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$  azonosság alapján igazolható,  $n_0 = 1$ .

107.  $n = 1$ -re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy valamely  $n$ -re igaz az állítás. Ekkor  $(n + 1)$ -re:

$$\begin{aligned} & 1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1}n^2 + (-1)^n(n + 1)^2 \\ &= (-1)^{n-1} \frac{n(n + 1)}{2} + (-1)^n(n + 1)^2 = -(-1)^n \frac{n(n + 1)}{2} \end{aligned}$$

## 1. Bevezetés

$$= (-1)^n \frac{2(n+1)^2 - n(n+1)}{2} = (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

115.  $n = 1$  esetben a két oldal egyenlő,  $n = 2$  esetben érvényes az egyenlőtlenség:  $\frac{3}{8} < \frac{1}{\sqrt{7}}$  pontosan akkor, ha  $3\sqrt{7} < 8$ , azaz ha  $63 < 64$ , ami igaz. Tegyük fel, hogy  $n$ -re érvényes az egyenlőtlenség. Ekkor beszorozva az egyenlőtlenség mindkét oldalát  $\frac{2n-1}{2n+2}$ -vel, kapjuk hogy

$$\frac{13}{24} \cdots \frac{2n-1}{2n} \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \frac{2n+1}{2n+2}.$$

Az  $\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$  egyenlőtlenség mindkét oldal négyzetreemelésével igazolható, ez pedig bizonyítja az állítás helyességét  $(n+1)$ -re.

116.  $n = 2$ -re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy valamely  $n$ -re igaz. Ekkor:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = \\ & \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} > \\ & \frac{13}{24} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{13}{24} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > \frac{13}{24}. \end{aligned}$$

117.  $n = 2$ -re igaz az állítás:  $\sqrt{2} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$ , mivel  $2 < \sqrt{2} + 1 < 4$ . Tegyük fel, hogy  $n$ -re igaz az állítás. Ekkor:  $\sqrt{n+1} < \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$ .

118.  $n = 2$ -re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy  $n$ -re is igaz. Akkor  $(n+1)$ -re:

$$\begin{aligned} & \frac{n+1}{2} < \frac{n}{2} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}-1} < \\ & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n-1} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}-1} < \\ & n + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^n+2^n-1} < \\ & n + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n} = n + 2^n \frac{1}{2^n} = n + 1. \end{aligned}$$

119.  $n_0 = 4$ . A  $3^n > 2^n + 7n$  indukciós feltevés alapján:  $3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3(2^n + 7n)$ . Ebből a  $3 \cdot 2^n + 3 \cdot 7n = (2+1)2^n + (2+1)7n = 2^{n+1} + 7n + 2^n + 2 \cdot 7n > 2^{n+1} + 7n + 7 = 2^{n+1} + 7(n+1)$  alapján adódik az állítás.

120. Teljes indukcióval, felhasználva, hogy

$$\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2n)! 2(2n+1)}{(n!)^2 (n+1)} < 4^{n-1} 4 = 4^n,$$

azt kapjuk, hogy  $n > 1$  esetén az állítás igaz.

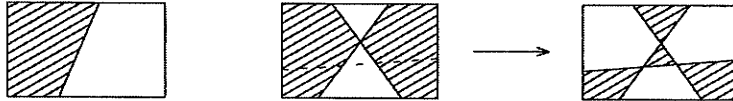
1. Bevezetés

121.  $n = 1$ -re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy az állítás igaz  $n$ -re. Akkor ebből  $(n + 1)$ -re:

$$\begin{aligned} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}} &= \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \sqrt{2 + 2 \cos 2 \frac{\pi}{2^{n+2}}} = \\ &= \sqrt{2 + 2(2 \cos^2 \frac{\pi}{2^{n+2}} - 1)} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+2}}. \end{aligned}$$

122.  $\frac{10^{n+2} - 9(n+1) - 10}{27} = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27} + \frac{10^{n+1} - 1}{3}$  segítségével teljes indukcióval bizonyítható az állítás, felhasználva, hogy  $\frac{10^{n+1} - 1}{3} = 33 \dots 3$ , ahol a jobb oldalon  $n + 1$  darab 3-as szerepel. (Ez szintén bizonyítható teljes indukcióval.)

123. Az egyenesek számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítottunk.  $n = 1$  esetben az állítás nyilvánvalóan igaz. Tekintsünk egy  $n + 1$  egyenessel származtatott térképet. Hagyjuk el az egyik egyenest. A maradék  $n$  egyenessel származtatott térkép az indukciós feltevés szerint színezhető két színnel. Húzzuk vissza az  $(n + 1)$ -edik egyenest, majd ennek egyik oldalán változtassuk meg minden rész színét a másikra. Így nyilván jó színezést kapunk.



124. Tekintsük az egyenes utakat tartalmazó térképet, és az utakkal felszabdalt tartományt színezzük két színnel, például fehérrel és feketével, az előző feladat szerint. Ezek után minden útkereszteződést úgy építsünk meg, hogy ha az úton haladva jobb kézre fehér tartomány esik, akkor az útkereszteződésbe érve ez az út essen felülre (lásd a feladat mellett közölt ábrát). Könnyen látható, hogy akkor minden útkereszteződésben egyértelműen definiálva van az, hogy melyik út megy felül és melyik alul, valamint az, hogy minden úton felváltva vannak alul- ill. felüljárók.

125. Az egyenlőtlenség teljes indukcióval egyszerűen megmutatható.  $n = 1$ -re nyilvánvalóan igaz az állítás. Tegyük fel, hogy ha  $1 \leq k \leq n$ , akkor  $|a_1 + a_2 + \cdots + a_k| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k|$ ; ezért  $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}| \leq |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| + |a_{n+1}| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + |a_{n+1}|$ . Az egyenlőséget  $n = 2$  esetben a 49. feladatban már megvizsgáltuk. A bizonyítás szintén teljes indukcióval fejezhető be. Tegyük fel, hogy minden  $2 \leq k \leq n$  esetben  $|a_1 + a_2 + \cdots + a_k| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k|$  akkor és csak akkor, ha  $a_1, a_2, \dots, a_k$  egyenlő előjelűek. Ebből következik, hogy  $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}| = |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| + |a_{n+1}|$  akkor és csak akkor, ha  $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$  és  $a_{n+1}$  egyenlő előjelűek, továbbá  $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| + |a_{n+1}| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + |a_{n+1}|$ , akkor és csak akkor, ha  $a_1, a_2, \dots, a_n$  egyenlő előjelűek. Ebben az esetben viszont előjelük egyenlő  $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$  előjével, azaz  $a_{n+1}$  előjével.

## 1. Bevezetés

126. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. Az  $n = 2$  esetre a 49. feladat szerint igaz az állítás. Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely  $n$ -re, és legyen  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \in \mathbb{R}^+$  valós számokra  $x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1} = 1$ . Ha  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x_{n+1} (= 1)$ , akkor az állítás nyilvánvaló. Ha  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$  között található különböző számok, akkor van közöttük 1-nél kisebb és 1-nél nagyobb. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy  $x_1 < 1$  és  $x_{n+1} > 1$ . Így az indukciós feltevést is felhasználva:  $x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} = (x_1 x_{n+1} + x_2 + \dots + x_n) + x_{n+1} - x_1 x_{n+1} + x_1 \geq n + x_{n+1} - x_1 x_{n+1} + x_1 = n + 1 + x_{n+1} - x_1 x_{n+1} + x_1 - 1 = n + 1 + (x_{n+1} - 1)(1 - x_1) > n + 1$ .
127. Az előző feladat alapján adódik az állítás.
128. Legyen  $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = a$ , akkor  $1 = \frac{x_1}{a} \frac{x_2}{a} \dots \frac{x_n}{a}$ . A 126. feladat szerint  $\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{a} + \dots + \frac{x_n}{a} \geq n$ , amiből már megkapjuk az állítást.
129. Az előző feladat alapján.
130. Az 1.128 feladat alapján.
131.  $n = 1$ -re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy valamely  $n$ -re  $8 \mid 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ . Ekkor  $(n+1)$ -re:  $5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1 = 5 \cdot 5^n + 6 \cdot 3^{n-1} + 1 = 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1 + 4(5^n + 3^{n-1})$ . Mivel  $5^n + 3^{n-1}$  páros szám, ezért  $8 \mid 4(5^n + 3^{n-1})$ . Az indukciós feltevést is felhasználva adódik az állítás.
132. Használjuk az  $(n+1)(2(n+1))^2 - 3(n+1) + 1 = (n+1)(2n^2 + n) = n(2n^2 - 3n + 1) + 6n^2$  átalakítást.
133.  $11^{n+2} + 12^{2(n+1)-1} = 11 \cdot 11^{n+1} + 144 \cdot 12^{2n-1} = 11(11^{n+1} + 12^{2n-1}) + 133 \cdot 12^{2n-1}$
134.  $n = 2$  esetben az állítás nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy minden  $2 \leq k \leq n$  esetén igaz az állítás. Ha  $n+1$  prímszám, akkor  $(n+1)$ -re is igaz az állítás. Ha  $n+1$  összetett szám, akkor van olyan  $p \leq n$  prímszám, hogy  $pj = n+1$  ( $j \in \mathbb{N}^+, j > 1$ ). Az indukciós feltevést alkalmazzuk a bizonyítás befejezéséhez.
135. Nem ellenőriztük, hogy van-e olyan  $n_0$  érték, amelyre az állítás igaz.
136. A tulajdonság öröklődésének bizonyítása korrekt minden  $n > 2$  egészre, de éppen  $n = 2$  esetén, azaz 2-ről 3-ra nem igaz. Elhagyva ugyanis bármely 2 pont valamelyikét, és a maradék ponthoz hozzávéve egy további pontot, ez a 2 pont is meghatároz egy egyenest, vagyis ez esetben nem jutunk ellentmondásra.



## 2. Halmazelmélet (megoldások)

1. A pozitív háromjegyű páros számok halmaza.
2. Az olyan, 3-mal osztható egész számok halmaza, amelyek  $(-100)$ -nál nagyobbak és  $100$ -nál kisebbek.
3. Az olyan pozitív egész számok halmaza, amelyeknek 3-mal való osztási maradéka 1.
4.  $\{-1\}$ .
5.  $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ .
6. Az üres halmaz, mert az  $x^2 - 2 = 0$  egyenletnek nincs gyöke az egész számok halmazában. (D 2.1)
7. Az üres halmaz, mert az  $x^2 + 1 = 0$  egyenletnek nincs gyöke a valós számok halmazában. (D 2.1)
8. Az  $x$  bármilyen valós szám lehet.
9. A pozitív valós számok halmaza. 10.  $\emptyset$  (D 2.1).
11. Az  $O(0, 0)$  középpontú,  $r = 1$  sugarú körvonal.
12. Az  $O(0, 0)$  középpontú,  $r = 1$  sugarú körlap a határoló körvonallal együtt.
13. Az egész  $xy$  koordinátásík.
14. Az  $O(0, 0)$ ,  $A(1, 1)$  és  $B(-1, 1)$  pontok által meghatározott háromszög (lap), melyből elhagyjuk az  $OA$  és  $OB$  szakaszok pontjait.
15. Az  $O(1, 2)$  középpontú,  $r = 3$  sugarú körvonal.
16. Az  $O(0, 0)$  középpontú,  $r = 2$  sugarú körvonalnak az a része, amely az  $x$  tengely fölött és az  $x$  tengelyen van.
17. Mivel a  $3x + 4y = 22$  egyenletű egyenes az  $x = 6$  (illetve az  $y = 4$ ) egyenletű egyenest az  $y = 1$  ordinátájú (illetve az  $x = 2$  abszcisszájú) pontban metszi, ezért a megadott halmaz annak az ötszögnek a belső és határoló pontjaiból áll, melynek csúcsai:  $(0, 0)$ ,  $(6, 0)$ ,  $(6, 1)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(0, 4)$ .
18. Annak a trapéznek belső és határoló pontjai, melynek csúcsai:  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(0, 2)$ .
19. Az  $x$  tengely  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2^2}$ ,  $\frac{1}{2^3}$ ,  $\dots$  abszcisszájú pontjai.
20. Belátható, hogy  $y_n = x_n^2$ . Ebből következik, hogy ez a halmaz az  $y = x^2$  parabola következő pontjaiból áll:  $P_1(1, 1)$ ,  $P_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2})$ ,  $\dots$ ,  $P_n(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$ ,  $\dots$ .
21. Az  $x = t^2$  és  $y = 3t^2$  feltételek miatt  $x$  és  $y$  nem lehet negatív. Helyettesítés után kapjuk, hogy  $y = 3x$ . Ezért a megadott halmaz az  $y = 3x$  egyenletű egyenesnek az a része, mely az első síknegyedben halad.
22. Az  $y = 3x$  egyenletű egyenesnek az a szakasza (a végpontokkal együtt), melynek végpontjai:  $A(-1, -3)$ ,  $B(8, 24)$ .
23. Az  $O(0, 0)$  középpontú,  $r = 1$  sugarú körvonal.

## 2. Halmazelmélet

24. a)  $M \cap F$ . b)  $A \cap N$ . c)  $A \cup N$ . d)  $(A \cup N) \cap F$ .  
 e) E mondat — a szövegkörnyezettől függően — kétféleképpen is értelmezhető: egyik értelme azonos a c)-belivel, a másik szerint azokról van szó, akik „vagy angolul, vagy németül tudnak, de nem mind a két nyelven”, ekkor a halmaz:  $A \ominus N$ .  
 f)  $M - F$ , vagy  $M \cap \overline{F}_H$ , ahol  $H$  az első évfolyamosok halmaza, vagy egyszerűen csak  $M \cap \overline{F}$  (l. T 2.8).  
 g) Az f) feladathoz hasonlóan:  $N - F = N \cap \overline{F}$ .  
 h) Ide azok tartoznak, akik „nem tudnak németül és második tankörösök és nem fiúk”, azaz a halmaz  $\overline{N} \cap M \cap \overline{F}$  (l. T 2.6 asszociativitás). Másik megoldás f) és g) alapján: a második tankörös lányok közül elhagyjuk a németül tudó lányokat, így az  $(M - F) - (N - F)$  halmazt kapjuk. (T 2.8 segítségével bizonyítható, hogy e két halmaz azonos.)
25. a)  $M \subset N$  akkor és csak akkor teljesül, ha  $n$  osztója  $m$ -nek, de  $n \neq m$ .  
 b)  $M \subseteq N$  akkor és csak akkor, ha  $n$  osztója  $m$ -nek.  
 c)  $M \cap N = \{t, 2t, 3t, \dots\}$ , ahol  $t$  az  $m$  és  $n$  legkisebb közös többszöröse. Ennek bizonyításához használjuk fel az  $m$ , az  $n$  és a legkisebb közös többszörösük törzstényezői alakját. A két halmaz uniója az olyan pozitív egész számok halmaza, amelyek  $m$ -mel, vagy  $n$ -nel oszthatók.
26. A D 2.4 szerint a jobb oldal:  $A \ominus B$ .
27. a) 1. megoldás: A különbség (D 2.4) definíciója miatt

$$(A \cup B) - B = \{x; x \in A \cup B, \text{ de } x \notin B\}.$$

Ez az egyesítés definíciója miatt mindazon  $A$ -beli elemek halmaza, amelyek nem tartoznak  $B$ -hez, vagyis éppen az  $A - B$  halmaz. Az  $A - B = A - (A \cap B)$  egyenlőség hasonlóan bizonyítható.

2. megoldás: A bizonyítandó azonosság komplementerekkel kifejezve (T 2.8):

$$A \cap \overline{B} = (A \cup B) \cap \overline{B} = A \cap (\overline{A} \cap B).$$

Ez pedig igaz, mert (a T 2.6 és a T 2.9 tételek alapján):  $(A \cup B) \cap \overline{B} = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) \cup \emptyset = A \cap \overline{B}$ , és

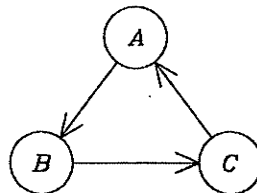
$$A \cap (\overline{A} \cap B) = A \cap (\overline{A} \cup \overline{B})(A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap \overline{B}.$$

b) Igaz. Vegyük figyelembe a D 2.2 definíciót és azt, hogy az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza.

c) és d) hamis, mert az üres halmaznak nincs valódi része. (Még önmaga sem.)

28. Először azt mutatjuk meg, hogy ha  $A - B \subseteq C$ , akkor  $A \subseteq B \cup C$ . A D 2.4 definíció miatt  $A \subseteq B \cup (A - B)$ , ha tehát  $A - B \subseteq C$ , akkor  $B \cup (A - B) \subseteq B \cup C$ . Ekkor viszont a tartalmazás tranzitivitása miatt (T 2.3)  $A \subseteq B \cup C$ . Másodszor azt bizonyítjuk be, hogy ha  $A \subseteq B \cup C$ , akkor  $A - B \subseteq C$ . A T 2.5 szerint, ha  $A \subseteq B \cup C$ , akkor  $A \cap \overline{B} \subseteq (B \cup C) \cap \overline{B}$ , de a disztributívási azonosságot felhasználva
- $$(B \cup C) \cap \overline{B} = (B \cap \overline{B}) \cup (C \cap \overline{B}) = (C \cap \overline{B}) = C - B \subseteq C$$
- miatt  $A \cap \overline{B} \subseteq C$ , azaz  $A - B \subseteq C$ .

29. A három állítás páronkénti ekvivalenciájához elegendő bizonyítani, hogy  $A$ -ból következik  $B$ ,  $B$ -ből következik  $C$  és  $C$ -ből következik  $A$ . Ezt a következő ábra szemlélteti: Könnyen belátható, hogy ekkor a fordított irányítású „következtetések” is teljesülnek. Pl.  $B$ -ből következik  $A$ , mert  $B$ -ből következik  $C$  és  $C$ -ből következik  $A$ .



$A$ -ból következik a  $B$ :

A **T 2.5** tétel szerint  $L \subseteq M$ -ből következik, hogy  $L \cap L \subseteq M \cap L$ , azaz  $L \cap M \supseteq L$ . A **T 2.5** szerint viszont tetszőleges  $L$  és  $M$  halmazokra  $L \cap M \subseteq L$ . A  $L \cap M \supseteq L$  és a  $L \cap M \subseteq L$  egyszerre csak  $L \cap M = L$  esetén teljesülhet.

$B$ -ből következik  $C$ :

Az  $L = L \cap M$  feltevésből  $L \cup M = (L \cap M) \cup M$  adódik, s e kifejezés jobb oldala az egyik elnyelési tulajdonság (**T 2.6**) szerint  $M$ -mel egyenlő.

$C$ -ből következik  $A$ :

Ha  $L \cup M = M$ , akkor  $(L \cup M) - M = M - M = \emptyset$  is teljesül. A bal oldal a különbség definíciója szerint  $L - M$ -mel egyenlő, tehát  $L - M = \emptyset$ . Ez azt jelenti, hogy  $L$ -nek nincs olyan eleme, amely nincs benne a  $M$  halmazban, vagyis  $L \subseteq M$ .

30. A **T 2.8** tétel szerint  $B - C = B \cap \overline{C}$ . Ez utóbbit, a **T 2.8** és **T 2.9** tételeket, valamint a disztributivitást alkalmazva

$$\begin{aligned} B - (B - C) &= B \cap \overline{(B - C)} = B \cap \overline{B \cap \overline{C}} = B \cap (\overline{B} \cup C) \\ &= (B \cap \overline{B}) \cup (B \cap C) = B \cap C. \end{aligned}$$

Ezt figyelembe véve, az előbbihez hasonló átalakítással kapjuk, hogy

$$D = A - (A - (B - (B - C))) = A \cap B \cap C.$$

Ez utóbbi kifejezés az üres halmazzal egyenlő, ha az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  halmazok közül legalább kettő metszete üres. Ezért az a) és b) esetekben  $D = \emptyset$ , a c) esetben pedig  $D = A \cap B \cap C$ .

31. Mindkét oldalra alkalmazzuk a disztributív tulajdonságok egyikét (**T 2.10**).

$$\begin{aligned} (M \cup K) \cap L &= (M \cap L) \cup (K \cap L), \\ (M \cup L) \cap K &= (M \cap K) \cup (L \cap K). \end{aligned}$$

Ezekből leolvasható, hogy ha pl.  $M \cap L = K \cap L = \emptyset$ , de  $M \cap K \neq \emptyset$ , akkor a feladatbeli egyenlet bal oldalán álló halmaz üres, a jobb oldalon lévő pedig nem üres. Tehát az állítás nem igaz tetszőleges három halmazra.

32. a) A **D 2.4** definíció alapján:  $(K \cup L) - L = K - L \subseteq K$ .  
Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha  $K \cap L = \emptyset$ .  
b) A **D 2.4** definícióból  $(K \cap L) - L = \emptyset$  következik. A **D 2.7** definíciót követő megjegyzés alapján viszont  $\emptyset \subseteq M$  teljesül minden  $M$  halmazra. Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha  $M = \emptyset$ .
33. Ha  $A \subseteq C$ , akkor az egyik disztributív tulajdonság (**T 2.6**) és a **T 2.5** tétel miatt  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = A \cup (B \cap C)$ . Tegyük fel, hogy

## 2. Halmazelmélet

$(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ . Ha  $A \subseteq C$  nem teljesülne, akkor lenne olyan  $t$ , melyre  $t \in A$  és  $t \notin C$ . Ebből viszont az következne, hogy  $t \notin (A \cup B) \cap C$ . De  $t \in A$  miatt  $t \in A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$  lenne, ami ellentmondás.

34. Ha  $A = B$ , akkor  $A - B = \emptyset$  és  $B - A = \emptyset$ . Tehát  $A - B = B - A$ .  
Másképp, az  $A \neq B$  feltételből következik, hogy létezik olyan  $t$ , melyre  $t \in A$ , de  $t \notin B$ . Ekkor viszont  $t \in A - B$ , de  $t \notin B - A$ .
35. A **D 2.4** és **D 2.4** definíciókból következik, hogy  $A - B$  és  $A \cap B$  diszjunkt halmazok. Ezért az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha mindkét oldalon az üres halmaz áll. De ha  $A \cap B = \emptyset$ , akkor  $A - B = A$ , és így a jelen esetben  $A = \emptyset$  kell legyen ( $B$  tetszőleges). Ez elegendő is, mert  $\emptyset - B = \emptyset$  és  $\emptyset \cap B = \emptyset$ .
36. Képezzük mindkét oldal metszetét a  $B$  halmazzal:

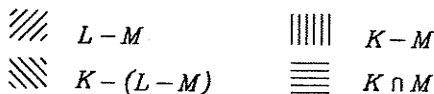
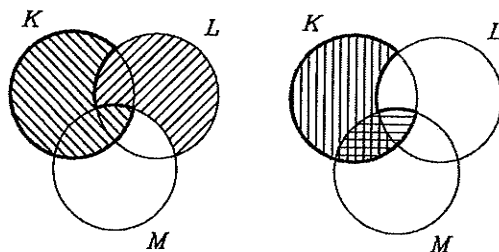
$$(A - B) \cap B = (A \cup B) \cap B.$$

A jobb oldal az egyik elnyelési azonosság (**T 2.6**) miatt  $B$ -vel egyenlő. Kaptuk, hogy  $(A - B) \cap B = B$ . Ez csak úgy teljesülhet (**D 2.4**-ből következően), ha  $B = \emptyset$ . (Az  $A$  tetszőleges halmaz lehet.) Ez elegendő feltétel is, mert ha  $A$  tetszőleges halmaz és  $B = \emptyset$ , akkor  $A - \emptyset = A$  és  $A \cup \emptyset = A$ .

37. A **T 2.8**, **T 2.9** és **T 2.6** tételek alapján:

$K - (K - L) = K \cap (\overline{K \cap L}) = K \cap (\overline{K} \cup \overline{L}) = (K \cap \overline{K}) \cup (K \cap \overline{L}) = K \cap \overline{L}$ .  
Ugyanígy kapjuk, hogy  $L - (L - K) = L \cap K$ . E kettő együtt, a metszés kommutatív tulajdonsága miatt, az azonosság teljesülését jelenti.

38.  $K - (L - M) =$   
 $(K \cap (\overline{L \cap M})) =$   
 $K \cap (\overline{L} \cup \overline{M}) =$   
 $(K \cap \overline{L}) \cup (K \cap \overline{M}) =$   
 $(K - L) \cup (K \cap \overline{M}).$

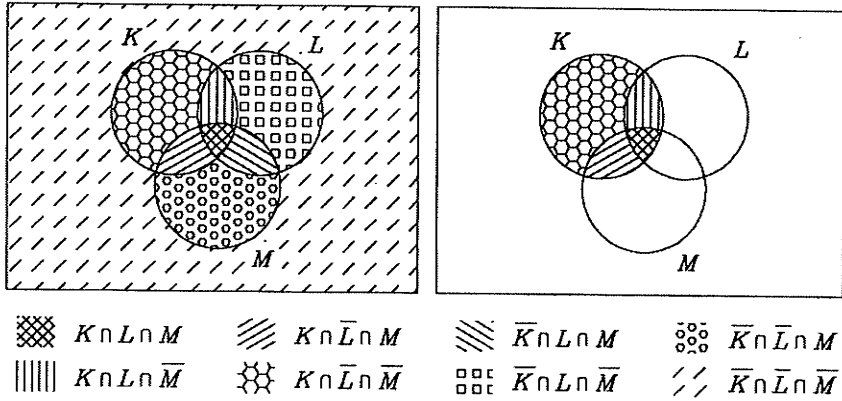


40.  $(K - L) - M = (K \cap \overline{L}) \cap \overline{M} = K \cap \overline{L} \cap \overline{M}$ , másrészt  
 $(K - M) - (L - M) = (K \cap \overline{M}) \cap (\overline{L \cap M}) = (K \cap \overline{M}) \cap (\overline{L} \cup \overline{M}) =$   
 $= (K \cap \overline{M} \cap \overline{L}) \cup (K \cap \overline{M} \cap M) = (K \cap \overline{M} \cap \overline{L}) \cup \emptyset = K \cap \overline{L} \cap \overline{M}.$
41.  $K = K \cup \emptyset = K \cup (L \cap \overline{L}) = (K \cup L) \cap (K \cup \overline{L}).$
42.  $K = K \cap H = K \cap (L \cup \overline{L}) = (K \cap L) \cup (K \cap \overline{L})$ , ahol  $H$  az alaphalmaz.
43. Az előző feladathoz hasonlóan, az  $A = A \cap H$  azonosság és a disztributivitás felhasználásával:  
 $K = K \cap H = K \cap (L \cup \overline{L}) = (K \cap L) \cup (K \cap \overline{L})$

## 2. Halmazelmélet

$$= (K \cap L \cap H) \cup (K \cap \bar{L} \cap H) = (K \cap L \cap (M \cup \bar{M})) \cup (K \cap \bar{L} \cap (M \cup \bar{M})) \\ = (K \cap L \cap M) \cup (K \cap L \cap \bar{M}) \cup (K \cap \bar{L} \cap M) \cup (K \cap \bar{L} \cap \bar{M}).$$

A bizonyítás elvégezhető fordított sorrendben is. E feladat megoldásának módszere felhasználható bonyolultabb összefüggések bizonyításában (lásd a következő két feladatot). Igaz ugyanis a következő állítás, melyet a mellékelt bal oldali ábra is szemléltet: minden halmaz, amelyet a  $K$ ,  $L$  és  $M$  halmazokkal és halmazműveletekkel írunk fel, felbontható  $\bar{K} \cap \bar{L} \cap \bar{M}$  alakú tagok uniójaként, ahol  $\bar{K}$  a  $K$  és a  $\bar{K}$  halmazok valamelyikét jelenti.  $\bar{K} \cap \bar{L} \cap \bar{M}$  alakú tagból nyolc féle van, melyet különböző satírozásokkal jelöltünk. E feladatban épp a  $K$  halmazt bontottuk fel ilyen tagok uniójaként, melyet a jobb oldali ábra mintázata szemléltet.



44. 1. megoldás: Az előző feladat eredményét és módszerét felhasználva:  
 $K = (K \cap L \cap M) \cup (K \cap L \cap \bar{M}) \cup (K \cap \bar{L} \cap M) \cup (K \cap \bar{L} \cap \bar{M}),$   
 $L = (K \cap L \cap M) \cup (K \cap L \cap \bar{M}) \cup (\bar{K} \cap L \cap M) \cup (\bar{K} \cap L \cap \bar{M}),$   
 $M = (K \cap L \cap M) \cup (K \cap \bar{L} \cap M) \cup (\bar{K} \cap L \cap M) \cup (\bar{K} \cap \bar{L} \cap M),$   
 $K - L = (K \cap \bar{L}) = (K \cap \bar{L} \cap (M \cup \bar{M})) = (K \cap \bar{L} \cap M) \cup (K \cap \bar{L} \cap \bar{M}),$   
 $L - M = (K \cap L \cap \bar{M}) \cup (\bar{K} \cap L \cap \bar{M}), M - K = (\bar{K} \cap L \cap M) \cup (\bar{K} \cap \bar{L} \cap M).$   
 Behelyettesítés után látható, hogy az egyenlőség fennáll. A fenti bal oldali Venn-diagrammon is kövessük és ellenőrizzük a felbontás és az egyenlőség két oldalán lévő halmazok összehasonlításának lépéseit.

2. megoldás: A bizonyítást a műveletek definíciói és az antiszimmetria tulajdonság (T 2.3) alkalmazásával végezzük. Ha  $x$  a bal oldal egy tetszőleges eleme, akkor a D 2.4 definíció szerint a következő négy eset valamelyike teljesül:  $x \in K - L$ ,  $x \in L - M$ ,  $x \in M - K$ ,  $x \in K \cap L \cap M$ . Ezért  $x$  a  $K$ ,  $L$ ,  $M$  halmazok közül legalább egynek eleme, vagyis benne van a jobb oldali halmazban. Legyen  $y$  a jobb oldal egy tetszőleges eleme. Ha  $y$  a  $K$ ,  $L$ ,  $M$  halmazok közül pontosan egynek, vagy pontosan kettőnek eleme, akkor (D 2.4 miatt) vagy  $y \in K - L$ , vagy  $y \in L - M$ , vagy  $y \in M - K$ . Ha pedig mindhárom halmaz tartalmazza  $y$ -t, akkor metszetüknek is eleme. Tehát  $y$  minden esetben eleme a bal oldali halmaznak. Ebből (T 2.3 miatt) az állítás

## 2. Halmazelmélet

helyessége következik.

46. a) Ha  $A - B = A$ , akkor (a **D 2.4** definíció miatt)  $A$  és  $B$  diszjunkt halmazok. Ekkor viszont  $B - A = B$ . A másik irányú állítás ugyanígy bizonyítható.
47. Legyen  $x$  az  $A \ominus B$  halmaznak tetszőleges eleme. Ekkor a szimmetrikus különbség definíciója szerint  $x \in A$ , vagy  $x \in B$ , de  $x \notin A \cap B$ .  
Ha  $x \in A$  és  $x \in C$ , akkor  $x \in B \ominus C$ . Ha pedig  $x \in A$  és  $x \notin C$ , akkor  $x \in A \ominus C$ . Az  $x \in B$  eset hasonlóan vizsgálható.
48. Ha  $A$  és  $B$  diszjunkt halmazok, akkor  $A \cap B = \emptyset$ , ezért a **D 2.4** definícióból  $A \ominus B = A \cup B$  közvetlenül adódik.  
Tegyük fel, hogy  $A \ominus B = A \cup B$ . A **D 2.4** definíció alapján

$$(A \ominus B) \cap (A \cap B) = \emptyset.$$

Ezért a feltevés miatt  $(A \cup B) \cap (A \cap B) = \emptyset$  is teljesül. Másrészt azonban  $A \cap B \subseteq A \cup B$ , így  $(A \cup B) \cap (A \cap B) = A \cap B$ . Tehát  $A \cap B = \emptyset$ , azaz  $A$  és  $B$  diszjunkt halmazpár.

49. A **T 2.8** tétel alapján a bal oldal  $(A \cap \overline{B}) \ominus (\overline{A} \cap B) = (A - B) \ominus (B - A)$ . Mivel  $A - B$  és  $B - A$  diszjunkt halmazok, ezért az előző feladat megoldásából következik, hogy  $(A - B) \ominus (B - A) = (A - B) \cup (B - A)$ . A jobb oldal pedig a **D 2.4** definíció alapján az  $A \ominus B$  halmazzal egyenlő.
50. Alkalmazzuk a halmazműveletek disztributív tulajdonságait, a **T 2.8** tételt és az előző feladat megoldását.
51. Könnyen belátható, hogy a  $K \ominus L = M \ominus N$  egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha nincs olyan  $x$  elem, mely a  $K$ ,  $L$ ,  $M$  és  $N$  halmazok közül páratlan soknak volna az eleme. De ugyanez mondható el a  $K \ominus M = L \ominus N$  egyenlőségről is, tehát e két egyenlőség ekvivalens egymással, vagyis egyszerre igazak, vagy hamisak.
52. A feladatbeli egyenlet a **D 2.4** definíció szerint pontosan akkor teljesül, ha  
(\*)  $A \cap (B - X) = \emptyset$ .  
Az  $X$ -nek tehát tartalmaznia kell  $B$  minden olyan elemét, amely  $A$ -nak is eleme; azaz szükséges, hogy  $X \supseteq A \cap B$  legyen. De ez elegendő is, mert ha  $X \supseteq A \cap B$ , akkor teljesül a (\*) egyenlőség.
53. Ha van ilyen  $X$ , akkor  $A - X \subseteq X$ , ami csak  $A - X = \emptyset$  esetén lehetséges (lásd **D 2.4**, és **D 2.2**). Ezt visszahelyettesítve az egyenletbe  $B = X$  adódik. Ezek szerint megoldás csak  $A - B = \emptyset$ , vagyis  $A \subseteq B$  esetén lehetséges. Ha viszont  $A \subseteq B$ , akkor  $X = B$  valóban megoldás (és ez az egyetlen).
54. A tartalmazás tranzitív tulajdonságát, továbbá a **D 2.4** definíciót alkalmazzuk. Ha van olyan  $X$  halmaz, amely kielégíti a feladatbeli egyenletet, akkor  $A \subseteq B - X \subseteq B$ . Tehát csak  $A \subseteq B$  esetén lehet megoldás. Ekkor  $A - X \subseteq B - X$  is teljesül és ezért az egyenlet így módosul:  $A - X = A$ . Ezt az egyenletet minden olyan  $X$  halmaz kielégíti, amelyre  $A \cap X = \emptyset$ .
55. A **D 2.4** definíciót, a disztributív tulajdonságokat és az egyik elnyelési tulajdonságot (**T 2.6**) alkalmazzuk. A feltételi egyenletből  $B \subseteq X$  következik. Másrészt az egyenletet átalakítva:

$$(A \cup B) \cap (X \cup B) = X,$$

## 2. Halmazelmélet

amiből  $X \subseteq A \cup B$ . Ezek szerint  $B \subseteq X \subseteq A \cup B$ , azaz  $X = B \cup Y$ , ahol  $Y \subseteq A$ . Minden ilyen  $X$  megoldás, mert ezzel  
 $(A \cap X) \cup B = (A \cap (B \cup Y)) \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap Y) \cup B = B \cup (A \cap B) \cup (A \cap Y) = X$ .

56. Az egyenletet az egyik disztributív tulajdonság figyelembevételével átírva:

$$(A \cup X) \cap (B \cup X) = B \cup X.$$

Ez azzal egyenértékű, hogy  $B \cup X \subseteq A \cup X$ . Mivel minden  $A$  és  $B$  halmazra  $B = (B - A) \cup (A \cap B)$ , ezért

$$(B - A) \cup (A \cap B) \cup X \subseteq A \cup X.$$

Ha egy  $x$  elem eleme a bal oldali halmaznak, akkor  $x \in (B - A)$  vagy  $x \in (A \cap B)$  vagy  $x \in X$ . Az utóbbi két esetben  $x$  nyilván eleme a jobb oldali halmaznak is, ha azonban  $x \in (B - A)$ , akkor  $x \notin A$ , tehát a fenti tartalmazás pontosan akkor áll fenn, ha  $B \setminus A \subseteq X$ . Tehát minden olyan  $X$  halmaz jó, melyre  $B \setminus A \subseteq X$ . (Ellenőrzésképpen: ha  $B \setminus A \not\subseteq X$ , akkor van olyan  $y \in B \setminus A$  elem, melyre  $y \notin X$ . Ekkor  $y \in B$  és  $y \notin A \cap B$ . Tehát a feladatbeli egyenlőség nem teljesülhet.)

57. Ha  $t \in A - X$ , akkor  $t \in A$  és  $t \notin X$ . Az egyenlőség miatt  $t \in X - A$  is teljesül. Ebből viszont  $t \in X$  és  $t \notin A$  következik. Tehát a két oldalon álló  $A$  és  $X$  halmaznak nincs közös eleme, így egyenlőség csak úgy állhat fenn, hogy mindkét oldal üres. De, ha  $A - X = \emptyset$ , akkor  $A \subseteq X$ . Az  $X - A = \emptyset$  egyenlőségből viszont  $X \subseteq A$  következik, azaz kell, hogy  $X = A$  legyen.
58. A D 2.7 definíció és az azt követő megjegyzés alapján:

$$P(H) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, H\}.$$

59. A D 2.1 és D 2.7 definíció és ez utóbbit követő megjegyzés alapján:

$$P(P(P(\emptyset))) = P(P(\{\emptyset\})) = P(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}.$$

60. Ha valamely  $X$  halmazra  $X \in P(A \cap B)$ , akkor  $X \subseteq A \cap B$ , ami azt jelenti, hogy  $X \subseteq A$  és  $X \subseteq B$  és ezért  $X \in P(A)$  és  $X \in P(B)$  (D 2.7, D 2.4). Ezekből  $P(A \cap B) \subseteq P(A) \cap P(B)$  következik.

Ha viszont  $Y$  olyan halmaz, amelyre  $Y \in P(A) \cap P(B)$ , akkor  $Y \in P(A)$  és  $Y \in P(B)$ , ami azt jelenti, hogy  $Y \subseteq A$  és  $Y \subseteq B$ . Így  $Y \subseteq A \cap B$ , azaz  $Y \in P(A \cap B)$ . Tehát  $P(A) \cap P(B) \subseteq P(A \cap B)$ . A két tartalmazás antiszimmetriájából a feladatbeli állítás helyessége következik.

61. Legyen  $X$  tetszőleges olyan halmaz, melyre  $X \in P(A) \cup P(B)$ . Ekkor  $X \in P(A)$  vagy  $X \in P(B)$ , azaz  $X \subseteq A$  vagy  $X \subseteq B$ . Ekkor azonban  $X \subseteq A \cup B$ , ami azt jelenti, hogy  $X \in P(A \cup B)$ . Ezekből (D 2.2 miatt) az állítás helyessége következik.

Megjegyzés: A  $P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$  tartalmazás általában nem igaz. Ha pl.  $A = \{a\}$  és  $B = \{b, c\}$ , akkor pl.  $\{a, b\} \in P(A \cup B)$ , de  $\{a, b\} \notin P(A) \cup P(B)$ .

62. Legyen pl.  $B \subseteq A$ . Ekkor a D 2.4 és D 2.7 definíciók alapján  $P(A \cup B) = P(A)$  és  $P(A) \cup P(B) = P(A)$ .

## 2. Halmazelmélet

Legyen  $A$  és  $B$  két olyan halmaz, amelyekre  $B \not\subseteq A$  és  $A \not\subseteq B$ . Ez azt jelenti, hogy van olyan  $a \in A$  és  $b \in B$  elem, amelyekre  $a \notin B$  és  $b \notin A$ . Ekkor  $\{a, b\} \in P(A \cup B)$ , de  $\{a, b\} \notin P(A)$  és  $\{a, b\} \notin P(B)$ . Ezekből  $\{a, b\} \notin P(A) \cup P(B)$  következik. Mivel  $\{a, b\} \in P(A \cup B)$ , ezért azt kapjuk, hogy  $P(A \cup B) \neq P(A) \cup P(B)$ .

66. Megszámlálva külön  $A$  és  $B$  elemeit, a közös részben lévőket nyilván kétszer számoljuk, így ezek számát levonva, az egyesítés elemeinek számát kapjuk.
67. Az előző feladat eredményét kétszer alkalmazva:  $|(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$ .
68. Megoldása hasonló az előző feladathoz.
69. A 67. feladatbeli egyenlőséget felhasználva: mindenki beszél legalább egy idegen nyelvet, és pontosan egy nyelvet beszél 26 diák.
70.  $1000 - ((1000 - 250) + (1000 - 900) + (1000 - 950) + (1000 - 990)) = 90$ , tehát legalább 90 házban van mind a négy eszköz.
71. 1. megoldás: Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy  $|P(A_n)| = 2^n$ . Könnyen látható, hogy  $|P(A_0)| = 1$ ,  $|P(A_1)| = 2$ . Tegyük fel, hogy  $|P(A_{n-1})| = 2^{n-1}$ . Legyen  $A_n = A_{n-1} \cup \{x\}$ , vagyis legyen  $x$  az  $A_n$  halmaz  $n$ -edik eleme.  $A_n$  minden részhalmazát megkapjuk, ha vesszük  $A_{n-1}$  minden részhalmazát, és vesszük  $A_{n-1}$  minden részhalmazának  $\{x\}$ -szel való egyesítettjét. Tehát  $|P(A_n)| = 2 \cdot |P(A_{n-1})|$ , azaz  $|P(A_n)| = 2^n$ .
2. megoldás: Legyen  $A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Az egyes részhalmazokat a következő módszerrel is kiválaszthatjuk: a halmaz elemeinek jele alá rendre a 0 vagy 1 számot írjuk, ahol a 0 azt jelöli, hogy a felette álló elemet nem választjuk be a részhalmaz elemei közé, az 1 pedig azt hogy beválasztjuk. Ekkor az  $A$  halmaznak annyi különböző részhalmazát tudjuk kiválasztani, ahány módon az elemek alá 0-kból és 1-esekből álló különböző sorozatot tudunk írni. Minden helyen két lehetőségünk van a választásra, ez összesen  $2^n$  lehetőség.
72. (Ha  $A$  véges, akkor az előző feladat szerint az állítás nyilvánvaló, hisz  $n < 2^n$ ). Legyen  $A$  tetszőleges halmaz, és tegyük fel, hogy  $\varphi : A \rightarrow P(A)$  kölcsönösen egyértelmű leképezés. Mivel  $\varphi$  kölcsönösen egyértelmű, ezért az

$$X := \{y \in A; y \notin \varphi(y)\}$$

halmazhoz van olyan  $x$  elem  $A$ -ban, hogy  $\varphi(x) = X$ . Vajon  $x$  eleme-e  $X$ -nek? Ha  $x \in X$ , akkor  $X$  definíciója szerint  $x \notin \varphi(x)$ . Ha viszont  $x \notin \varphi(x)$ , akkor viszont megint csak  $X$  definíciója szerint  $x$  bele kell tartozzék az  $X$  halmazba, vagyis  $x \in X$ . Azt kaptuk tehát, hogy  $x \in X$  pontosan akkor, ha  $x \notin X$ , ami ellentmondás. Tehát ilyen  $\varphi$  leképezés nem létezhet.

73. Az  $(1, 3)$ ,  $(1, 4)$ ,  $(5, 3)$  és  $(5, 4)$  pontok által határolt zárt téglalap.
74.  $A \times B \times C = \{(a, x, 1), (a, x, 2), (a, x, 3), (a, y, 1), (a, y, 2), (a, y, 3)\}$ ,  
 $A^3 = \{(a, a, a)\}$ ,  
 $B^3 = \{(x, x, x), (x, x, y), (x, y, x), (x, y, y), (y, x, x), (y, x, y), (y, y, x), (y, y, y)\}$ .
75. a)  $mn$ , b)  $k^2$ , c)  $(m + n - k)^3$ , d)  $(m - k)^2$ , e)  $(m + n - 2k)^4$ , f)  $m^2n$ .



### 3. Matematikai logika (megoldások)

1. Hamis, ugyanis  $P, Q$  és  $R$  logikai értékét behelyettesítve kapjuk:  $(P \wedge Q) \wedge R = (1 \wedge 0) \wedge 0 = 0 \wedge 0 = 0$ . (Ebben és a további feladatok megoldásában alkalmazzuk a **D 3.1** definícióit. A megoldást célszerű a zárójelben lévő összetett ítéletek logikai értékének meghatározásával kezdeni. Több zárójel esetén a legbelsőtől haladjunk kifelé.)
2. Hamis.                      3. Igaz.                      4. Igaz.                      5. Hamis.
6. Igaz.                      7. Igaz.                      8. Igaz.                      9. Igaz.
10. Hamis.
11. A **D 3.1** definíciót használjuk:  $\neg P \vee S$  összetett ítélet logikai értéke igaz, hisz  $0 \vee 1 = 1$ , ezért a  $P \Rightarrow (\neg P \vee S)$  ítélet logikai értéke is igaz, hisz  $1 \Rightarrow 1 = 1$ . Mivel  $1 \Leftrightarrow 1 = 1$ , ezért azt kapjuk, hogy a feladatbeli ítélet igaz logikai értékű.
12.  $R \vee \neg S$  hamis,  $P \Rightarrow (R \vee \neg S)$  hamis,  $Q \wedge S$  hamis, ezért a feladatbeli ítélet igaz.
13.  $P$  implikálja  $Q$ -t.  $P$  maga után vonja  $Q$ -t. A  $Q$  szükséges feltétele  $P$ -nek. Ahhoz, hogy  $P$  teljesüljön, szükséges, hogy  $Q$  fennálljon.  $P$  elégséges feltétele  $Q$ -nak. Ahhoz, hogy  $Q$  teljesüljön, elegendő, hogy  $P$  fennálljon. A  $P$  csak akkor teljesül, ha  $Q$  is teljesül. Ha  $P$ , akkor  $Q$ .
14.  $2^n$ . (Lásd még a **2.71**-es feladatot!)
15.  $p, q$  és  $r$  összes különböző értékhármására vizsgáljuk meg a kifejezések logikai értékét! A **14.** feladat szerint egy  $2^3 = 8$  sorból álló táblázatra lesz szükségünk:

$p$	$q$	$r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0

A két kifejezés nem azonosan egyenlő, mert a  $p = 0, q = 1, r = 1$  és a  $p = 0, q = 0, r = 1$  esetben  $p \wedge (q \vee r) = 0$  és  $(p \wedge q) \vee r = 1$ .

16. A táblázatban vastag számokkal jelezzük a kifejezések logikai értékét. Ezekből kiolvasható, hogy a két kifejezés azonosan egyenlő.

$\neg (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$						
0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1

### 3. Matematikai logika

17. A disztributivitás (T 3.4 (5)) és a T 3.4 (6) és (7) felhasználásával:

$$p \wedge (\neg p \vee q) \equiv (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \equiv 0 \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge q.$$

18. Alkalmazzuk a T 3.4 (5), (6) és (7) azonosságait!

19.

$p$	$q$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$		
1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1

Tehát mind a négy esetben  $p \Leftrightarrow q = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ , vagyis az azonosság fennáll.

20. A T 3.4 (11) és (8) azonosságok felhasználásával, vagy az előző feladathoz hasonlóan táblázattal.

29. A T 3.4 (9) és (8) azonosságok felhasználásával:

$$(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow s \equiv \neg(p \wedge q \wedge r) \vee s \equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee s,$$

továbbá T 3.4 (9) többszöri alkalmazásával:

$$p \Rightarrow [q \Rightarrow (r \Rightarrow s)] \equiv \neg p \vee [q \Rightarrow (r \Rightarrow s)] \equiv \neg p \vee \neg q \vee (r \Rightarrow s) \equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee s.$$

32.  $\neg$ (Márta szőke).

33.  $\neg(\neg$ (Mátyás elég virtuóz)). Ez ekvivalens azzal, hogy „Mátyás elég virtuóz”.

34. (esik az eső)  $\wedge$  (meleg van)  $\wedge$  (a nap elbúj)  $\wedge$  (későre jár az idő).

A hétköznapi beszédben az „és”, „de”, „is...is”, „bár”, „noha”,... szavak is alkalmasak lehetnek a konjunkció kifejezésére, bár e szavaknak a logika nyelvén ki nem fejezhető egyéb tartalmuk is lehet. Ha megvizsgáljuk, hogy egy mondatban szereplő elemi ítéletek igazságértékétől hogyan függ az egész mondat igazságértéke, eldönthetjük, hogy milyen műveletekről van szó. Például az e feladatbeli mondat csak akkor igaz, ha a benne szereplő négy elemi ítélet mindegyike igaz, tehát valóban konjunkcióról van szó.

35. (Éva ott volt)  $\vee$  (Pista ott volt).

36.  $\neg$ (a hegy megy Mohamedhez)  $\Rightarrow$  (Mohamed megy a hegyhez).

37. Használjuk az alábbi jelöléseket: E: esik az eső, F: fúj a szél, K: elmegyünk kirándulni. E jelölésekkel:  $(\neg E \wedge \neg F) \Rightarrow K$ . Ez T 3.4 (9) és (8) felhasználásával átalakítható az alábbi módon:  $(\neg E \wedge \neg F) \Rightarrow K \equiv \neg(\neg E \wedge \neg F) \vee K \equiv E \vee F \vee K$ . Eszerint a mondat ekvivalens a következővel: „esik az eső vagy fúj a szél vagy elmegyünk kirándulni.”

38. M: matekból elsősre átmegyek, F: fizikából elsősre átmegyek. E jelölésekkel:  $\neg(\neg M \wedge \neg F) \equiv M \vee F$ , ami hétköznapi nyelven így szól: „matekból vagy fizikából elsősre átmegyek”.

39. S: a szemtanú megbízható, U: az ujjlenyomatok a tettestől származnak, T: téved az írásszakértő. E jelölésekkel:

$$(S \wedge U) \Rightarrow T \equiv \neg S \vee \neg U \vee T \equiv \neg(S \wedge U \wedge \neg T).$$

Azaz az ekvivalens alakok hétköznapi nyelven: „A szemtanú nem megbízható, vagy az ujjlenyomatok nem a tettestől származnak, vagy téved az írásszakértő”, illetve „Az nem lehet, hogy a szemtanú is megbízható, az ujjlenyomatok is a tettestől származnak, és az írásszakértő sem téved”.

### 3. Matematikai logika

40. (szivárvány van)  $\Rightarrow$  [(esik az eső)  $\wedge$  (süt a Nap)  $\wedge$   $\neg$ (dél van)].

$n$ páros	$n$ páratlan	$n$ vagy páros, vagy páratlan egész
1	1	nincs értelmezve (lehetetlen)
1	0	1
0	1	1
0	0	nincs értelmezve (lehetetlen)

kirándulni megyünk	strandolni megyünk	vagy kirándulni megyünk vagy strandolni
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

(Ezt a műveletet nevezik „kizáró vagy”-nak.)

Ecsér következik	Maglód következik	Vagy Ecsér vagy Maglód következik
1	1	nincs értelmezve
1	0	1
0	1	1
0	0	0

44. Igaz, mert a 7 prímszám.

45. Igaz, mert a 2 prímszám és páros.

46. Igaz, mert van olyan pozitív egész szám, amelyik prímszám.

47. Igaz, mert minden pozitív egész  $y$ -hoz megadható olyan pozitív egész  $x$  szám, mely osztója  $y$ -nak.

48. Igaz, mert létezik olyan pozitív egész szám, amely prímszám és páros.

49. Ez hamis állítás, mert nem minden pozitív egész szám prímszám.

50. Igaz, mert ha  $y$  osztható 2-vel, akkor páros.

51. Ez hamis, mert ha  $x$  osztója  $y$ -nak, akkor  $y \geq x$ .

52. Ez igaz állítás.

53. Az ítélet szavakba foglalva: van olyan pozitív egész szám, amely ha 6-tal osztható, akkor prímszám. Ha különösnek is tűnik, ennek az összetett ítéletnek a logikai értéke igaz. Vegyük például az  $(S(6, 5) \Rightarrow T(5))$  vagy az  $(S(6, 8) \Rightarrow T(8))$  ítéleteket. Az előtag mindkettőben hamis, ezért az implikáció igaz.

54. Ha egy négyszög húrnégyszög, akkor téglalap. Az állítás hamis.

55. Ha egy négyszög téglalap, akkor húrnégyszög is egyben. Az állítás igaz.

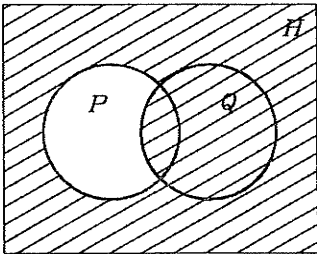
56. Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha téglalap. Az állítás hamis.

57. Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha szemközti szögeinek összege  $180^\circ$ . Az állítás igaz, mert  $p(x) \Rightarrow r(x)$  és  $r(x) \Rightarrow p(x)$  is igaz (T 3.4. (11)).

58. Ha egy négyszög téglalap, akkor átlói felezik egymást. Az állítás igaz.

59. Ha egy négyszög átlói nem felezik egymást, akkor a négyszög nem téglalap. Mivel a  $q(x) \Rightarrow s(x)$  ítélet igaz minden  $x$ -re, ezért a  $\neg s(x) \Rightarrow \neg q(x)$  állítás is igaz a kontrapozíciós azonosság (T 3.4 (10)) miatt.

### 3. Matematikai logika

60. Ha egy négyszög húrnégyszög, de nem téglalap, akkor a négyszög átlói felezik egymást. Az állítás hamis.
61. Jelölje  $A$  az ajtók,  $K$  a kilincsek halmazát, és  $R(x, y)$  azt az ítéletet, hogy  $y$  rajta van  $x$ -en. E jelölésekkel formalizálva:  $(\forall x \in A)(\exists y \in K)R(x, y)$ , aminek tagadása **T 3.4 (12)** szerint  $(\exists x \in A)(\forall y \in K)\neg R(x, y)$ , szavakban: „van olyan ajtó, amin nincs kilincs”.
62.  $S(x)$ :  $x$  szekercét fog hóna alá,  $M(x)$ :  $x$  molnár. E jelölésekkel a közmondás formalizált alakja:  $\neg\forall x [S(x) \Rightarrow M(x)]$ . Ez **T 3.4 (12)** és (9) szerint ekvivalens az alábbiakkal:  $\exists x \neg[S(x) \Rightarrow M(x)] \equiv \exists x [S(x) \wedge \neg M(x)]$ , ami szavakban: „van olyan, ki szekercét fog hóna alá, de nem molnár”. Az eredeti állítás tagadása:  $\forall x [S(x) \Rightarrow M(x)]$ , azaz szavakban: „mind molnár, ki szekercét fog hóna alá”.
63. A  $b(x)$ : ( $x$  nem szólt, csak bégetett),  $d(x)$ : ( $x$  dicséretet kapott) jelölésekkel:  $\forall x (b(x) \Rightarrow d(x))$ . Tagadása **T 3.4 (12)** és (9) felhasználásával:  $\neg\forall x (b(x) \Rightarrow d(x)) \equiv \exists x \neg(b(x) \Rightarrow d(x)) \equiv \exists x (b(x) \wedge \neg d(x))$ . Ez utóbbi hétköznapi szavakkal: „volt olyan, ki nem szólt, csak bégetett, de még dicséretet sem kapott”.
64.  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(A \Rightarrow B)$ , ahol  $A : |x - a| < \delta$ ,  $B : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ . Tagadása **T 3.4 (12)** és (9) felhasználásával:  $\neg[(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(A \Rightarrow B)] \equiv (\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x)\neg(A \Rightarrow B) \equiv (\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x)(A \wedge \neg B)$ . Szavakban: „Létezik olyan pozitív  $\varepsilon$  szám, hogy bármely  $\delta$  pozitív számhoz található olyan  $x$  szám, hogy  $|x - a| < \delta$ , de  $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ .”
65. Átfoglalozva: „minden időpillanatban, amikor fúj a szél, fázom”. Formalizálva:  $\forall x((\text{az } x \text{ pillanatban fúj a szél}) \Rightarrow (\text{az } x \text{ pillanatban fázom}))$ . Tagadása:  $\exists x((\text{az } x \text{ pillanatban fúj a szél}) \wedge \neg(\text{az } x \text{ pillanatban fázom}))$ , azaz, „van, hogy fúj a szél, de nem fázom.”
66. Mivel  $p(x) \Rightarrow q(x) \equiv \neg p(x) \vee q(x)$ , így a neki megfelelő halmaz  $\overline{P} \cup Q$ .  
Bővebben kifejtve:  
 $p(x) \Rightarrow q(x) \equiv (x \in P) \Rightarrow (x \in Q) \equiv (x \notin P) \vee (x \in Q) \equiv (x \in \overline{P} \cup Q)$ .  
(lásd az ábrát)
- 
67.  $(\overline{P} \cup Q) \cap (P \cup \overline{Q})$ ,  
ami másképpen felírva  $\overline{P \ominus Q}$ .
68.  $P \cup \overline{Q} \cap \overline{R} \equiv P \cup \overline{Q} \cup \overline{R}$ .
69.  $P \cup (Q \cap R) \equiv (P \cup Q) \cap (P \cup R)$ . 70.  $\overline{P} \cup \emptyset \equiv \overline{P}$ .
71.  $[(P \cup Q) \cap (P \cup \overline{Q})] \cup [(\overline{P} \cup Q) \cap (\overline{P} \cup \overline{Q})] \equiv H$ .
72.  $P = H$ . 73.  $P = \emptyset$ . 74.  $P \neq \emptyset$ .
75.  $P = Q$ .
76.  $\forall x (p(x) \Rightarrow q(x)) \equiv \forall x ((x \in P) \Rightarrow (x \in Q))$ , ami azt jelenti, hogy „ha valami eleme  $P$ -nek, akkor eleme  $Q$ -nak is”, azaz „ $P$  minden eleme eleme a  $Q$  halmaznak is”, azaz  $P \subseteq Q$ . (Egy másik igazolás az implikáció kiküszöbölésével:  $\forall x (p(x) \Rightarrow q(x)) \equiv \forall x (\neg p(x) \vee q(x)) \equiv \neg \exists x \neg(\neg p(x) \vee q(x)) \equiv \neg \exists x (p(x) \wedge \neg q(x))$ . Az utolsó formulából kiolvasható, hogy  $P$ -nek nincs  $\overline{Q}$ -vel közös eleme, azaz  $P \subseteq Q$ .)

### 3. Matematikai logika

77.  $P$  és  $Q$  diszjunktak.

78. Azonosság. A bal oldal halmazelméleti megfogalmazásban:  $P \cap Q = H$ , a jobb oldal:  $P = H$  és  $Q = H$ , ezek pedig ekvivalens állítások.

79. Nem azonosság. A bal oldal halmazelméleti megfogalmazásban:  $P \cup Q = H$ , a jobb oldal:  $P = H$  vagy  $Q = H$ , ezek pedig nem ekvivalens állítások.

80.  $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ .

Táblázatot készítve:

$p$	$q$	$r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r)$			bal o.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$			jobb o.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

81.  $p \wedge \neg(q \wedge r) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)$ .

85. Ha  $E(x)$  jelöli az „ $x$  pillanatban esik az eső”,  $F(x)$  az „ $x$  pillanatban fúj a szél” ítéleteket, akkor a feladatbeli ítélet formalizálva:

$$(\forall x)(E(x) \Rightarrow F(x)) \vee (\forall x)(F(x) \Rightarrow E(x)),$$

ami valóban nem igaz, ellentétben a

$$(\forall x)[(E(x) \Rightarrow F(x)) \vee (F(x) \Rightarrow E(x))]$$

ítélettel.

86. Ha  $n \leq 24$  és  $m \leq 24$ , akkor  $n + m \leq 48$ , ami — mivel  $n$  és  $m$  pozitív egészek — a kontrapozíció (T 3.4 (9)) szerint pontosan azt jelenti, hogy ha  $n + m \geq 49$ , akkor  $n \geq 25$ , vagy  $m \geq 25$ . (E bizonyítás formalizálásához vezessük be a következő ítéleteket:  $p$ :  $n + m \geq 49$ ,  $q$ :  $n \geq 25$ ,  $r$ :  $m \geq 25$ . Azt szeretnénk bizonyítani, hogy  $p \Rightarrow (q \vee r)$  igaz. Helyette a logikailag ekvivalens  $\neg(q \vee r) \Rightarrow \neg p$  kontrapozíciós alak helyességét fogjuk belátni. A De Morgan azonosságok révén  $\neg(q \vee r) \equiv \neg q \wedge \neg r$  adódik, vagyis  $n \leq 24$  és  $m \leq 24$ . Utóbbiból  $n + m \leq 48$  adódik, ami éppen  $\neg p$ . Ezzel megmutattuk, hogy  $\neg(q \vee r) \Rightarrow \neg p$  igaz, következésképpen bizonyítottuk, hogy  $p \Rightarrow (q \vee r)$  érvényes.)

87. (1) minden nap, (2) kedd kivételével minden nap.

88. „Ha egy természetes szám osztható  $a$ -val is és  $b$ -vel is, akkor osztható  $ab$ -vel is” — nem igaz.

89. „Két négyszög egybevágó, ha a megfelelő oldalai egyenlők egymással” — nem igaz.

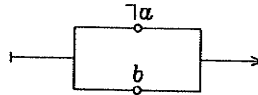
90. „Ha egy háromszögben két oldal négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű” — igaz.

91. A soros kapcsolású áramkör pontosan akkor vezeti az áramot, ha  $A$  és  $B$  is be van kapcsolva, azaz ha  $a$  és  $b$  is igaz. Ennek alapján a soros kapcsolásnak

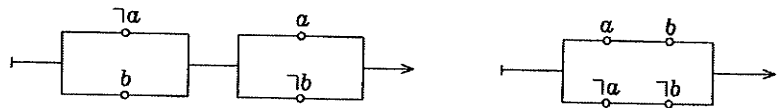
### 3. Matematikai logika

az  $a \wedge b$  ítélet felel meg. A párhuzamos kapcsolású áramkör pontosan akkor vezeti az áramot, ha  $A$  vagy  $B$  be van kapcsolva, azaz ha  $a$  vagy  $b$  igaz. Ennek alapján a párhuzamos kapcsolásnak az  $a \vee b$  ítélet felel meg.

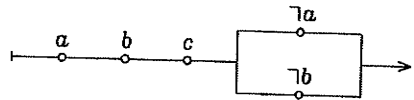
92.  $a \Rightarrow b \equiv \neg a \vee b$ ,  
ezért az áramkör:



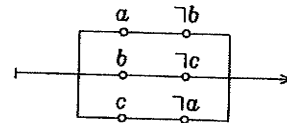
93.  $a \Leftrightarrow b \equiv (\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b)$ , vagy  $a \Leftrightarrow b \equiv (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$ . Az ezeknek megfelelő két áramkör:



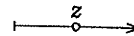
94.  $a \wedge b \wedge c \wedge \neg(a \wedge b) \equiv$   
 $a \wedge b \wedge c \wedge (\neg a \vee \neg b)$ , így:



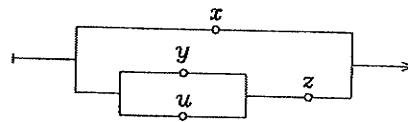
95.  $[(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)] \Rightarrow (a \Rightarrow c)$   
 $\equiv (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg c) \vee (c \wedge \neg a)$ , így:



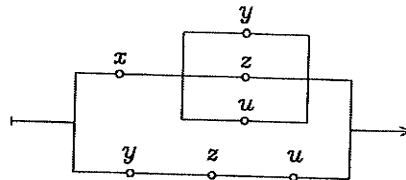
96.  $(y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee \equiv z$ .



97.  $(x \vee y \vee z \vee u) \wedge (x \vee y \vee u) \wedge (x \vee z) \equiv x \vee [(y \vee u) \wedge z]$ .

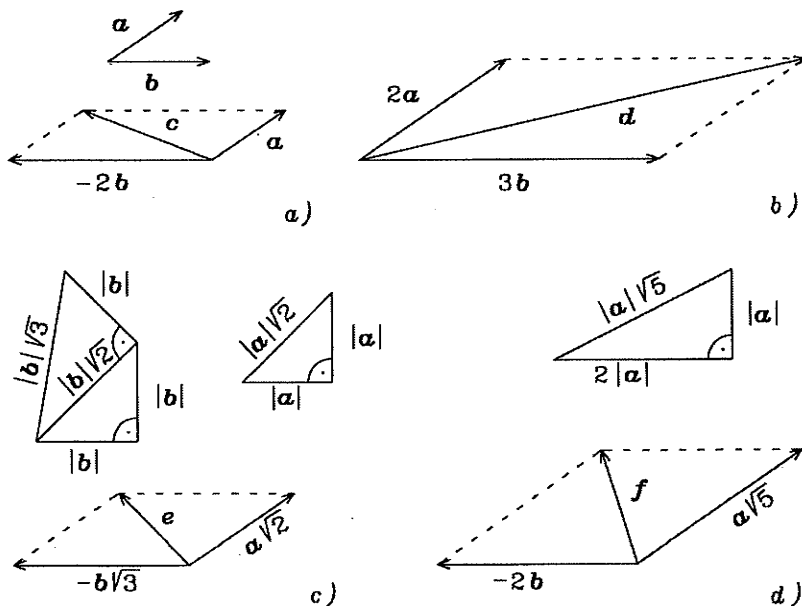


98. Legyen  $x$  az elnöki kapcsolóhoz,  $y$ ,  $z$  és  $u$  a további három kapcsolóhoz rendelt logikai változó. A kapcsoló áramkör vezeti az áramot, ha  $x$  és még egy változó igaz, vagy ha  $y$ ,  $z$  és  $u$  is igaz; formulával:  $[x \wedge (y \vee z \vee u)] \vee (y \wedge z \wedge u)$ . Így az áramkör:



#### 4. Vektoralgebra (megoldások)

1.



2. a)  $3m - 3n = 3(a + b) - 3(a - b) = 6b$     b)  $4m + 4n = 8a$ ;  
 c)  $2m - \frac{1}{2}n = \frac{3}{2}a + \frac{5}{2}b$ ;    d)  $3m + \frac{\sqrt{2}}{3}n = \frac{9+\sqrt{2}}{3}a + \frac{9-\sqrt{2}}{3}b$ .
3. a)  $3a - 4b = \frac{10}{3}m - \frac{11}{3}n$ ;    b)  $5a + 2b = \frac{8}{3}m - \frac{1}{3}n$ ;  
 c)  $-a + \frac{1}{10}b = -\frac{7}{10}m + \frac{2}{5}n$ ;    d)  $2a - b\sqrt{3} = \frac{4+\sqrt{3}}{3}m - \frac{2+2\sqrt{3}}{3}n$ .
4. A szabályos hatszög geometriai tulajdonságaiból következik, hogy  
 $\overrightarrow{A_1A_2} = b - a$ ,  $\overrightarrow{A_2A_3} = -a$ ,  $\overrightarrow{A_3A_4} = -b$ ,  $\overrightarrow{A_4A_5} = a - b$ ,  $\overrightarrow{A_5A_6} = a$ ,  
 $\overrightarrow{A_6A_1} = b$ ,  $\overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} = b - 2a$ ,  $\overrightarrow{A_1A_4} = -2a$ ,  $\overrightarrow{A_1A_5} = -(a + b)$ .  
 $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_6} = 0$ .
5. a)  $\overrightarrow{BA}$ .    b)  $0$ .    6.  $\overrightarrow{A_1A_n}$ .
7. I. „akkor”: Tegyük fel először, hogy  $a + b + c = 0$ . Rendezés után alkalmazzuk a T 4.1 tételt:

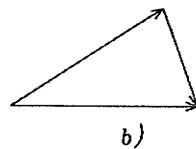
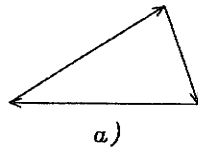
$$|a| + |b| \geq |a + b| = |-c| = |c|.$$

Ugyanígy kapjuk, hogy  $|a| + |c| \geq |b|$  és  $|b| + |c| \geq |a|$ . Ha „ $\geq$ ” helyett „ $=$ ” jel van, akkor a háromszög szakasszá, esetleg ponttá fajul.) Ezekből

#### 4. Vektoralgebra

következik, hogy az  $|a|$ ,  $|b|$  és  $|c|$  szakaszokkal szerkeszthető háromszög. Abban az esetben, amikor valamelyik (pl.  $c$ ) előállítható a másik két vektor (pl.  $a$  és  $b$ ) összegeként, az előbbihez hasonlóan járunk el!

II. „csak akkor”: Ha  $a$ ,  $b$  és  $c$  egy háromszög oldalvektorai, akkor a vektorok elhelyezkedésére az ábrán vázolt esetek lehetnek.



Az a) esetben:  $a + b + c = 0$ , a b) esetben a vektorok jelölésétől függően,  $a + b = c$ , vagy  $a + c = b$ , vagy  $b + c = a$ .

8. Mivel  $a + \frac{a-b}{2} - \frac{3a-b}{2} = 0$ , ezért az előző feladat miatt van ilyen háromszög.
9. A három vektor összege nem nullvektor. Ugyanakkor a három vektor közül semelyik kettőnek az összege sem egyenlő a harmadikkal, mivel  $a$  és  $b$  nem kollineárisak. Ezért a 7. feladat miatt nincs ilyen háromszög.
10.  $a/|a|$  és  $-a/|a|$  ( $a \neq 0$ ).
11. Mivel  $a$  és  $b$  merőleges vektorok és  $\left| \frac{a}{|a|} \right| = \left| \frac{b}{|b|} \right| = 1$ , ezért a keresett vektor  $\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} \right)$ .
12. Az  $|a|b$  és  $|b|a$  vektorok hossza egyenlő. Ezért, ha  $a$  és  $b$  ellentétes irányúak, akkor az első, ha pedig egyező irányúak, akkor a második állítás igaz.
13. A T 4.1 és T 4.2 tételeket alkalmazzuk.
  - a) Akkor és csak akkor teljesül, ha a két vektor  $\alpha$  szögére  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ .
  - b) Akkor és csak akkor teljesül, ha a két vektor szögére  $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$ .
  - c) Ha a két vektor szöge  $\frac{\pi}{2}$ .
  - d) Akkor és csak akkor teljesül, ha  $a$  és  $b$  ellentétes irányú és  $|a| \geq |b|$ .
  - e) Akkor és csak akkor teljesül, ha a két vektor ellentétes irányú.
  - f) Akkor és csak akkor teljesül, ha a két vektor egyező irányú.
  - g) Akkor és csak akkor teljesül, ha  $|a| = |b|$ .
14. Az  $\overrightarrow{OA_i}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, 5$ ) vektorokat forgassuk el az  $O$  pont körül  $72^\circ$ -kal. Ekkor az  $\overrightarrow{OA_i}$  vektorok a összegével az elforgatott vektorok  $b$  összegével  $72^\circ$ -os szöveget zár be. Az ötszög szabályossága miatt azonban  $a = b$ . Ez csak úgy lehet, ha a vektorösszeg  $0$ .
15. Az  $\overrightarrow{OA_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) vektorokat forgassuk el az  $O$  pont körül  $\frac{2\pi}{n}$  szöggel. A továbbiakban a 14. feladat megoldásához hasonlóan járunk el.
16. Legyen a keresett  $A_1A_2A_3$  háromszögben  $F_1$  az  $A_1A_2$ ,  $F_2$  az  $A_2A_3$  és  $F_3$  az  $A_2A_1$  oldal felezőpontja, és  $O$  tetszőleges pontja. A T 4.2 tétel alapján:



4. Vektoralgebra

$$\vec{OF}_1 = \frac{1}{2}(\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2), \quad \vec{OF}_2 = \frac{1}{2}(\vec{OA}_2 + \vec{OA}_3), \quad \vec{OF}_3 = \frac{1}{2}(\vec{OA}_3 + \vec{OA}_1).$$

Ezekből  $\vec{OF}_1 - \vec{OF}_2 + \vec{OF}_3 = \vec{OA}_1$ . Ez alapján az  $A_1$  csúcs megszerkeszthető; ebből pedig a másik kettő is.

17. A keresett ötszög:  $A_1A_2A_3A_4A_5$ . Legyen  $F_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) az  $A_iA_{i+1}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) oldal,  $F_5$  az  $A_5A_1$  oldal felezőpontja, az  $O$  pedig egy tetszőleges pont az ötszög síkjában. A T 4.2 tétel alapján  $\vec{OF}_i = \frac{1}{2}(\vec{OA}_i + \vec{OA}_{i+1})$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) és  $\vec{OF}_5 = \frac{1}{2}(\vec{OA}_5 + \vec{OA}_1)$ . Ezekből  $\vec{OF}_1 - \vec{OF}_2 + \vec{OF}_3 - \vec{OF}_4 + \vec{OF}_5 = \vec{OA}_1$ . Ez alapján az  $A_1$  (és ebből a többi) csúcs megszerkeszthető.
18. A keresett sokszög:  $A_1A_2 \dots A_{2n+1}$ . Legyen  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n$ ) az  $A_iA_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n$ ) oldal,  $F_{2n+1}$  az  $A_{2n+1}A_1$  oldal felezőpontja, az  $O$  pedig egy tetszőleges pont a sokszög síkjában. Az előző feladat megoldásához hasonlóan eljárva,  $\vec{OF}_1 - \vec{OF}_2 + \vec{OF}_3 - \dots - \vec{OF}_{2n} + \vec{OF}_{2n+1} = \vec{OA}_1$  adódik.
19. Jelölje  $F_1$  a  $BC$ ,  $F_2$  az  $AC$  és  $F_3$  az  $AB$  oldal felezőpontját. A T 4.2 tétel és a vektorösszeadás definíciója alapján:

$$\vec{AF}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}), \quad \vec{BF}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{b} - \mathbf{c}, \quad \vec{CF}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{c} - \mathbf{b}.$$

20. Az előző feladat jelöléseit alkalmazva, a három súlyvonalvektor összege  $\vec{AF}_1 + \vec{BF}_2 + \vec{CF}_3 = \mathbf{0}$ . A 7. feladat alapján ez azt jelenti, hogy a három súlyvonalal, mint oldalakkal, szerkeszthető háromszög.
21. Az ábra szerinti  $ABC$  háromszög oldalvektorainak irányítása legyen olyan, hogy  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$  teljesüljön; súlyvonalvektorai pedig  $\mathbf{s}_a, \mathbf{s}_b$  és  $\mathbf{s}_c$ . Jelöljük  $A'B'C'$ -vel az előbbi vektorok hosszával szerkesztett háromszöget, melynél az oldalvektorok irányítása olyan, mint az előbb, vagyis  $\mathbf{s}_a + \mathbf{s}_b + \mathbf{s}_c = \mathbf{0}$ . Az  $A'B'C'$  háromszög  $\mathbf{s}'_a, \mathbf{s}'_b$  és  $\mathbf{s}'_c$  súlyvonalvektorainak hosszával szerkesztett háromszög legyen  $A''B''C''$ . (Ezek a szerkesztések az előző feladat alapján elvégezhetők.)

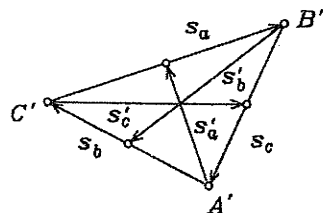
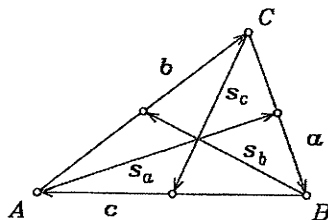
A vektorösszeadás definíciója alapján egyrészt (az  $ABC$  háromszögből)

$$\mathbf{s}_a = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{s}_b = \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{a}, \quad \mathbf{s}_c = \frac{1}{2}\mathbf{c} + \mathbf{b}, \quad \text{másképpen (az } A'B'C' \text{ háromszögből)}$$

$$\mathbf{s}'_a = \frac{1}{2}\mathbf{s}_a + \mathbf{s}_c, \quad \mathbf{s}'_b = \frac{1}{2}\mathbf{s}_b + \mathbf{s}_a, \quad \mathbf{s}'_c = \frac{1}{2}\mathbf{s}_c + \mathbf{s}_b. \quad \text{Behelyettesítés után}$$

$$\mathbf{s}'_a = \frac{1}{4}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{c} + \mathbf{b} = -\frac{3}{4}\mathbf{a} + (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

Mivel  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ , ezért  $\mathbf{s}'_a = -\frac{3}{4}\mathbf{a}$ . Hasonlóan:  $\mathbf{s}'_b = -\frac{3}{4}\mathbf{b}$  és  $\mathbf{s}'_c = -\frac{3}{4}\mathbf{c}$ . Ezekből az  $ABC$  és  $A''B''C''$  háromszögek hasonlósága következik.



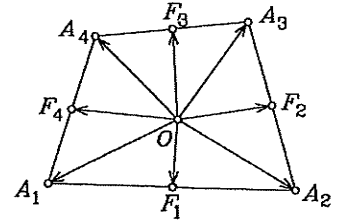
4. Vektoralgebra

22. Jelöljön  $O$  egy tetszőlegesen felvett pontot.

(L. ábra.)  $\vec{OF}_1 = \frac{1}{2}(\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2)$ ,

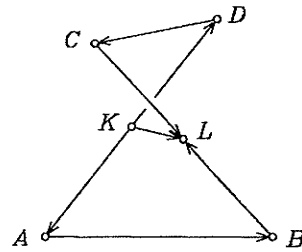
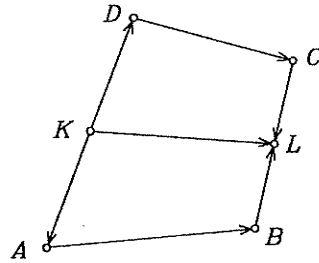
$\vec{OF}_2 = \frac{1}{2}(\vec{OA}_2 + \vec{OA}_3)$ ,  $\vec{OF}_3 = \frac{1}{2}(\vec{OA}_3 + \vec{OA}_4)$ ,  $\vec{OF}_4 = \frac{1}{2}(\vec{OA}_4 + \vec{OA}_1)$ .

Az első két egyenletből  $\vec{F}_2\vec{F}_1 = \vec{OF}_1 - \vec{OF}_2 = \frac{1}{2}(\vec{OA}_1 - \vec{OA}_3)$ , a harmadikból és a negyedikből pedig  $\vec{F}_3\vec{F}_4 = \vec{OF}_4 - \vec{OF}_3 = \frac{1}{2}(\vec{OA}_1 - \vec{OA}_3)$  következik. Kaptuk, hogy  $\vec{F}_2\vec{F}_1 = \vec{F}_3\vec{F}_4$  ezért az  $F_1F_2F_3F_4$  négyszög paralelogramma.



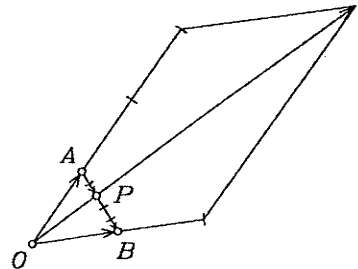
23.  $\vec{KL} = \vec{KA} + \vec{AB} + \vec{BL}$ , másrészt  $\vec{KL} = \vec{KD} + \vec{DC} + \vec{CL}$ . (L. ábra.)

Ezt a két egyenletet összeadva és figyelembe véve, hogy  $\vec{KA} + \vec{KD} = \vec{BL} + \vec{CL} = \vec{0}$ , a bizonyítandó állítást kapjuk.



24.  $\vec{AP} = \frac{m}{m+n}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$  (l. ábra). Ezért

$\vec{OP} = \mathbf{a} + \vec{AP} = \frac{n}{m+n}\mathbf{a} + \frac{m}{m+n}\mathbf{b}$ .



25. Legyen  $F_a$  az  $ABC$  háromszög  $A$  csúccsal szemközti oldalának felezőpontja, és  $S_a$  az  $AF_a$  súlyvonalnak az  $F_a$  végponthoz közelebbi harmadoló pontja.

Hasonló a jelentésük az  $S_b$  és  $S_c$  pontoknak. Legyen  $\vec{AC} = \mathbf{b}$  és  $\vec{AB} = \mathbf{c}$ . A 24. feladatot alkalmazva az  $m = 1$ ,  $n = 2$  esetre

$\vec{AS}_b = \frac{2(\frac{1}{2})\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2+1} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$  és  $\vec{AS}_c = \frac{1}{3}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ .

Ugyanakkor a T 4.2 tételből következik, hogy  $\vec{AS}_a = \frac{1}{3}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ . Így az  $S_a, S_b$

#### 4. Vektoralgebra

és  $S_c$  pontok egybeesnek, és a súlyvonalak harmadolva metszik egymást.

$$26. \vec{OS} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}).$$

27. Az előző két feladat bármelyike alapján  $\vec{AS} = \frac{1}{3}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ ,  $\vec{BS} = \frac{1}{3}(\mathbf{b} - 2\mathbf{c})$ ,  $\vec{CS} = \frac{1}{3}(\mathbf{c} - 2\mathbf{b})$ . Ezekből  $\vec{AS} + \vec{BS} + \vec{CS} = \mathbf{0}$ .

28. I. rész: „csak akkor”. Ha  $S$  a súlypontja az  $ABC$  háromszögnek, akkor az előző feladat eredménye szerint  $\vec{AS} + \vec{BS} + \vec{CS} = \mathbf{0}$ .

II. rész: „akkor”. Kontrapozíciós bizonyítást végzünk. Azt mutatjuk meg, hogy ha valamely  $P$  pont nem súlypontja az  $ABC$  háromszögnek (azaz  $P \neq S$ ), akkor  $\vec{AP} + \vec{BP} + \vec{CP} \neq \mathbf{0}$ .

Tekintsük a következő vektorösszegeket:  $\vec{PA} + \vec{AS} = \vec{PS}$ ,  $\vec{PB} + \vec{BS} = \vec{PS}$ ,  $\vec{PC} + \vec{CS} = \vec{PS}$ . Ezeket összeadva és figyelembe véve az  $S$  súlypontra vonatkozó  $\vec{AS} + \vec{BS} + \vec{CS} = \mathbf{0}$  egyenlőséget,  $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = 3\vec{PS} \neq \mathbf{0}$ .

29. Alkalmazzuk a 26. feladat eredményét az  $O = S$  pontra és az  $A_1B_1C_1$  háromszögre. Ekkor  $3\vec{SS}_1 = \vec{SA}_1 + \vec{SB}_1 + \vec{SC}_1$ . A 28. feladat alapján  $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} = \mathbf{0}$ . E két utóbbi összefüggésből, valamint az  $\vec{SA}_1 - \vec{SA} = \vec{AA}_1$ ,  $\vec{SB}_1 - \vec{SB} = \vec{BB}_1$ ,  $\vec{SC}_1 - \vec{SC} = \vec{CC}_1$  egyenlőségekből a bizonyítandó állítás adódik.

30. Az előző feladat megoldása és az azt követő 2. megjegyzés alapján az  $ABC$ , illetve az  $A_1B_1C_1$  háromszög  $S$ , illetve  $S_1$  súlypontja akkor és csak akkor közös, ha  $\vec{AA}_1 + \vec{BB}_1 + \vec{CC}_1 = \mathbf{0}$ .

Megjegyzés: Mivel a háromszögek csúcsainak jelölése tetszőleges, ezért ez az egyenlőség az alábbiak bármelyikével helyettesíthető:

$$\vec{AA}_1 + \vec{BC}_1 + \vec{CB}_1 = \mathbf{0}, \quad \vec{AC}_1 + \vec{BA}_1 + \vec{CB}_1 = \mathbf{0},$$

$$\vec{AB}_1 + \vec{BA}_1 + \vec{CC}_1 = \mathbf{0}, \quad \vec{AC}_1 + \vec{BB}_1 + \vec{CA}_1 = \mathbf{0}.$$

$$\vec{AB}_1 + \vec{BC}_1 + \vec{CB}_1 = \mathbf{0},$$

A 7. feladatból következik, hogy az előbbi vektorhármassok egy-egy háromszög oldalvektorai lehetnek, ezért három ilyen vektor komplanáris még akkor is, ha az  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  háromszögek síkjai különböznek.

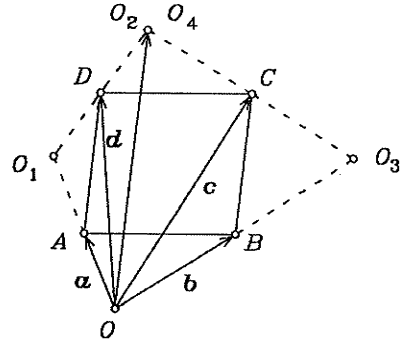
31. Legyen az  $ABCD$  tetraéder  $ABC$  lapjának súlypontja  $S_D$ , az  $O$  pedig a tér tetszőleges pontja. Az előző feladat szerint  $\vec{OS}_D = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$ . Ha  $S$  jelöli a  $DS_D$  szakasznak az  $S_D$  ponthoz közelebbi negyedelő pontját, akkor a 24. szerint (az  $m = 3$ ,  $n = 1$  esetre alkalmazva)  $\vec{OS} = \frac{1}{4}(\vec{OD} + 3\vec{OS}_D)$ .

Ezekből  $\vec{OS} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$  következik. Ha más lap súlypontjából indulunk ki, akkor is ugyanezt az eredményt kapjuk. Ezek szerint az  $S$  pont mind a négy súlyvonalon rajta van, és negyedeli azokat.

#### 4. Vektoralgebra

32. Legyen  $F_A$  az  $AA_1$ ,  $F_B$  a  $BB_1$ ,  $F_C$  a  $CC_1$  és  $F_D$  a  $DD_1$  szakasz felezőpontja. A 23. feladat alapján  $\overrightarrow{F_A F_D} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{A_1 D_1})$  és  $\overrightarrow{F_B F_C} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{B_1 C_1})$ . Mivel paralelogrammákról van szó, ezért  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$  és  $\overrightarrow{A_1 D_1} = \overrightarrow{B_1 C_1}$ . Ezekből  $\overrightarrow{F_A F_D} = \overrightarrow{F_B F_C}$  következik. Tehát az  $F_A F_B F_C F_D$  négyszög paralelogramma.

33. Legyen  $\overrightarrow{OA} = a$ ,  $\overrightarrow{OB} = b$ ,  $\overrightarrow{OC} = c$  és  $\overrightarrow{OD} = d$  (l. ábra). A tükrözés miatt egyrészt  $\overrightarrow{OO_1} = 2a$  és  $\overrightarrow{OO_2} = 2(d - a)$ , másrészt  $\overrightarrow{OO_3} = 2b$  és  $\overrightarrow{OO_4} = 2(c - b)$ . Mivel az  $ABCD$  négyszög paralelogramma, ezért  $d - a = c - b$ . Ebből  $\overrightarrow{OO_2} = \overrightarrow{OO_4}$  következik. Tehát  $O_2$  és  $O_4$  egybeesik.



34. I. A feltétel szükséges. Valóban, ha  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $D$  egy paralelogramma csúcsai, akkor az előbbi feladat szerint rendre  $O_2$  és  $O_4$  egybeesik.  
 II. A feltétel elegendő. Ha  $O_2$  és  $O_4$  egybeesik, akkor az ábra szerinti  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ ,  $O_4$  pontnégyes olyan, hogy az  $A$  az  $O_1O_2$ , a  $B$  az  $O_2O_3$ , a  $C$  az  $O_3O_4 = (O_3O_2)$  és  $D$  az  $O_2O_1 (= O_4O_1)$  szakasz felezőpontja. A 22. feladat megoldásához hasonló gondolatmenetet követve kapjuk, hogy az  $O_1O_2O_3O_4$  négyszög oldalfelező pontjai egy paralelogramma csúcsai.

35. I. Ha  $v$  és  $w$  kollineárisak, akkor a T 4.5 tétel alapján valamely  $k$  számra  $v = kw$ , azaz  $p_1a + p_2b + p_3c = kq_1a + kq_2b + kq_3c$ . Ebből a T 4.9 tétel alapján kapjuk, hogy  $p_1 = kq_1$ ,  $p_2 = kq_2$ ,  $p_3 = kq_3$ . Azaz  $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_3}{q_3}$ .

II. Ha pedig  $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_3}{q_3} (= k)$ , akkor a  $p_1 = kq_1$ ,  $p_2 = kq_2$ ,  $p_3 = kq_3$  értékekkel kapjuk, hogy

$v = p_1a + p_2b + p_3c = kq_1a + kq_2b + kq_3c = k(q_1a + q_2b + q_3c) = kw$ . Ez a T 4.5 tétel miatt azt jelenti, hogy  $v$  és  $w$  kollineárisak.

36. A T 4.5 tételt és a 35. feladatot alkalmazzuk.

a)  $\alpha = 6$ . b)  $\alpha = 0$ . c) Minden valós  $\alpha$ -ra kollineárisak.

d) Nincs olyan  $\alpha$ , amelyre kollineárisak.

e) Csak az  $\alpha = \frac{1}{9}$ ,  $\beta = \frac{1}{3}$  esetben kollineárisak.

f) Nincs olyan  $\alpha$  és  $\beta$ , amelyekre kollineárisak.

g) Csak az  $\alpha = \beta = 0$  esetben kollineárisak.

h) Akkor és csak akkor kollineárisak, ha  $1\alpha = \beta$ .

i) Akkor és csak akkor kollineárisak, ha  $\alpha\beta = 2$ .

j) Akkor és csak akkor kollineárisak, ha  $\beta = -3$ . Az  $\alpha$  bármilyen valós szám lehet.

37. A D 4.4 definíciót alkalmazzuk.

a) Az  $\{r, s, t\}$  vektorrendszer lineárisan függő, mert zérusvektort tartalmaz.

#### 4. Vektoralgebra

b) Az  $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\}$  vektorrendszer lineárisan függő, mert az  $\mathbf{s}$  vektor az  $\mathbf{r}$  vektornak számszorosa ( $-2$ -szerese).

c) Azt kell eldöntenünk, hogy  $k_1\mathbf{r} + k_2\mathbf{s} + k_3\mathbf{t} = \mathbf{0}$  teljesülhet-e úgy is, hogy a  $k_1, k_2, k_3$  számok között van zérustól különböző.

Az  $\mathbf{r}, \mathbf{s}$  és  $\mathbf{t}$  értékeit beírva az előbbi egyenletbe, majd rendezve:  $(k_1 + k_3)\mathbf{a} + (k_1 + k_2)\mathbf{b} + (k_1 + k_2 + k_3)\mathbf{c} = \mathbf{0}$ . Az  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$  vektorrendszer lineáris függetlensége miatt ez csak úgy állhat fenn, hogy

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 = 0, \\ k_1 + k_2 + k_3 = 0. \end{cases}$$

Ennek az egyenletrendszernek csak a  $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$  számhármassal a megoldása. Ezért az  $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\}$  vektorrendszer lineárisan független.

d) A  $k_1\mathbf{r} + k_2\mathbf{s} + k_3\mathbf{t} = \mathbf{0}$  egyenletből a c) részhez hasonlóan kapjuk, hogy  $(k_2 + k_3)\mathbf{a} - (k_2 + k_3)\mathbf{b} + (k_1 - k_2 + k_3)\mathbf{c} = \mathbf{0}$ , azaz

$$\begin{cases} k_2 + k_3 = 0, \\ k_2 + k_3 = 0, \\ k_1 - k_2 + k_3 = 0. \end{cases}$$

Ezekből  $k_1 = -2k_3$  és  $k_2 = -k_3$  következik. Ezért például a  $k_3 = 1, k_2 = -1, k_1 = 2$  értékekkel  $-2\mathbf{r} - \mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{0}$ . Tehát az  $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\}$  vektorrendszer lineárisan függő.

e) Lineárisan függő. f) Lineárisan független.

g) Lineárisan függő. h) Lineárisan függő.

$$\begin{aligned} 38. \quad \overrightarrow{AC} &= \mathbf{a} + \mathbf{b} = [9, 8, -5], & \overrightarrow{AC}_1 &= \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = [10, 12, -8], \\ \overrightarrow{AD}_1 &= \mathbf{b} + \mathbf{c} = [6, 10, -5], & \overrightarrow{AF} &= \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = [7, 7, -\frac{11}{2}], \\ \overrightarrow{AH} &= \frac{1}{4}(\mathbf{a} + 3\mathbf{b} + 3\mathbf{c}) = \frac{1}{2}[11, 16, -9], & \overrightarrow{AK} &= \mathbf{b} + \mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{a} = [8, 11, -\frac{13}{2}], \\ \overrightarrow{FH} &= \frac{1}{4}(-3\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = [-\frac{3}{2}, 1, 1], & \overrightarrow{HK} &= \frac{1}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = [\frac{5}{2}, 3, -2]. \end{aligned}$$

39. A 30., illetve a 31. feladat alapján

$$\overrightarrow{BS}_B = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{3}(\mathbf{b} + \mathbf{c} - 3\mathbf{a}) = \frac{1}{3}[-4, -6, 20],$$

$$\overrightarrow{BS} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{4}[-4, -6, 20].$$

40. a) Ha az  $\overrightarrow{AB}$  és  $\overrightarrow{BC}$  vektorok egyező irányúak, akkor az aránypárból  $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$  következik; ellentétes irány esetén pedig  $\overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ . Vegyük figyelembe, hogy  $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$  és  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ . Ezeket az előbbi egyenletekbe helyettesítve kapjuk, hogy az első esetben  $\mathbf{c} = \frac{5}{3}\mathbf{b} - \frac{2}{3}\mathbf{a} = \frac{1}{3}[-1, 17, 31]$ , a második esetben pedig  $\mathbf{c} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} = \frac{1}{3}[7, 13, 11]$ .

A b) és c) és d) feladatok megoldását az előbbihez hasonlóan végezzük.

b)  $\mathbf{c} = [1, \frac{3}{2}, 7]$  vagy  $\mathbf{c} = [3, \frac{5}{2}, 1]$ .

c)  $\mathbf{c} = \frac{1}{3}[3, 14, -1]$  vagy  $\mathbf{c} = \frac{1}{3}[-3, 10, 7]$ .

d) Ha  $\overrightarrow{AB}$  és  $\overrightarrow{BC}$  egyirányúak, akkor

#### 4. Vektoralgebra

$c = \frac{m+n}{m}b - \frac{n}{m}a = \frac{1}{m}[(m+n)b_1 - na_1, (m+n)b_2 - na_2, (m+n)b_3 - na_3]$ .  
Ha különböző irányúak, akkor

$c = \frac{m-n}{m}b + \frac{n}{m}a = \frac{1}{m}[(m-n)b_1 + na_1, (m-n)b_2 + na_2, (m-n)b_3 + na_3]$ .

41. A T 4.2 tétel alapján:  $a + b = 2d$ ,  $b + c = 2e$ ,  $a + c = 2f$ . Ezekből  
 $a = d - e + f = [5, 4, -6]$ ,  $b = d + e - f = [3, 2, 2]$  és  $c = -d + e + f = [1, 0, -8]$   
következik. A 30. megoldást alkalmazva

$$s = \frac{1}{3}(a + b + c) = \frac{1}{3}(d + e + f) = [3, 2, -6].$$

42. A 25. és 31. feladatok megoldása alapján:

$$\overrightarrow{AS} = \frac{3}{8}(s_1 + s_2 + s_3) = \frac{9}{4}[1, 1, 1], \quad \overrightarrow{AS}_4 = \frac{1}{2}(s_1 + s_2 + s_3) = [3, 3, 3],$$

$$\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}(s_1 + s_2 - s_3) = [6, 0, -3], \quad \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}(s_1 - s_2 + s_3) = [3, 3, 15],$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}(-s_1 + s_2 + s_3) = [0, 6, -3], \quad \overrightarrow{BC} = 3(s_3 - s_2) = [-3, 3, 18],$$

$$\overrightarrow{BD} = 3(s_3 - s_1) = [-6, 6, 0], \quad \overrightarrow{CD} = 3(s_2 - s_1) = [-3, 3, -18].$$

43. a) Az  $a$ ,  $b$  és  $c$  vektorok nem komplanárisak; ezért, a T 4.8 tétel alapján,  $v$  előállítható az  $a$ ,  $b$  és  $c$  lineáris kombinációjaként, és ez az előállítás egyértelmű. Az  $a = i + j$ ,  $b = i - j$ ,  $c = i + j - k$  egyenletrendszerből:

$i = \frac{1}{2}(a + b)$ ,  $j = \frac{1}{2}(a - b)$ ,  $k = a - c$ . Ezeket a  $v = 3i + 5j + 7k$  egyenletbe írva kapjuk, hogy  $v = 11a - b - 7c$ .

b) Az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  vektorhármassal komplanáris, és a  $v$  vektor nincs a síkjukban. Ezért a  $v$  nem fejezhető ki az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  vektorok lineáris kombinációjaként.

c) Az a) részhez hasonlóan járunk el.  $v = 2a + b - 3c$ .

44. Első megoldás. A T 4.6 tétel alapján  $c$ -nek

$$(1) \quad c = \alpha a + \beta b$$

alakú előállítása lehetséges és egyértelmű.

I. A feltétel szükséges. Tegyük fel, hogy a vektorok végpontjai egy egyenesen vannak.

(L. ábra!) Ekkor, valamely  $\lambda$  számmal  $\lambda(c - a) = b - c$ . Ebből

$$(2) \quad c = \frac{\lambda}{\lambda+1}a + \frac{1}{\lambda+1}b$$

következik, ha  $\lambda \neq -1$ . (A  $\lambda = -1$  esetben

$a = b$ , ami ellentmond feltevéseinknek.) A (2)-ből és (1)-ből a T 4.6 és T 4.9 tételek alapján  $\alpha = \frac{\lambda}{\lambda+1}$  és  $\beta = \frac{1}{\lambda+1}$  adódik. Tehát  $\alpha + \beta = 1$ .

II. A feltétel elegendő. Tegyük fel, hogy  $\alpha + \beta = 1$ . Ekkor (1) miatt

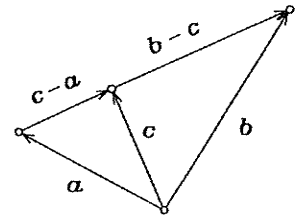
$c = \alpha a + (1 - \alpha)b$ . Ebből egyrészt  $c - a = (\alpha - 1)a + (1 - \alpha)b$ , másrészt  $b - c = -\alpha a + \alpha b$  következik. E két utóbbiból  $\alpha \neq 0$  esetén  $c - a = \frac{1-\alpha}{\alpha}(b - c)$

adódik, az  $\alpha = 0$  esetben pedig  $b - c = 0$ . Tehát (mindkét esetben)  $c - a$  és  $b - c$  kollineáris vektorok. Ezért  $a$ ,  $b$  és  $c$  végpontjai egy egyenesen vannak.

Második megoldás. Az (1) egyenlőség mindkét oldalából vonjuk ki az  $a$  vektort, majd az így kapott kifejezést alakítsuk át:  $c - a = \beta(b - a) + (\alpha + \beta - 1)a$ .

Az  $a$  és  $b$  vektorok végpontjaira illeszkedő egyenes tartalmazza a  $b - a$  vektort. Ahhoz, hogy tartalmazza a  $c - a$  vektort is, szükséges és elégséges, hogy  $\alpha + \beta - 1 = 0$  teljesüljön.

45. A feladatbeli vektoregyenlet alapján:  $d - a = \beta(b - a) + \gamma(c - a) +$



#### 4. Vektoralgebra

$+(\alpha + \beta + \gamma - 1)\mathbf{a}$ . A továbbiakban az előző feladat második megoldásához hasonló gondolatmenetet követünk.

46. Akkor és csakis akkor, ha  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ .

47. Az  $ABC$  háromszögben legyen  $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$  és  $\overrightarrow{BA} = \mathbf{c}$  (1. ábra). Messe a  $B$ -ből induló szögfelező az  $AC$  oldalt a  $D$  pontban. Az előző feladat megoldása alapján a  $\overrightarrow{BD}$  szögfelező vektorral egyező irányú az  $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|}$  vektor. Ezért valamely  $\lambda$ -val

$$(1) \quad \overrightarrow{BD} = \lambda \left( \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} \right).$$

Másrészt,

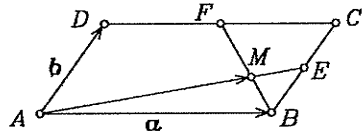
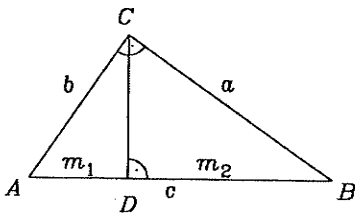
$$(2) \quad \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \mathbf{c} + \frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AC}|}(\mathbf{a} - \mathbf{c}) = \frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AC}|}\mathbf{a} + \left(1 - \frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\mathbf{c}.$$

Mivel  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{c}$  nem kollineáris, ezért (1), (2) és a T 4.9 tétel alapján  $\frac{\lambda}{|\mathbf{a}|} = \frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AC}|}$

és  $\frac{\lambda}{|\mathbf{c}|} = 1 - \frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AC}|}$ . Ezek hányadosát véve kapjuk, hogy  $\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{c}|} = \frac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AD}|}$ .

48. Az előző feladat szerint  $|\overrightarrow{CD}| : |\overrightarrow{AD}| = |\mathbf{a}| : |\mathbf{c}|$ . Alkalmazva a 24. feladatot az  $m = |\mathbf{a}|$ ,  $n = |\mathbf{c}|$  esetre:  $\overrightarrow{BD} = \frac{|\mathbf{c}|}{|\mathbf{a}| + |\mathbf{c}|}\mathbf{a} + \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{a}| + |\mathbf{c}|}\mathbf{c}$ .

49. Ismeretes, hogy minden derékszögű háromszögben, az ábra jelölései szerint  $a^2 = m_2c$  és  $b^2 = m_1c$ . Ezekből  $m_1 : m_2 = b^2 : a^2$  következik. Alkalmazva a 24. feladatot az  $m = b^2$ ,  $n = a^2$  esetre:  $\overrightarrow{CD} = \frac{b^2}{c^2}\overrightarrow{CB} + \frac{a^2}{c^2}\overrightarrow{CA}$ .



50. Legyen  $k_1$  és  $k_2$  az a két szám, amelyekre

$$(1) \quad \overrightarrow{AM} = k_1\overrightarrow{AE}, \text{ illetve } \overrightarrow{BM} = k_2\overrightarrow{BF}.$$

Erre a két számra az  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ ,  $\overrightarrow{AE} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$  és  $\overrightarrow{BF} = \mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a}$  egyenlőségek alapján  $(k_1 + \frac{k_2}{2} - 1)\mathbf{a} + (\frac{k_1}{2} - k_2)\mathbf{b} = \mathbf{0}$  adódik. Mivel  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  lineárisan függetlenek, ezért  $k_1 + \frac{k_2}{2} - 1 = 0$  és  $\frac{k_1}{2} - k_2 = 0$ , és ebből az egyenletrendszerből  $k_1 = \frac{4}{5}$ . Az (1)-be helyettesítve:  $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AE} = \frac{4}{5}\mathbf{a} + \frac{2}{5}\mathbf{b}$ .

#### 4. Vektoralgebra

51. A **D 4.13** definíciót alkalmazzuk.

a) 6.    b) 9.    c) 16.

d) Mivel a skaláris szorzás kommutatív és a vektorösszeadásra nézve disztributív,  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}^2 = 9 + 2 \cdot 6 + 16 = 37$ .

e) 13.    f) -13.    g) 217.

52. a) -62.    b) 34.    c) 997.

53. Vegyük figyelembe, hogy  $(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)^2 = 0$  és  $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1$ .  
 $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = -\frac{3}{2}$ .

54.  $\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{c} + \mathbf{b}\mathbf{c} = -13$ .

55.  $|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}| = \sqrt{(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2} = 10$ .

56. A bal oldalon végezzük el a négyzetre emelést, majd vonjunk össze. Geometriai jelentés: a paralelogramma átlóinak négyzetösszege az oldalak négyzetösszegével egyenlő.

57. Az állítás helyessége a **D 4.13** definícióból következik. Az  $\mathbf{a}\mathbf{b} = -|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$  (illetve, az  $\mathbf{a}\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ ) egyenlőség akkor teljesül, ha  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  ellentétes (ill. egyező) irányúak.

58. A **T 4.16** tétel alapján pontosan akkor, ha  $\mathbf{a}^2 - \alpha^2\mathbf{b}^2 = 0$ ; így  $\alpha = \frac{\pm|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}$ .

59. Skalárisan megszorozva mindkét oldalt az  $\mathbf{a}$  vektorral, majd egyszerűsítve az  $\mathbf{a}^2 (\neq 0)$  számmal, a **T 4.16** tétel alapján az állítás helyessége adódik.

60. Az előző feladat megoldásához hasonlóan járunk el.

61. A **T 4.16** tétel alapján  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ .

62. Legyen a két vektor szöge  $\alpha$ . A **D 4.13** definíció alapján

$$\cos \alpha = \frac{(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b})}{|\mathbf{a} + \mathbf{b}||\mathbf{a} - \mathbf{b}|}.$$

A nevező kiszámításához az  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = (|\mathbf{a} + \mathbf{b}||\mathbf{a} - \mathbf{b}|)^2$  összefüggést vegyük figyelembe.  $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$ .

63. a) Négyzetre emelve mindkét oldalt,  $\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}^2 = \mathbf{a}^2$ ; így  $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\frac{|\mathbf{b}|}{2|\mathbf{a}|}$ .

b)  $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ .

64. Az  $(\mathbf{a} + 3\mathbf{b})(7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}) = 0$  és  $(\mathbf{a} - 4\mathbf{b})(7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = 0$  egyenletekből

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = \frac{1}{16}(15\mathbf{b}^2 - 7\mathbf{a}^2) \text{ és } \mathbf{a}\mathbf{b} = \frac{1}{30}(7\mathbf{a}^2 + 8\mathbf{b}^2).$$

Ebből az egyenletrendszerből  $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2$ , majd ezt felhasználva  $\mathbf{a}\mathbf{b} = \frac{1}{2}\mathbf{a}^2$  és  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$  következik. Ha  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$ , akkor szögük tetszőleges lehet, ha pedig  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ , akkor  $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2}$ .

65. A **D 4.13** definíciót és a **T 4.16** tételt alkalmazva  $t = 40$  adódik.

66. A **T 4.17** tétel és feltevésünk alapján

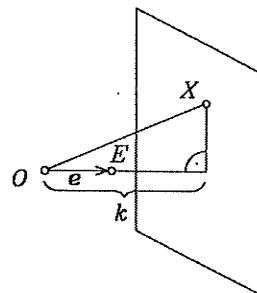
$$\left| \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \mathbf{a} \right| = \left| \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \mathbf{b} \right| \quad (\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}).$$

Ez  $\mathbf{b}\mathbf{a} = \mathbf{a}\mathbf{b}$  miatt ekvivalens azzal, hogy  $|\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|$ , vagy  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  merőlegesek egymásra.



#### 4. Vektoralgebra

67. A T 4.17 tétel alapján ezek az  $X$  pontok annak a síknak a pontjai, amely merőleges az  $e$  vektorra és az  $O$  ponttól  $k$  távolságra halad, mégpedig úgy, hogy metszi az  $O$ -ból induló és  $E$ -n átmenő félegyenest. (Más ilyen tulajdonságú pont nincs (L. ábra).)



68. A D 4.13 definíciót és a T 4.14, T 4.15 tételeket alkalmazzuk.

a)  $\frac{7}{3\sqrt{19}}$ .    b)  $-\frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{38}}$ .    c) 0.

69. A T 4.14 és a T 4.16 tételeket alkalmazzuk.  
 $z = -18$ .

70. a) Az  $\frac{ab}{|a||b|} = \cos \alpha$  képletbe helyettesítve:  $\frac{2t}{\sqrt{t^2 + 2\sqrt{6}}} = \frac{1}{2}$  egyenlethez jutunk; ebből  $t = \sqrt{\frac{6}{5}}$ .

b)  $t = 0$ .    c) Nincs ilyen  $t$ .

71. Mivel  $a$  és  $x$  kollineáris, ezért valamely valós  $t$ -re  $x = [2t, t, -t]$ . Az  $ax = 3$  egyenletből  $t = \frac{1}{2}$ , ezért  $x = [1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$ .

72. Legyen  $e = [e_1, e_2, e_3]$ ; ekkor  $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$ . A D 4.13, T 4.14 és T 4.15 alkalmazásával, az  $ae$  és  $be$  szorzatokból két újabb egyenletet kapunk az  $e_1, e_2, e_3$  ismeretlenekre:  $e_1 - e_3 = 1$  és  $e_1 + e_2 - e_3 = 1$ . Két ilyen egységvektor van:  $[1, 0, 0]$  és  $[0, 0, -1]$ .

73. Jelöljük a két meghatározandó vektort  $a_p$ -vel, illetve  $a_m$ -mel, és alkalmazzuk a T 4.17 tételt!

$$a_p = \left| \frac{b}{|b|} a \right| \cdot \frac{b}{|b|} = [2, -1, 2], \quad a_m = a - a_p = [1, 3, 1].$$

74.  $ac = 0$ . A vetületvektorok összege:  $\frac{5}{9}[1, 2, 2]$ .

75. a) Téglalap két szomszédos oldalvektora.

b) Rombusz két szomszédos oldalvektora.

c) Egyiknek sem lehet két szomszédos oldalvektora.

76.  $x = [-4, 2, -4]$ .    77.  $x = [0, \sqrt{2}, \sqrt{2}]$ .    78.  $x = [-3, 3, 3]$ .

79. Legyen  $x = [x_1, x_2, x_3]$ . Az  $x$  egységvektor, ezért

$$(1) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

A feltevés miatt  $(a, x)_\perp = (b, x)_\perp = (c, x)_\perp = \alpha$ , ezért

$$\cos \alpha = \frac{ax}{|a|} = \frac{bx}{|b|} = \frac{cx}{|c|}.$$

Ezekből az

$$(2) \quad 7x_1 - x_2 = 3x_1 - 4x_2 + 5x_3,$$

$$(3) \quad 7x_1 - x_2 = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

egyenleteket kapjuk. Az (1), (2), (3) egyenletrendszer megoldásával adódik, hogy két ilyen egységvektor van:  $\frac{1}{5\sqrt{3}}[7, -1, 5]$  és  $-\frac{1}{5\sqrt{3}}[7, -1, 5]$ .

A szögek koszinuszai:  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  és  $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ .

#### 4. Vektoralgebra

80. Az

$$\left| \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \mathbf{v} \right| = 1, \quad \left| \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \mathbf{v} \right| = \sqrt{2}$$

egyenletrendszerből a  $\mathbf{v}$  vektorra a következő megoldásokat kapjuk  
 $[3, -1], [-3, 1], [13, -11], [-13, 11]$ .

81. Az előző feladat megoldásához hasonlóan, a  $\mathbf{v}$  vektorra a következő nyolc megoldást kapjuk:  $[\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2], [-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -2], [\frac{9}{2}, -\frac{5}{2}, -4], [-\frac{9}{2}, \frac{5}{2}, 4], [-6, -2, 7], [6, 2, -7], [3, 5, -1], [-3, -5, 1]$ .

82. Négy ilyen  $\mathbf{e}$  vektor van:  $[0, 1, 0], [\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}], [0, -1, 0], [-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}]$ .

83. Két ilyen vektor van:  $[3, 1, 0]$  és  $[-3, -1, 0]$ .

84. Az  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  és  $\overrightarrow{AD}$  vektorok lineáris kombinációjaként állítsuk elő a másik három élvektort:  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ . Ezeket a feladatbeli kifejezés jobb oldalába helyettesítve, majd elvégezve a szorzást és az összevonást,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  adódik.

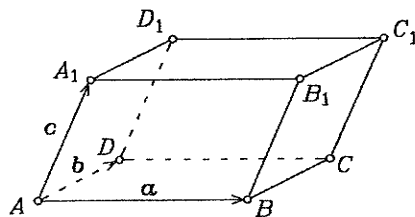
85. Ha pl. az  $AB$  és  $CD$ , illetve az  $AD$  és  $BC$  merőleges élpárok, akkor  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$  és  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ . Ekkor az előző feladat alapján  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$ , azaz  $\overrightarrow{AC}$  és  $\overrightarrow{DB}$  is merőleges élpár.

86. Az  $O$  középpontú kör egy átmérőjének végpontjai  $A$  és  $B$ . Legyen  $P$  a kör ( $A$ -tól és  $B$ -tól különböző) tetszőleges pontja. Ha  $\overrightarrow{OB} = \mathbf{a}$  és  $\overrightarrow{OP} = \mathbf{b}$ , akkor  $\overrightarrow{PB} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$  és  $\overrightarrow{AP} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ . Mivel  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ , ezért  $(\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 = 0$ .

87. Használjuk az ábra jelöléseit. A négy

testátló-vektor:  $\overrightarrow{AC}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ ,  
 $\overrightarrow{BD}_1 = \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a}, \overrightarrow{CA}_1 = \mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b}$ ,  
 $\overrightarrow{DB}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b}$ . Ezekből:  
 $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2 + (\mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a})^2 + (\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b})^2 = 4(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2)$ .

88. A T 4.8 tétel szerint a  $\mathbf{v}$  vektor előállítható valamely  $k_1, k_2, k_3$  számokkal  $\mathbf{v} = k_1 \mathbf{a} + k_2 \mathbf{b} + k_3 \mathbf{c}$  alakban. Az egyenlet mindkét oldalát (skalárisan) megszorozva  $\mathbf{v}$ -vel, majd figyelembe véve a feltételekből következő  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{v} = 0$  egyenlőségeket,  $\mathbf{v}^2 = 0$  adódik, ami csak úgy teljesülhet, hogy  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .



89. Jelölje  $O$  az  $ABCD$  tetraéder köré írt gömb középpontját,  $r$  a gömb sugarát; továbbá legyen  $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}, \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$  és  $\overrightarrow{OD} = \mathbf{d}$ . Nyilvánvaló, hogy  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = |\mathbf{d}| = r$ .

I. „csak akkor”: Tegyük fel, hogy a tetraéder magasságvonalai egy közös  $M$  ponton haladnak át. Kimutatjuk, hogy a szemközti élvektorok merőlegesek egymásra. Az  $M$  magasságpont rajta van mind a négy magasságvonalon, ezért

#### 4. Vektoralgebra

$$(1) \quad \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{CB} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{CB},$$

$$(2) \quad \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AC} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{AC},$$

$$(3) \quad \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{DC} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{DC}.$$

Az  $\overrightarrow{OM}$  vektort  $\mathbf{m}$ -mel jelölve, az (1) összefüggésekből következik, hogy

$$(4) \quad (\mathbf{m} - \mathbf{a})(\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0 \quad \text{és} \quad (\mathbf{m} - \mathbf{d})(\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0.$$

II. „akkor”: Kimutatjuk, hogy ha a szemközti élvektorok merőlegesek egymásra, akkor a magasságvonalak egy közös  $M$  ponton haladnak át, melyre

$$\mathbf{m} = \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}).$$

Ehhez azt kell belátni, hogy az  $\overrightarrow{AM}$ ,  $\overrightarrow{BM}$ ,  $\overrightarrow{CM}$ , illetve a  $\overrightarrow{DM}$  vektor merőleges rendre a  $BCD$ ,  $ACD$ ,  $ABD$ , illetve az  $ABC$  síkra. Az  $\overrightarrow{AM} = \mathbf{m} - \mathbf{a}$  vektor merőleges a  $BCD$  síkra, ha merőleges annak két, nem párhuzamos vektorára. Ez teljesül, mert a  $\overrightarrow{CB} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$  és  $\overrightarrow{DB} = \mathbf{b} - \mathbf{d}$  vektorra

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CB} = (\mathbf{m} - \mathbf{a})(\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \frac{1}{2} [\mathbf{b}^2 - \mathbf{c}^2 + (\mathbf{d} - \mathbf{a})(\mathbf{b} - \mathbf{c})] = 0 \quad \text{és}$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DB} = (\mathbf{m} - \mathbf{a})(\mathbf{b} - \mathbf{d}) = \frac{1}{2} [\mathbf{b}^2 - \mathbf{d}^2 + (\mathbf{b} - \mathbf{d})(\mathbf{a} - \mathbf{c})] = 0,$$

hiszen  $|\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = |\mathbf{d}|$  és  $\overrightarrow{AD} = (\mathbf{d} - \mathbf{a}) \perp (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \overrightarrow{CB}$ , illetve  $\overrightarrow{CA} = (\mathbf{a} - \mathbf{c}) \perp (\mathbf{b} - \mathbf{d}) = \overrightarrow{DB}$ . Ezekből következik, hogy az  $M$  pont rajta van az  $A$  csúcshoz tartozó magasságvonalon. Ugyanígy igazolható, hogy az  $M$  pont illeszkedik a másik három magasságvonalra is.

Megjegyzés: A 31. feladat szerint, az  $O$  pontból a tetraéder  $S$  súlypontjába mutató vektor  $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d})$ . Másrészt az előbb beláttuk, hogy ha az

$M$  magasságpont létezik, akkor  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d})$ . Ezért igaz a következő: Ha egy tetraédernek létezik magasságpontja, akkor a tetraéder köré írt gömb  $O$  középpontja, valamint a tetraéder  $S$  súlypontja és  $M$  magasságpontja egy egyenesen van, és az  $OM$  szakasz felezőpontja az  $S$  pont.

90. 
$$\begin{array}{c|cccc} \times & 0 & i & j & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & k-j & \\ j & 0-k & 0 & i & \\ 0 & 0 & j-i & 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} i \times j = k, j \times k = i, k \times i = j, \text{ ami könnyen megjegyezhető,} \\ \text{mert mindhárom egyenlőségben ciklikusan egymás után sze-} \\ \text{repelnek az } i, j, k \text{ vektorok. A fordított sorrendű szorzatok:} \\ j \times i = -k, k \times j = -i, i \times k = -j. \end{array}$$

91. A D 4.18 definíció és a T 4.23 tétel alapján:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } -2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}). & \text{b) } -3(\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \\ \text{c) } 6(\mathbf{a} \times \mathbf{b}). & \text{d) } 2(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + 2(\mathbf{b} \times \mathbf{c}). \\ \text{e) } 0. & \text{f) } 16(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - 10(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + 4(\mathbf{b} \times \mathbf{c}). \end{array}$$

92. Az  $i, j, k$  alapvektorok definíciója, ill. a D 4.12 és D 4.18 definíciók alapján:

$$\text{a) } 1. \quad \text{b) } 36. \quad \text{c) } 49.$$

93. A T 4.23 tétel alapján:  $(2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \times (4\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = -16(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ , ezért  $T' = 16|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 16T$ .

94. A T 4.23 tétel alapján  $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$  felírható  $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = 0$  alakban is, ami nemcsak az  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  esetben teljesül (hanem minden olyan  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ -re, amelyre

#### 4. Vektoralgebra

- $a - b = kc$ , így a felírt egyenlőségből általában nem következik hogy  $a = b$ .
95. A feltevésből  $c = -(a + b)$  következik. Ezt helyettesítsük a  $b \times c$  és  $c \times a$  kifejezésekbe. A T 4.23 és T 4.20 tételt alkalmazva kapjuk, hogy  $b \times c = a \times b$  és  $c \times a = a \times b$ .
96. A T 4.20 tétel alapján a  $v \times a = 0$  és  $v \times b = 0$  feltevésekből következik, hogy  $v$  az  $a$ -val is és a  $b$ -vel is egyező állású. Ebből viszont  $v \neq 0$  esetén az adódik, hogy  $a$  és  $b$  kollineárisak. Ez ellentmond feltevéstünknek.
97. A T 4.23 tételből és az  $a \times b = b \times c$ , illetve  $b \times b = 0$  egyenlőségekből  $0 = (a \times b) - (b \times c) = (a + c) \times b = (a + b + c) \times b$  következik. Az előbbihez hasonlóan,  $a \times c = c \times a$ , illetve  $a \times a = 0$  egyenlőségből  $(a + b + c) \times c = 0$ , illetve  $(a + b + c) \times a = 0$  adódik. Az előbbi feladat szerint ezek egyidejűleg csak akkor állhatnak fenn, ha  $a + b + c = 0$ .
98. Az első egyenletből kivonva a másodikat, majd zérusra redukálva a kapott egyenleteket, a T 4.23 tétel alapján  $(a - d) \times (b - c) = 0$  adódik. A T 4.20 tétel alapján ez azt jelenti, hogy  $a - d$  és  $b - c$  egyállásúak.
99. Figyelembe véve a T 4.23 tételt és azt, hogy  $b \times b = 0$ , az  $(a \times b) + (c \times a) = (a \times b) - (a \times c) = a \times (b - c)$  és  $a \times b + c = (b \times c) - (b \times b) = b \times (c - b) = -b \times (b - c)$  átalakítás után kapjuk, hogy  $(a - b) \times (b - c) = 0$ . Mivel a három vektor kezdőpontja közös, ezért ez utóbbi egyenletből, a T 4.20 tétel alapján, következik, hogy a vektorok végpontjai egy egyenesen vannak.
100. A D 4.18 definíció szerint az  $a$  és  $b$  vektor az  $a \times b$  vektorra, a  $c$  és  $d$  vektor pedig a  $c \times d$  vektorra merőleges. Mivel  $a \times b$  és  $c \times d$  kollineárisak, ezért az  $a, b, c, d$  vektorok mindegyike merőleges az  $a \times b$  vektorra. Tehát komplanárisak.
101. A szögletes zárójeles kifejezésnél kezdve, kétszer alkalmazzuk a kifejtési tételt (T 4.22). A szorzat értéke:  $|a|^4 b$ .
102. a) A három darab hármas vektori szorzatra alkalmazzuk a T 4.22 tételt, és vegyük figyelembe a skaláris szorzás kommutativitását.  
b) A T 4.22 és T 4.23 tételeket alkalmazzuk.
103. T 4.22 tétel szerint  $a \times (b \times c) = (ac)b - (ab)c$ . Ugyanakkor  $a(b - c) = 0$ , azaz  $ab = ac$ . Mivel  $a$  nem merőleges  $b$ -re, ezért  $ab (= ac) \neq 0$ . Legyen  $ab = k (\neq 0)$ . Ekkor  $a \times (b \times c) = k(b - c)$ . Ez azt jelenti, hogy  $a \times (b \times c)$  és  $b - c$  egyállásúak.
104. Mivel  $a$  merőleges  $b$ -re és  $|a| = |b| (= 7)$ , ezért  $a$  és  $b$  lehet egy kocka két élvektora. A harmadik élvektor  $a \times b$ -vel párhuzamos és hossza  $|a| = 7$ . A T 4.21 tétel szerint

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 2 & -3 \\ -3 & 6 & -2 \end{vmatrix} = [14, 21, 42] = 7 \cdot [2, 3, 6].$$

Két vektor elégíti ki a feladat feltételeit:  $[2, 3, 6]$  és  $[-2, -3, -6]$ .

105. Legyen  $\alpha$  az  $\overrightarrow{AB}$  és  $\overrightarrow{AC}$  vektorok szöge. A koszinusztétel alapján  $\cos \alpha = \frac{7}{8}$ , s így  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{8}$ . Tehát  $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 8 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{15}}{8} = 6 \cdot \sqrt{15}$ .

4. Vektoralgebra

$$106. m_a = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{11}{5}\sqrt{2}.$$

107. Ha felbontjuk az  $a$  vektort egy  $e$ -vel párhuzamos  $a_p$  és egy  $e$ -re merőleges  $a_m$  vektor összegére, akkor  $|a_m| = |a| \sin(e, a) = |e \times a|$ . Mivel  $e \times a$  merőleges  $e$  és a síkjára,  $(e \times a) \times e$  az  $e$  és  $a$  síkjában van és  $|(e \times a) \times e| = |a| \sin(e, a)$ , ezért  $a_m = (e \times a) \times e$ . Ez egyébként bizonyítható a 73. feladat és a kifejtési tétel segítségével is:  $a_m = a - (ea)e$  és  $(e \times a) \times e = -(a \times e) \times e = e \times (a \times e) = (ee)a - (ea)e = a - (ea)e$ , tehát  $a_m = (e \times a) \times e$ . A 73. feladat számadataival:

$$a_m = \left( \frac{b}{|b|} \times a \right) \times \frac{b}{|b|} = \frac{1}{|b|^2} (b \times a) \times b = [1, 3, 1]$$

és

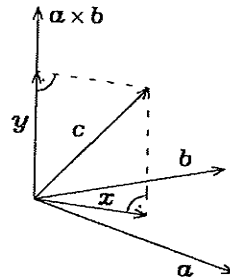
$$a_p = a - a_m = [2, -1, 1].$$

108. Legyen  $x$  az  $a, b$  vektorok síkjában lévő,  $y$  pedig erre a síkra merőleges összetevő. (L. ábra.) Az  $a \times b$  vektorral egyező állású egyik egységvektor:

$$e = \frac{a \times b}{|a \times b|} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1, -1, 1].$$

A T 4.15 tétel és a D 4.18 definíció alapján a síkra merőleges összetevő:  $y = (e \cdot c)e = \frac{1}{3}[1, -1, 1]$ . A síkban lévő összetevő:

$$x = c - y = \frac{1}{3}[2, 7, 5].$$

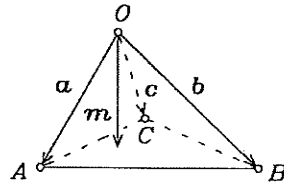


109. A T 4.19 szerint  $|a \times b| = 3\sqrt{6}$ . Ennek megoldásai:  $t = 0$  és  $t = -3$ .

110. A négyzet terület  $\frac{47}{2}$  egység.

111. Állítsuk elő a  $v$  vektort  $a$  és  $b$  lineáris kombinációjaként. A  $v = k_1 a + k_2 b$  előállításban a T 4.9 tétel alapján:  $k_1 = 2, k_2 = 3$ . A terület  $|2a \times 3b| = 6|a \times b| = 18$  egység.

112. Az  $m$  magasságvektor az ábra szerinti  $d = (a - c) \times (b - c)$  vektorral egyező állású. A  $d$ -vel (tehát  $m$ -mel is) egyező állású (egyik) egységvektor:  $d/|d| = \frac{1}{\sqrt{3}}[1, 1, 1]$ . A magasság:  $|m| = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .



113. Az  $|a \times b| = ab$  feltétel ekvivalens azzal, hogy a két vektor szöge  $45^\circ$ .

114. a)  $ab(c + \lambda a + \mu b) = (a \times b)(c + \lambda a + \mu b) = abc$ .

$$b) \frac{a + b}{2} \times \frac{b + c}{2} + \frac{a}{2} = \frac{1}{8}((a + b) \times (b + c))(c + a) = \frac{1}{4}abc.$$

115.  $((2a + 3b) \times (3b - 4c))(2a + 5c) = 6abc$ . Mivel  $a, b, c$  nem komplanárisak, ezért a T 4.25 tétel szerint az adott vektorok sem komplanárisak.

116. Az egyenlet mindkét oldalát skalárisan  $c$ -vel szorozva  $(b \times c)c = (c \times a)c = 0$  miatt  $(a \times b)c = 0$  adódik. A T 4.25 tétel alapján ez azt jelenti, hogy  $a, b, c$  komplanárisak.

4. Vektoralgebra

117. Az állítás helyessége a vektori, illetve a skaláris szorzat definíciója alapján belátható. Egyenlőség pontosan akkor van, ha  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  páronként merőlegesek.

118.  $(\mathbf{r} \times \mathbf{s})\mathbf{t} = 27\mathbf{abc}$ . Ezért  $V' = 27V$ .

119. A T 4.27 tétel alapján a vegyes szorzat

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ \alpha & 2 & -1 \end{vmatrix} = -7\alpha - 13.$$

A T 4.25 tétel szerint a térfogat:  $|\mathbf{abc}| = |-7\alpha - 13| = 10$ . Ebből  $\alpha$  lehetséges értékei:  $-\frac{23}{7}$  és  $-\frac{3}{7}$ .

120. Az  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$  vektorrendszer akkor és csak akkor lineárisan függő, ha  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  komplanárisak. (L. T 4.10 és T 4.7) Ennek megfelelően a T 4.25 és T 4.27 tételt alkalmazzuk.

a) Mivel az  $\mathbf{abc}$  vegyes szorzat csak az  $\alpha = -\frac{7}{4}$  értéknél zérus, ezért az  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$  vektorrendszer lineárisan függő, ha  $\alpha = -\frac{7}{4}$ .

b) Minden  $\alpha$  számra lineárisan függő, mert  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ .

c) Minden  $\alpha$ -ra lineárisan független.

d) Minden  $\alpha$ -ra lineárisan független.

e) Minden  $\alpha$ -ra lineárisan függő.

f) Ha  $\alpha$  értéke 3, vagy  $-3$ , akkor lineárisan függő a vektorrendszer. Minden más esetben lineárisan független.

121. A 117. feladat vagy a T 4.27 tétel szerint:  $\mathbf{abc} = 24$ .

122. Az  $A$  csúsból kiinduló három él:  $\vec{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\vec{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ ,  $\vec{AD} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ . A térfogat:  $V = \frac{1}{6} |\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD}| = 8$ .

123. Mivel  $\vec{AD}$  és  $\mathbf{d}$  egyállású vektorok, ezért valamely  $k$  számmal  $\vec{AD} = k\mathbf{d} = [-k, 2k, k]$  teljesül. Az  $\frac{1}{6} |\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD}| = 8$  egyenletből  $|12k| = 48$  következik. A feltételt két vektor elégíti ki:  $[-4, 8, 4]$  és  $[4, -8, -4]$ .

124. A feltételt két vektor elégíti ki:  $[3, 1, -2]$  és  $[-3, -1, 2]$ . A magasság  $\frac{4}{\sqrt{14}}$ .

125.  $\mathbf{uvw} = [(u_1\mathbf{a} + u_2\mathbf{b} + u_3\mathbf{c}) \times (v_1\mathbf{a} + v_2\mathbf{b} + v_3\mathbf{c})](w_1\mathbf{a} + w_2\mathbf{b} + w_3\mathbf{c}) =$   
 $= \mathbf{abc} \cdot [u_1(v_2w_3 - v_3w_2) - u_2(v_1w_3 - v_3w_1) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1)]$

126. Az előző feladat szerint

$$\mathbf{abc} = \mathbf{uvw} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{uvw} = \mathbf{abc} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Szorozzuk össze ezt a két egyenletet, majd osszuk az így nyert egyenlet mindkét oldalát  $(\mathbf{abc})(\mathbf{uvw})$ -vel. (Ezt megtehetjük, mert mind a két vektorrendszer lineárisan független, így az  $\mathbf{abc}$  és  $\mathbf{uvw}$  vegyes szorzatok egyike sem nulla.) Osztás után a bizonyítandó egyenlőséget kapjuk.

## 5. Analitikus térgeometria (megoldások)

1. Alkalmazzuk a T 5.3 tételt:

$$\vec{AB} = [2-1, -3+2, 0+3] = [1, -1, 3], \quad \vec{AC} = [2, 3, -6], \quad \vec{AD} = [-2, 3, -9].$$

2. A  $P$  pontnak az origótól mért távolsága az  $\vec{OP}$  helyvektor hosszával egyenlő.

$$|\vec{OA}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = 6, \quad |\vec{OB}| = 14, \quad |\vec{OC}| = 13, \quad |\vec{OD}| = \sqrt{195}.$$

3.  $|\vec{AB}| = \sqrt{22}$ ;  $|\vec{AC}| = \sqrt{54}$ ;  $|\vec{BC}| = 6$ . Az  $ABC$  háromszög nem egyenlő szárú.

$$|\vec{DE}| = \sqrt{18}; \quad |\vec{DF}| = \sqrt{46}; \quad |\vec{EF}| = \sqrt{46}. \quad \text{A } DEF \text{ háromszög egyenlő szárú.}$$

$$|\vec{GH}| = |\vec{GK}| = |\vec{HK}| = \sqrt{2}. \quad \text{A } GHK \text{ háromszög egyenlő oldalú.}$$

4. Legyen az  $x$  tengely keresett pontja  $P(x, 0, 0)$ . Ekkor  $|\vec{AP}| = \sqrt{(x+3)^2 + 16 + 64} = 12$ . Az egyenlet gyökei:  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = -11$ . Két pont elégíti ki a feladat feltételeit:  $P_1(5, 0, 0)$ ,  $P_2(-11, 0, 0)$ .

5. A  $z$  tengely egy pontja:  $P(0, 0, z)$ . Az  $|\vec{AP}| = |\vec{BP}|$  egyenlőségből  $\sqrt{1+9+(z-7)^2} = \sqrt{25+49+(z+5)^2}$  következik. Innen  $z = -\frac{5}{3}$ . A keresett pont:  $P(0, 0, -\frac{5}{3})$ .

6.  $\vec{AB} = [-4, 8, -8]$ ;  $\vec{AC} = [0, 2, 2]$ ;  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ . Az  $\vec{AB}$  és  $\vec{AC}$  vektor merőleges egymásra, tehát a három pont lehet egy téglalap három csúcsa.

7. A háromszög szögeit a szokásos módon jelölve

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}, \quad \cos \beta = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|}, \quad \cos \gamma = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}|}.$$

$$\vec{AB} = [-4, 8, -8] = -\vec{BA}, \quad \vec{AC} = [-1, 2, -6] = -\vec{CA},$$

$$\vec{BC} = [3, -6, 2] = -\vec{CB}. \quad \text{Mivel } \vec{CA} \cdot \vec{CB} < 0, \text{ ezért } \gamma \text{ tompaszög.}$$

8. a) A háromszög területe:

$$t = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2}, \quad \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 8 & -8 \\ -1 & 2 & -6 \end{vmatrix} = [3, 2, 8], \quad t = \frac{\sqrt{77}}{2}.$$

$$\text{Az } AB \text{ oldalhoz tartozó magasság: } m_{AB} = \frac{2t}{|\vec{AB}|} = \sqrt{\frac{77}{21}} = \sqrt{\frac{11}{3}}.$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{7}{\sqrt{21} \cdot 6} = \sqrt{\frac{7}{18}}. \quad \sin^2 \alpha = 1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}. \quad \text{tg } \alpha = \sqrt{\frac{11}{7}}.$$

Megjegyzés: Mivel a feladat egyik kérdése miatt  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  és  $|\vec{AB}|$ ,  $|\vec{AC}|$  is kiszámolandó, kevesebb számolással jár a következő:

### 5. Analitikus térgeometria

$$t = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}; \quad \vec{AB}^2 = |\vec{AB}|^2 = 21, \\ \vec{AC}^2 = |\vec{AC}|^2 = 6, \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 7 \text{ miatt } t = \frac{1}{2}\sqrt{21 \cdot 6 - 7^2} = \frac{1}{2}\sqrt{77}.$$

$$\text{b) } t = \frac{\sqrt{195}}{2}, \quad m_{AB} = \sqrt{\frac{13}{2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{13}{15}}.$$

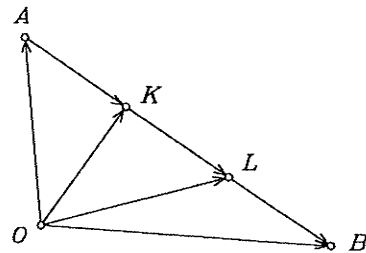
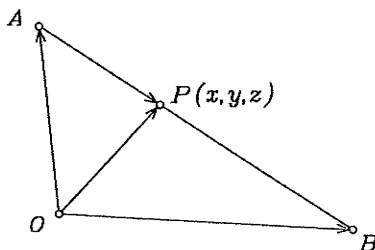
$$\text{c) } t = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad m_{AB} = \sqrt{\frac{6}{5}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{3}{32}}.$$

9. Emlékeztető: A  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  és  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  pontok által meghatározott szakasz felezőpontja:  $F\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ . A  $BC$  szakasz felezőpontja:  $F_1(-1, 1, -1)$ . Az  $AC$  szakasz felezőpontja:  $F_2(-1, 1, 4)$ . Az  $AB$  szakasz felezőpontja:  $F_3(3, 2, 0)$ .

Az  $A$ ,  $B$ , illetve a  $C$  csücsből kiinduló súlyvonal hossza:  $|\vec{AF}_1| = \sqrt{53}$ ,  $|\vec{BF}_2| = \sqrt{98}$ , illetve  $|\vec{CF}_3| = \sqrt{77}$ .

10. Tekintsük a bal oldali ábrát! Itt az  $O$  pont a koordináta-rendszer origóját jelöli. A feladatban megadott arányból következik, hogy  $\vec{AP} = \frac{m}{m+n}\vec{AB}$  és ezért  $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP} = \vec{OA} + \frac{m}{m+n}\vec{AB}$ . Ebből kapjuk, hogy  $[x, y, z] = [a_1, a_2, a_3] + \frac{m}{m+n}[b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3]$ .

A kijelölt szorzásokat elvégezve:  $P\left(\frac{na_1 + mb_1}{m+n}, \frac{na_2 + mb_2}{m+n}, \frac{na_3 + mb_3}{m+n}\right)$ .



11. Tekintsük a jobb oldali ábrát. Itt  $K$  és  $L$  a két harmadoló pontot, az  $O$  pedig a derékszögű koordináta-rendszer origóját jelöli. Az előző feladat eredményét  $m = 1$ -gyel és  $n = 2$ -vel alkalmazva  $K(2, 0, 3)$  adódik,  $m = 2$ -vel és  $n = 1$ -gyel pedig  $L(0, 1, 4)$ .

12. Az  $A$  pont tükörképe a  $B$  ponton legyen  $A'(x', y', z')$ .

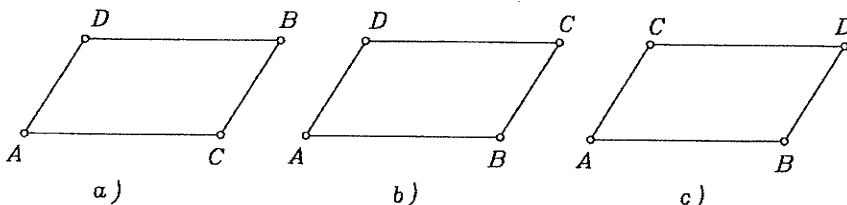
a) Mivel a  $B$  pont az origó, ezért  $A'(-3, -4, 1)$ .

b) Az  $A$  pont az origó, ezért az  $\vec{AB}$  vektor a  $B$  pontnak, az  $\vec{AA'}$  vektor pedig az  $A'$  pontnak a helyvektora. Ezekből következik, hogy  $\vec{AA'} = 2\vec{AB} = 2[3, 4, -1] = [6, 8, -2]$ . A tükörkép:  $A'(6, 8, -2)$ .



5. Analitikus térgeometria

- c) Az  $AA'$  szakasznak felezőpontja a  $B$  pont. Ezért a 9. megoldásnál leírtak alapján  $\frac{-1+x'}{2} = 2$ ,  $\frac{-2+y'}{2} = -1$ ,  $\frac{-5+z'}{2} = 3$ . Ezekből  $A'(5, 0, 11)$ .
- d) A c) részben leírottakhoz hasonlóan járjunk el.  $A'(-5, -1, 2)$ .
13. a) A harmadik csúcs:  $C(x, 0, 0)$ . A háromszög területe:  $t = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = 5$ .  
 $\vec{AB} \times \vec{AC} = [-10, x+7, 9-3x]$ .  $|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{10x^2 - 40x + 230} = 10$ .  
 Ennek az egyenletnek nincs valós megoldása. Ezért az  $x$  tengelyen nincs olyan  $C$  pont, amellyel az  $ABC$  háromszög területe 5 egység.
- b) Két ilyen pont van:  $C_1\left(0, 0, \frac{51 + \sqrt{261}}{18}\right)$ ,  $C_2\left(0, 0, \frac{51 - \sqrt{261}}{18}\right)$ .
14.  $\vec{AB} \times \vec{AC} = [y+1, -3, 8-y]$ , ezért  $2t = \sqrt{2y^2 - 14y + 74}$ . Mivel a gyök alatti kifejezés az  $y$  minden értékére pozitív, mivel diszkriminánsa negatív. Így az előző egyenlet ekvivalens az  $y^2 - 7y + 37 - 2t^2 = 0$  egyenlettel. Ezért azok (és csak azok) a  $t$  értékek lesznek megfelelők, amelyekkel az előbbi másodfokú egyenletnek vannak valós megoldásai. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha  $49 - 4(37 - 2t^2) \geq 0$ . Ebből  $t \geq \sqrt{\frac{99}{8}}$  következik.
15. Legyen a negyedik csúcs  $D(x, y, z)$ . Három különböző eset van:



- a) Az egyik átló az  $AB$  szakasz. Ekkor  $\vec{AC} + \vec{AD} = \vec{AB}$ . Áttérve koordináták alakra:  $[-4, 2, 0] + [x-3, y+1, z-2] = [-2, 3, -6]$ . Ebből a vektoregyenletből:  $x = 5$ ,  $y = 0$ ,  $z = -4$ . Tehát a negyedik csúcs:  $D(5, 0, -4)$ .
- b) Az egyik átló az  $AC$  szakasz. Az  $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$  egyenletből  $D(1, -2, 8)$ .
- c) Az  $AD$  szakasz az egyik átló. A negyedik csúcs:  $D(-3, 4, -4)$ .
16. Tudjuk, hogy három vektor vegyes szorzata akkor és csak akkor 0, ha a három vektor komplanáris. Az is ismert, hogy koordinátaival adott három vektor vegyes szorzata a koordinátákból alkotott harmadrendű determinánssal egyenlő.
- a) Az  $A, B, C, D$  pontnégyes akkor és csak akkor van egy síkban, ha az  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$  vektorok komplanárisak. A három vektor vegyes szorzata:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AD} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -20 \neq 0.$$

## 5. Analitikus térgeometria

Tehát a négy pont nem egysíkú.

b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ . A négy pont egysíkú.

c)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ . A négy pont egysíkú.

17. Ha a tetraéder egy csúcsából kiinduló három élvektor  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$ , akkor a tetraéder térfogata  $V = \frac{1}{6}|\mathbf{abc}|$ . Az  $A$  csúcsból kiinduló három élvektor:  $\overrightarrow{AB} = [4, 0, -3]$ ,  $\overrightarrow{AC} = [3, 2, -3]$ ,  $\overrightarrow{AD} = [4, 1, -3]$ . Vegyes szorzatuk:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 3$ . A térfogat:  $V = \frac{1}{2}$ .

A felszín:  $F = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}|) = \frac{1}{2}(\sqrt{109} + \sqrt{43} + 5 + 1)$ . Az  $ABC$  lap területe  $t = \frac{1}{2}\sqrt{109}$ . A tetraéder térfogata  $V = \frac{1}{3}tm$ , ahol  $m$  az  $ABC$  laphoz tartozó magasság. Ezekből a magasság:  $m = 3/\sqrt{109}$ .

$$18. \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -5 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & u-3 \end{vmatrix} = -6u - 14.$$

A tetraéder térfogata 4 egység, ha  $\frac{1}{6}|6u + 14| = 4$ , azaz  $|6u + 14| = 24$ . Ebből az egyenletből az  $u$  ismeretlenre két megoldást kapunk. Ugyanis vagy  $6u + 14 = -24$ , amiből  $u = -\frac{19}{3}$ , vagy  $6u + 14 = 24$ , amiből  $u = \frac{5}{3}$ . A feladat feltételeit két pont elégíti ki:

$$D_1(2, 0, -\frac{19}{3}), \quad D_2(2, 0, \frac{5}{3}).$$

19. A pontnégyes akkor és csak akkor egysíkú, ha

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3-u \\ 1 & 0 & v-u \\ 0 & 1 & -1-u \end{vmatrix} = 2 - u - v = 0.$$

Ebből  $u + v = 2$ .

$$20. \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \\ x-3 & y-1 & z \end{vmatrix} = 2x - 3y + 2z - 3.$$

A térfogat  $\frac{1}{6}|2x - 3y + 2z - 3| = 10$ . Ebből egyrészt  $2x - 3y + 2z - 63 = 0$ , másrészt  $2x - 3y + 2z + 57 = 0$  következik. A feladat feltételeit a  $2x - 3y + 2z - 63 = 0$  és a  $-2x + 3y - 2z - 57 = 0$  egyenletű sík pontjai elégítik ki.

21. A feladatok megoldásánál alkalmazzuk a **T 5.5** tételt.

a)  $3x + 2y - 4z + 8 = 0$ . b)  $x + 2y + 4z = 0$ . c)  $2x + 3z - 8 = 0$ .

d)  $2y - z - 4 = 0$ . e)  $x = 0$ . f)  $y = 0$ . g)  $z = 0$ . h)  $y = 2$ .

22. Előbb számítsuk ki az adott pontok valamelyikéből kiinduló és a másik két adott pontba mutató vektor (pl.  $\overrightarrow{PQ}$  és  $\overrightarrow{PR}$ ) vektori szorzatát. Ha ez a vektori szorzat nullvektor, akkor (a két vektor egyállású, és ezért) a  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  ponthármass egy egyenesen fekszik; ha nem nullvektor, akkor a három pont által meghatározott síknak normálvektora. Az utóbbi esetben alkalmazzuk a

## 5. Analitikus térgeometria

**T 5.5 tétel.** (A tételbeli  $P_0$  pontként az adott  $P, Q, R$  pontok bármelyikét választhatjuk.)

a)  $x + y + 2z - 3 = 0$ .      b)  $x + y + z = 1$ .      c)  $4x - 22y + 3z = 0$ .

d)  $y = 0$ .      e)  $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = 0$ .

23. Az adott sík (egy) normálvektora az  $\mathbf{n} = [7, -1, 3]$  vektor. A párhuzamosság miatt az  $\mathbf{n}$  vektor a meghatározandó síknak is normálvektora. A T 5.5 tételből következik, hogy a sík egyenlete:  $7x - y + 3z - 8 = 0$ .
24. Pl. az  $x$  tengelyt abban az  $M_x$  pontban metszi, ahol  $y = z = 0$ . A metszéspontok:  $M_x(-6, 0, 0)$ ,  $M_y(0, -3, 0)$ ,  $M_z(0, 0, 2)$ .
25. Mivel a három egyenletből álló egyenletrendszert csak az  $x = 1, y = 1, z = 1$  számhármassal elégíti ki, a  $K(1, 1, 1)$  pont rajta van mindhárom síkon, de más közös pont nincs. A keresett sík egyenlete:  $x + y + 2z - 4 = 0$ .
26. A három sík egyenletéből összetett egyenletrendszernek nincs megoldása. Ezért a három síknak nincs közös pontja.
27. A három normálvektor vegyes szorzata:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7.$$

Ez az érték nem 0, ezért a három normálvektor nem egysíkú. Tehát a síkok metszésvonalai közül semelyik kettő nem párhuzamos, így a három síknak egy és csak egy közös pontja van. (A metszéspont meghatározásához a három egyenletből álló egyenletrendszert kell megoldani, de ez most nem volt kérdés.)

28. Az adott négy egyenletből minden lehetséges módon válasszunk ki hármat. Így négy háromismeretlenes egyenletrendszert kapunk. Ha a négy egyenletrendszer mindegyike egyértelműen megoldható, akkor a négy sík közrefog egy tetraédert, melynek csúcsait az egyenletrendszerek megoldásai adják. (Abban az esetben pedig, ha legalább egy az egyenletrendszerek közül nem oldható meg, vagy legalább egynek végtelen sok megoldása van, a négy sík nem határol tetraédert.) Ha  $P_i$  jelöli a  $S_i$  síkkal szemközti pontot, akkor  $P_1(3, 2, 2)$ ,  $P_2(3, -4, 2)$ ,  $P_3(0, -1, 2)$ ,  $P_4(1, 0, 0)$ . A tetraéder térfogata 6.
29. A meghatározandó sík (egy) normálvektora  $\overrightarrow{AB} \times \mathbf{n}$ , ahol  $\mathbf{n}$  az adott sík normálvektora.  $\overrightarrow{AB} \times \mathbf{n} = [-3, -12, -3]$ . A sík egyenlete:  $x + 4y + z - 11 = 0$ .
30. A keresett sík normálvektora merőleges mindkét adott sík normálvektorára, ezért egyenlete:  $x + 5y - 3z - 3 = 0$ .
31. A sík normálvektora:  $\overrightarrow{AB} = [2, 10, -4]$ . A sík egyenlete:  $x + 5y - 2z - 16 = 0$ .
32. A megoldásnál a rombusznak azt a tulajdonságát használjuk fel, hogy átlói felezik a csúcsonál lévő szöveget.

a) Az  $\overrightarrow{AB} = [1, 2, -2]$  és az  $\overrightarrow{AC} = [3, 4, 0]$  vektorok egységvektorai rendre:

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{3}[1, 2, -2], \quad \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{5}[3, 4, 0].$$

## 5. Analitikus térgeometria

Ezek összege az  $A$  csúcsonál lévő belső szögfelezővel egyállású vektor, azaz a keresett sík normálvektora.  $\frac{1}{3}[1, 2, -2] + \frac{1}{5}[3, 4, 0] = \frac{1}{15}[14, 22, -10]$ .

A sík egyenlete:  $7x + 11y - 5z - 15 = 0$ .

b) Az  $A$  csúcsonál lévő külső szögfelezővel párhuzamos az a) részben kiszámított két egységvektor különbsége. A sík egyenlete:  $2x + y + 5z - 30 = 0$ .

33. A síktól megköveteljük, hogy merőleges legyen az  $A$ -hoz tartozó magasságvonalra. Ezért egyrészt párhuzamosnak kell lennie a  $\overrightarrow{BC}$  vektorral, másrészt merőlegesnek kell lennie a háromszög síkjára, és így párhuzamosnak kell lennie az  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$  vektorral is. Ezekből kapjuk, hogy az  $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}) \times \overrightarrow{BC}$  vektor a sík normálvektora. A sík egyenlete:  $5x + 7y + 2z - 14 = 0$ .

34. Az  $e$  és  $f$  egyenes egyenletrendszerét hasonlítsuk össze a T 5.8 tételbeli egyenletrendszerrel, a  $g$  egyenesét pedig a T 5.9 tételben lévő (1) képlettel. Az  $e$ ,  $f$  és  $g$  egyenesek irányvektorai rendre:  $u = [3, -1, 2]$ ,  $v = [-1, 0, 2]$ ,  $w = [-3, 1, -2]$ .

Az  $A$  pont rajta van az  $e$  egyenesen, mert a pont koordinátáit behelyettesítve az egyenletrendszer egyenleteibe, mindhárom egyenlethől a  $t$ -re ugyanazt az értéket kapjuk. (Most 1-et.) Az  $A$  pont nincs rajta az  $f$  egyenesen, mert az egyenes minden pontjának  $y$ -koordinátája 4. Az  $A$  pont rajta van a  $g$  egyenesen, mert a pont koordinátáit behelyettesítve az egyenletrendszer egyenleteibe, helyettesítési értéként ugyanazt a számot kapjuk. (Most zérust.)

Mivel az  $e$  és  $g$  egyenesek irányvektorai egyállásúak és az  $A$  pont rajta van mindkét egyenesen, ezért ezek az egyenesek egybeesnek.

A  $B$  pont nincs rajta az  $e$  és  $g$  egyenesek egyikén sem, de rajta van az  $f$  egyenesen.

35.  $e: \frac{x-5}{2} = -y = 1-z; \quad f: 2-x = \frac{z+1}{3}, y=2; \quad g: y=3, z=4$ .

36. a) Az egyenes  $x_0 = 16$  koordinátájú pontja:  $P_0(16, 24, 20)$ .

A keresett paraméteres egyenletrendszer:  $x = 16 + 3t, y = 24 + 5t, z = 20 + 4t$ .

b)  $P_0(3, 5, 2), \quad x = 3, y = 5 + 2t, z = 2 + t$ .

c)  $P_0(7, 4, -3), \quad x = 7 + t, y = 4, z = -3$ .

37. Alkalmazzuk a T 5.8 és T 5.9 tételeket.

a)  $x = -2 - t$

$$y = 5 + 2t \quad -x - 2 = \frac{y-5}{2} = \frac{z-1}{3}$$

$$z = 1 + 3t$$

b) Irányvektor:  $\overrightarrow{PQ} = [-4, 0, 1]$

$$x = 3 - 4t$$

$$y = 1 \quad \frac{x-3}{4} = 2 - z, \quad y = 1$$

$$z = 2 + t$$

c)  $x = 5$

$$y = 1 \quad x = 5, \quad y = 1$$

$$z = 4 + t$$

d) Irányvektor:  $a \times b = [3, 4, -6]$ .

$$x = 6 + 3t$$

5. Analitikus térgeometria

$$y = -3 + 4t \quad \frac{x-6}{3} = \frac{y+3}{4} = \frac{4-z}{6}.$$

$$z = 4 - 6t,$$

e) Az irányvektor a két normálvektor vektori szorzata:  $[2, -4, 2]$ .

$$x = 2t$$

$$y = 4 - 4t \quad \frac{x}{2} = \frac{4-y}{4} = \frac{z-1}{2}.$$

$$z = 1 + 2t,$$

38. a)  $\alpha = 2$ .

b) Az egyenes irányvektorának merőlegesnek kell lennie a sík normálvektorára. Ezért  $\alpha = 2$  vagy  $\alpha = -2$ .

c) Akkor és csak akkor van metszéspont, ha az egyenes nem párhuzamos a síkkal. Ekkor az egyenes irányvektorának és a sík normálvektorának skaláris szorzata nem zérus. Most ez a szorzat minden  $\alpha$ -ra zérus. Tehát nincs olyan  $\alpha$ , amely kielégíti a leírt követelményt.

d) A követelmény olyan  $\alpha$ -val teljesíthető, amellyel a sík normálvektora és az  $\overrightarrow{AB}$  vektor egyállású, azaz, ha létezik olyan  $k$  valós szám, amellyel

$$\overrightarrow{AB} = [\alpha - 2, \alpha + 2, 4] = k[3, 5, \frac{\alpha}{4}].$$

Ez a vektoregyenlet a következő egyenletrendszerrel ekvivalens:

$$\alpha - 2 = 3k$$

$$\alpha + 2 = 5k$$

$$4 = \frac{k\alpha}{4}.$$

Az  $k = 2$  és  $\alpha = 8$  érték mindhárom egyenletet kielégíti. Tehát az  $\alpha = 8$  értékre a követelmény teljesül.

39. Az egyenesen kijelölünk egy pontot, pl.  $A(2, 0, 2)$ .

A sík egy normálvektora:  $\overrightarrow{AP} \times [1, 3, 0] = [6, -2, -13]$ .

A sík egyenlete:  $6x - 2y - 13z + 14 = 0$ .

40.  $x - 6y - 4z + 1 = 0$ .

$$41. \begin{cases} x = t \\ y = \frac{3}{4} + \frac{3}{8}t \\ z = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}t \end{cases}, \quad \text{ill.} \quad \begin{cases} x = -2 + \frac{8}{3}u \\ y = u \\ z = \frac{u}{3} \end{cases}, \quad \text{ill.} \quad \begin{cases} x = -2 + 8v \\ y = 3v \\ z = v. \end{cases}$$

A paraméter kiküszöbölésével rendre

$$x = \frac{8y - 6}{3} = 8z - 2, \quad \frac{3x + 6}{8} = y = 3z, \quad \frac{x + 2}{8} = \frac{y}{3} = z$$

adódik. Könnyen ellenőrizhető, hogy a három egyenletrendszer ekvivalens.

42. a) Helyettesítsük a sík egyenletébe az egyenes egyenletrendszerében lévő  $x$ ,  $y$  és  $z$  értékeket. Kapjuk, hogy  $t = 1$ . Egy közös pont van:  $D(2, 1, 2)$ .

b) Célszerű áttérni paraméteres egyenletrendszerre. Ettől kezdve úgy járunk el, mint az a) részben. Közös pont:  $D(3, -1, 4)$ .

## 5. Analitikus térgeometria

- c) A síknak és az egyenesnek nincs közös pontja.  
 d) Az a) részhez hasonlóan eljárva, a  $0 \equiv 0$  azonosságot kapjuk. Az egyenes benne fekszik a síkban.
43.  $x = 2t, y = -2t, z = t$  vagy  $\frac{x}{2} = \frac{y}{-2} = z$ .
44. Az  $AB$  oldal  $F$  felezőpontja:  $F(-1, 4, -2)$ . A súlyvonal irányvektora  $\overrightarrow{FC}$ ; egyenletrendszere:  $x = 4 - 5t, y = -7 + 11t, z = -2$ .
45. A 32. feladat megoldásánál elmondottak szerint a szögfelező irányvektora:  $\mathbf{v} = \frac{1}{7}[2, -3, 6] + \frac{1}{7}[-3, 6, 2] = \frac{1}{7}[-1, 3, 8]$ , egyenletrendszere:  $1 - x = \frac{y-2}{3} = \frac{z+7}{8}$ .
46. A sík (egy) normálvektora az adott sík normálvektorának és az adott egyenes irányvektorának vektori szorzata. Egyenlete:  $2x - y - 5z - 9 = 0$ .
47. Az egyenesek irányvektorai:  $\mathbf{v}_e = [3, -1, -2], \mathbf{v}_f = [-6, 2, 4], \mathbf{v}_g = [2, 0, 3], \mathbf{v}_h = [2, 0, 3], \mathbf{v}_k = [-3, 1, 2], \mathbf{v}_l = [6, -2, -4]$ . Látható, hogy az  $e, f, k, l$  egyenesek párhuzamosak, hasonlóképpen  $g$  és  $h$ . Egy pontot választva az egyik egyenesről, és koordinátáit behelyettesítve egy vele párhuzamos egyenes egyenletrendszerébe, megállapíthatjuk, hogy a két egyenes egybe esik vagy nem. Feladatunkban például a  $P(2, 0, 1)$  pont rajta fekszik az  $e, k$  és  $l$  egyeneseken, ezért ezek azonosak, de nincs rajta az  $f$  egyenesen, így  $f$  különbözik az  $e (= k = l)$  egyenestől. Hasonlóan, a  $Q(-3, 0, 9)$  pont behelyettesítése mutatja, hogy a  $g$  és a  $h$  egyenesek azonosak. Tehát valójában csak három különböző egyenesünk van: az  $e = k = l$ , az  $f$  és a  $g = h$  egyenesek.
- Általában két egyenes kölcsönös helyzete úgy határozható meg, hogy megoldjuk a két egyenes (akár paraméteres, akár paramétermentes) egyenletrendszeireiből alkotott egyenletrendszert. Ha ez egyértelműen megoldható, akkor a két egyenes metsző, ha végtelen sok megoldás van, akkor a két egyenes azonos, ha nincs megoldás, akkor az egyeneseknek nincs közös pontjuk. Például az  $e$  és  $h$  kölcsönös helyzetét megadja az alábbi ötismeretlenes egyenletrendszer:

$$\begin{array}{ll} x = 3t + 2 & x = 2u - 3 \\ y = -t & y = -1 \\ z = 1 - 2t & z = 3u + 9. \end{array}$$

(Vigyázzunk, a két egyenes paramétere egymástól független, ezért különböző betűkkel jelöljük.) Az egyenletrendszer ellentmondó, tehát a két egyenesnek nincs közös pontja (kitérők, mivel nem párhuzamosak). Hasonlóképp ellentmondó az  $e, k, l$  valamelyikének és  $g$  illetve  $h$  valamelyikének egyenletrendszeréből alkotott egyenletrendszer. Például  $k$  és  $g$  esetén az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{array}{ll} \frac{8-x}{3} = y + 2 & y = -1 \\ \frac{z+3}{2} = y + 2 & \frac{x+5}{2} = \frac{z-6}{3}. \end{array}$$

Végül az  $f$  és  $g$  (illetve  $f$  és  $h$ ) egyenletrendszeireiből alkotott egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy  $f$  és  $g$  metszéspontja a  $(-5, -1, 6)$  pont.

## 5. Analitikus térgeometria

Megjegyzés: Két különböző állású egyenes esetén egy másik módszerrel is eldönthető, hogy metszik-e egymást, vagy nem. Kijelölünk az egyeneseken egy-egy pontot; legyenek ezek  $A$  és  $B$ . Majd kiszámítjuk a két irányvektor és az  $\overrightarrow{AB}$  vektor vegyes szorzatát. Ez a szorzat akkor és csak akkor 0 (különböző állású egyenesek esetén), ha a két egyenes metsző. Például az  $e$  egyenesről az  $A(2, 0, 1)$ , a  $h$  egyenesről a  $B(-3, -1, 9)$  pontot választva a vegyes szorzat nem 0, tehát a két egyenes kitérő.

48. A 47. feladat megoldása szerint eljárva, és megoldva a két egyenes egyenletrendszeréből kapott egyenletrendszert, azt kapjuk, hogy az csak  $\lambda = 11$  esetén oldható meg egyértelműen. A metszéspont:  $[20/11, -41/11, 117/11]$ . Az előző feladat megoldásának végén tett megjegyzés szerinti megoldás: az  $e$ , illetve az  $f$  egyenes egy-egy pontja:  $A(-2, 0, 1)$ ,  $B(3, 1, \lambda)$ . A két irányvektor:  $\mathbf{v}_1 = [2, -3, 4]$  és  $\mathbf{v}_2 = [1, 4, 2]$ . A  $\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \overrightarrow{AB} = 0$  egyenletből kapjuk, hogy  $\lambda = 11$ .
49.  $\lambda = -\frac{34}{5}$ .
50. Az  $x$ -tengely esetén:  $\lambda = -\frac{3}{4}$ ; metszéspont:  $M(\frac{5}{2}, 0, 0)$ ,  
Az  $y$ -tengely esetén:  $\lambda = -\frac{9}{2}$ ; metszéspont:  $M(0, -5, 0)$ ,  
Az  $z$ -tengely esetén: nincs ilyen  $\lambda$ .
51. Az  $e$  egyenes két sík metszésvonalaként lett megadva.  
Az  $x$ -tengely esetén:  $\lambda = -4$ ; metszéspont:  $M(2, 0, 0)$ .  
Az  $y$ -tengely esetén:  $\lambda = 9$ ; metszéspont:  $M(0, -3, 0)$ .  
Az  $z$ -tengely esetén:  $\lambda = 3$ ; metszéspont:  $M(0, 0, 3)$ .
52. Az  $A$  ponton áthaladó és az adott síkra merőleges  $e$  egyenes egyenletrendszere:  $x = 4 + t$ ,  $y = -3 - t$ ,  $z = 5 + t$ . Az  $e$  egyenes dőféspontja a síkon:  $D(3, -2, 4)$ .  
A tükörkép:  $A'(2, -1, 3)$ , mert  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DA}'$ .
53. Az  $A$  ponton áthaladó és az  $e$  egyenesre merőleges sík egyenlete:  $3x + 5y + 2z - 7 = 0$ . Az  $e$  egyenes dőféspontja ezen a síkon:  $D(3, -2, 4)$ . A tükörkép:  $A'(4, -3, 5)$ .
54. Tükrözzük az egyenes két pontját (az egyik az egyenes és a sík közös pontja is lehet; ez a tükrözéskor helybenmarad). Az egyenes tükörképe:  
 $e' : x = -5 - 8t$ ,  $y = 1$ ,  $z = -5t$ .
55. Meghatározzuk  $e$ -nek két különböző pontját, és mindkettőnek az  $x + 2y - z = 0$  egyenletű síkra eső merőleges vetületét. A két vetületi pontot összekötő egyenes paraméteres egyenletrendszere:  $x = x_0 + u$   $y = y_0 - 4u$   $z = z_0 - 7u$ . Ezután  $t = x_0 + u$  helyettesítéssel (a két pont választásától függetlenül) az  $f$  egyenes egyenletrendszere:  $x = t$ ,  $y = 1 - 4t$ ,  $z = 2 - 7t$ .
56. A metszésvonal irányvektora  $\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ , ahol  $\mathbf{n}_1$  az első,  $\mathbf{n}_2$  a második sík normálvektora:  $\mathbf{v} = [4, -1, -3]$ .  
A keresett sík normálvektora:  $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \times \mathbf{u}$ , ahol  $\mathbf{u}$  az egyenes irányvektora.  $\mathbf{n} = [\frac{7}{6}, -\frac{13}{3}, 3]$ . A metszésvonal egy pontja:  $A(0, 0, 0)$ .  
A sík egyenlete:  $7x - 26y + 18z = 0$ .

## 5. Analitikus térgeometria

- a)  $5x + 4y + 9z + 15 = 0$ .      b)  $y + z = 0$ .      c)  $x + z + 3 = 0$ .  
 57. d)  $x - y + 3 = 0$ .      e)  $x - 4y - 3z + 3 = 0$ .

58. Az origón és az  $e$  egyenesen átmenő sík egyenlete:  $8x + 6y + 5z = 0$ . A sík és az  $f$  egyenes közös pontja:  $M(2, 4, -8)$ . A feltételeknek a  $PM$  egyenes tesz eleget; egyenletrendszere:  $x = \frac{y}{2} = -\frac{z}{4}$ .

59. Egyetlen ilyen egyenes van, egyenletrendszere:  $\frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{2} = 3-z$ .

60. A  $P$  ponton és az  $e$  egyenesen átmenő  $S$  sík egyenlete:  $2x + 3y - z - 1 = 0$ . Ez a sík tartalmazza az  $f$  egyenest. Ezért a feladatnak megoldása az  $S$  síknak minden olyan egyenese, amely átmeny  $P$ -n és nem párhuzamos az  $e$  és  $f$  egyenesek egyikével sem.

61. Nincs ilyen egyenes. (A  $P$  ponton és az  $e$  egyenesen átmenő sík egyenlete:  $3x + y - 11z + 4 = 0$ .)

62.  $K(1, 1, -1)$ . Az  $e$  egyenes irányvektora  $\mathbf{i} = [1, 0, 0]$ , az  $S$  sík normálvektora  $\mathbf{n} = [1, 1, 1]$ , az  $f$  egyenes irányvektora legyen  $\mathbf{v} = [a, b, c]$ . Mivel az  $f$  benne van az  $S$  síkban és merőleges az  $e$  egyenesre, ezért  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  és  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = 0$ . Ebből  $a = 0$  és  $b = -c$  következik. Tehát az  $f$  egy irányvektora a  $[0, 1, -1]$  vektor; paraméteres egyenletrendszere:  $f: x = 1, y = 1 + t, z = -1 - t$ .

63. A  $P$  ponton átmenő és az  $a$ -ra merőleges sík egyenlete:  $6x - 2y - 3z + 1 = 0$ . Ez a sík az adott egyenest az  $M(1, -1, 3)$  pontban metszi. A  $PM$  egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{2-y}{3} = \frac{z+3}{6}.$$

64. A keresett egyenes  $\mathbf{v}$  irányvektora a sík normálvektora, ezért  $\mathbf{v} = [2, 4, -1]$ . Az  $e$  egyenes irányvektora:  $\mathbf{u} = [2, -1, 1]$ . Az  $e$  egyenesen át vegyük fel (a  $\mathbf{v}$ -vel párhuzamos, tehát) az  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  normálvektorú síkot (egyenlete:  $3x - 4y - 10z = 0$ ). Az  $f$  egyenes dőféspontja ezen a síkon

$$D\left(\frac{88}{41}, \frac{51}{41}, \frac{6}{41}\right);$$

ez a keresett egyenes egyik pontja. Az egyenes egyenletrendszere:

$$82x - 176 = 41y - 51 = 24 - 164z.$$

65. A síkok normálvektorai komplanárisak, mert vegyes szorzatuk zérus. Ugyanakkor a normálvektorok páronként nem egyállásúak. Ezekből következik, hogy bármelyik két sík különböző, de bármelyik kettőnek van metszésvonala és ezek egyező állásúak.

A metszésvonalak (közös) irányvektora:  $\mathbf{v} = [1, 2, 1]$ .

Három ilyen síknak akkor és csak akkor van közös pontja, ha páronkénti metszésvonalaik egybeesnek.

Válasszunk ki egy  $P$  pontot két sík metszésvonalán. A  $P$  pont akkor és csak akkor van rajta a harmadik síkon is, ha  $\lambda = 3$ . Eszerint:

a) Van közös pont (egyenes is), ha  $\lambda = 3$ .      b) Nincs közös pont, ha  $\lambda \neq 3$ .



5. Analitikus térgeometria

66. Ha  $E$  az  $e$  egyenesnek,  $F$  pedig az  $f$  egyenesnek egy-egy pontja, akkor a  $g$  egyenes átmegey az  $EF$  szakasz felezőpontján.

$$g: \frac{x-4}{4} = y - \frac{3}{2} = z - \frac{9}{2}.$$

67. Ha a  $P(u, v, w)$  pont rajta van az  $e$  egyenesen, akkor

$$\frac{u-1}{2} = -v \quad \text{és} \quad -v = \frac{w+3}{3};$$

másrészt, a T 5.11 tétel alapján  $\frac{1}{3}|u+2v+2w+11| = 2$ . Ebből a három egyenletből a következő két megoldást kapjuk:  $P_1(1, 0, -3)$ ,  $P_2(-3, 2, -9)$ .

68. A távolság:  $\frac{\sqrt{6}}{12}$  egység.

69. a) A T 5.14 tétel alapján:  $\cos(e, f)\angle = \cos(e, g)\angle = \frac{5}{7}$ ,  $\cos(f, g)\angle = \frac{3}{7}$ .

b) Az  $(e, f)$ ,  $(e, g)$  és  $(f, g)$  síkok normálvektorai rendre:  $\mathbf{n}_1 = [1, 2, -1]$ ,  $\mathbf{n}_2 = [2, -1, -1]$ ,  $\mathbf{n}_3 = [3, 1, 0]$ . Az  $(e, f)$  és  $(e, g)$  síkok szögének koszinusza:

$$\frac{|\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{1}{6}; \quad \text{tangense} \sqrt{35}.$$

Az  $(e, f)$  és  $(f, g)$ , ill. az  $(e, g)$  és  $(f, g)$  síkok szögének tangense egyaránt  $\sqrt{\frac{7}{5}}$ .

c) T 5.15 alapján a szögek szinusza a feladatban megadott sorrendben:

$$\sqrt{\frac{2}{7}}, \quad \sqrt{\frac{10}{21}}, \quad \sqrt{\frac{10}{21}}.$$

70. a) Az  $x$  tengely irányvektora  $\mathbf{i} = [1, 0, 0]$ , a sík normálvektora  $\mathbf{n} = [1, t, 1]$ . A T 5.15 tétel alapján

$$\sin(x, S)\angle = \frac{|\mathbf{i} \mathbf{n}|}{|\mathbf{i}| |\mathbf{n}|} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ebből  $\frac{1}{\sqrt{t^2+2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  következik, aminek nincs valós  $t$  megoldása.

b) Az előbbihez hasonlóan

$$\sin(y, S)\angle = \frac{|t|}{\sqrt{t^2+2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Két megoldás van:  $t_1 = \sqrt{6}$ ,  $t_2 = -\sqrt{6}$ .

c) Nincs ilyen  $t$  érték.

71. Legyen a keresett sík:  $S: Ax + By + Cz + D = 0$ . A  $P$  és  $Q$  pont rajta van az  $S$  síkon, ezért  $A + B + \sqrt{2}C + D = 0$  és  $2B + \sqrt{2}C + D = 0$ . Ezekből  $A = B$  következik. Az adott sík és az  $S$  sík hajlásszögének koszinusza:

$$\frac{|[A, A, C][1, 1, 0]|}{\sqrt{2A^2 + C^2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ebből  $C^2 = 2A^2$ . A  $C = A\sqrt{2}$  értékkel számolva kapjuk, hogy a keresett sík normálvektorai  $\mathbf{n} = [A, A, A\sqrt{2}]$  alakúak és  $D = -4A$ , ahol az  $A$  tetszőleges

## 5. Analitikus térgeometria

(nem zérus) valós szám lehet. Ekkor a sík egyenlete:  $x + y + \sqrt{2}z - 4 = 0$ . A  $C = -A\sqrt{2}$  esetben pedig  $x + y - \sqrt{2}z = 0$ .

72. A keresett egyenes irányvektora:  $\mathbf{v} = [a, b, c]$ . Az adott sík, illetve az  $xy$  sík normálvektora  $\mathbf{n} = [1, -2, 0]$ , illetve  $\mathbf{k} = [0, 0, 1]$ . Az  $e$  egyenes benne van az adott síkban, ezért  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = a - 2b = 0$ . Ez utóbbi és a **T 5.15** tétel alapján

$$\frac{|c|}{\sqrt{5b^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ebből  $c^2 = 15b^2$ . Két megoldás van:

$$e_1: \frac{x-2}{2} = y-1 = \frac{z-4}{\sqrt{15}}; \quad e_2: \frac{x-2}{2} = y-1 = -\frac{z-4}{\sqrt{15}}.$$

73. Legyen a keresett egyenes  $e$  irányvektora  $\mathbf{v} = [a, b, c]$ . A **T 5.14** tétel alapján egyrészt

$$\cos(x, e)\angle = \frac{|\mathbf{iv}|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

másrészt

$$\cos(y, e)\angle = \frac{|\mathbf{jv}|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{2}.$$

Ezekből  $b^2 = a^2$  és  $c^2 = 2a^2$ . A feladat feltételeit négy egyenes elégíti ki. Egyenletrendszereik:

$$x = y = \frac{z}{\sqrt{2}}, \quad x = y = -\frac{z}{\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad x = -y = \frac{z}{\sqrt{2}}, \quad x = -y = -\frac{z}{\sqrt{2}}.$$

74. a) Legyen a keresett egyenes  $g$ , irányvektora:  $\mathbf{v} = [a, b, c]$ . **T 5.14** alapján

$$\cos(e, g)\angle = \frac{|2a + c|}{\sqrt{5}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{2}, \quad \cos(f, g)\angle = \frac{|-a + 2c|}{\sqrt{5}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{2}.$$

Ezekből  $|2a + c| = |-a + 2c|$  következik.

A  $2a + c = -a + 2c$ , illetve  $2a + c = a - 2c$  felbontásból  $b^2 = 10a^2$ , illetve  $b^2 = 10c^2$  adódik. Az  $a = 1$ , illetve  $c = -1$  választással kapjuk, hogy a feladat feltételeit négy egyenes elégíti ki. Egyenletrendszereik:

$$x - 3 = \frac{y - 4}{\sqrt{10}} = \frac{z + 1}{3}, \quad x - 3 = -\frac{y - 4}{\sqrt{10}} = \frac{z + 1}{3},$$

$$\frac{x - 3}{3} = \frac{y - 4}{\sqrt{10}} = -(z + 1), \quad \frac{x - 3}{3} = -\frac{y - 4}{\sqrt{10}} = -(z + 1).$$

- b) Két ilyen egyenes van ( $b^2 = 0$ ); egyenletrendszereik:

$$x - 3 = \frac{z + 1}{3}, \quad y = 4 \quad \text{és} \quad -\frac{x - 3}{3} = z + 1, \quad y = 4.$$

- c) Nincs ilyen egyenes (mert  $b^2 < 0$  adódik).

5. Analitikus térgeometria

75. A keresett sík egyenlete:  $Ax + By + Cz + D = 0$ . A metszésvonal irányvektorára  $[1, -3, -5]$ , az együtthatókra,  $A, B, C, D$ -re pedig az alábbi egyenletrendszer adódik:

$$\begin{aligned} A + B + C + D &= 0 \\ A - 3B - 5C &= 0 \\ |A + 2B - C| &= |2A - B + C|. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlet a 71. feladat megoldása szerint nyerhető. Két megoldás van:

$$x - 3y + 2z = 0, \text{ a szög koszinusza: } \sqrt{\frac{7}{12}}.$$

$$3x + y - 4 = 0, \text{ a szög koszinusza: } \sqrt{\frac{5}{12}}.$$

76. A keresett egyenes irányvektora:  $\mathbf{v} = [a, b, c]$ . A 73. feladat megoldásához hasonlóan eljárva a következő egyenletrendszert kapjuk:  $|a| = |b| = |c|$ . A feltételeket négy egyenes elégíti ki. Egyenletrendszereik:

$$x = y = z, \quad x = -y = z, \quad -x = y = z, \quad -x = -y = z.$$

A szög koszinusza mind a négy esetben:  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

77. Legyen a keresett egyenes irányvektora  $\mathbf{v} = [a, b, c]$ . Az  $e, f$  és  $g$  egyenes egy-egy irányvektorát jelölje rendre a  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  és  $\mathbf{v}_3$  vektor. A T 5.14 tétel alapján

$$\frac{|\mathbf{v}\mathbf{v}_1|}{|\mathbf{v}||\mathbf{v}_1|} = \frac{|\mathbf{v}\mathbf{v}_2|}{|\mathbf{v}||\mathbf{v}_2|} = \frac{|\mathbf{v}\mathbf{v}_3|}{|\mathbf{v}||\mathbf{v}_3|}.$$

Ebből  $|2a + 3b + c| = |3a - 2b - c| = |-a + 3b + 2c|$ . A feladat feltételeit négy egyenes elégíti ki. Egyenletrendszereik és a szögek koszinuszai:

$$x - 1 = 2 - y = \frac{z+1}{3}; \quad \sqrt{\frac{2}{77}}; \quad x - 1 = \frac{2-y}{5} = \frac{z+1}{3}; \quad \sqrt{\frac{10}{7}}.$$

$$x - 1 = \frac{2-y}{5} = \frac{3z+3}{29}; \quad \sqrt{\frac{2}{301}}; \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{5} = -\frac{z+1}{11}; \quad \sqrt{\frac{10}{217}}.$$

78. Legyen  $P(x, y, z)$  valamelyik szögfelező sík tetszőleges pontja. A T 5.11 tétel alapján minden ilyen pontra

$$\frac{|x - 3y + 2z - 2|}{\sqrt{14}} = \frac{|2x + y + 3z - 5|}{\sqrt{14}}$$

teljesül. A két szögfelező sík egyenlete:  $x + 4y + z - 3 = 0$  és  $3x - 2y + 5z - 7 = 0$ .

79. Legyen a másik végpont  $B(x, y, z)$ .

Ekkor  $6 = |\overline{AB}| = \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2}$ . Figyelembe véve, hogy a  $B$  pont koordinátái kielégítik az egyenes egyenletrendszerét, a  $B$  paraméterként  $t = \pm 2$  adódik. Megoldások:  $B_1(2, 7, 3)$  és  $B_2(-6, -1, -1)$ .

80. Két ilyen pont van:  $P_1(0, 0, \frac{4}{5}), P_2(0, 0, 2)$ .

81. Két ilyen pont van:  $P_1(0, 0, -2), P_2(0, 0, \frac{-82}{13})$ .

82. A metszésvonal egyenletrendszere:  $\frac{3-x}{3} = \frac{y+1}{2} = z$ . Olyan  $P(u, v, w)$  pontot keresünk, amely rajta van a metszésvonalon és amelyre

$$\frac{|u + 2v + w + 1|}{\sqrt{6}} = \frac{|u + 2v + w - 3|}{\sqrt{6}}.$$

## 5. Analitikus térgeometria

Ebből és a metszésvonal egyenletrendszeréből kapjuk, hogy a megoldás:  
 $P(3, -1, 0)$ .

83. a) A  $P$  ponton áthaladó és az  $e$ -merőleges sík egyenlete:  $3x - y + 9 = 0$ . Az  $e$  egyenes metszéspontja ezen a síkon:  $M(-2, 3, 2)$ . A távolság 5 egység.

2. megoldás. Az **T 5.12** képletébe az  $e$  egyenes két pontját, például  $Q(1, 2, 2)$

és  $R(4, 1, 2)$  pontokat helyettesítve a keresett távolság:  $\frac{|\vec{PQ} \times \vec{QR}|}{|\vec{QR}|} = 5$ .

b) A távolság:  $6\sqrt{3}$  egység.      c) A távolság:  $\sqrt{17}$  egység.

d) A távolság:  $\frac{\sqrt{315}}{7}$  egység.      e) A távolság:  $\sqrt{\frac{17}{18}}$  egység.

84. a) Az  $e$ , illetve az  $f$  egyenes (egy) irányvektora  $\mathbf{v}_1 = [2, -1, -2]$ , illetve  $\mathbf{v}_2 = [4, -3, -5]$ . A két egyenes egy-egy pontja:  $A(-4, 4, -1)$ , ill.  $B(-5, 5, 5)$ . Az  $\vec{AB} \cdot \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$  vegyes szorzat értéke  $-9$ . Ez nem zérus, tehát a két egyenes kitérő. A távolság a **T 5.13** tétel alapján 3 egység.

b) A távolság:  $2 \cdot \frac{23}{\sqrt{762}}$  egység.

c) A távolság: 3 egység.

85. a) Az  $e$ , illetve az  $f$  egyenes irányvektora:  $\mathbf{v}_1 = [-3, 4, 1]$ , illetve  $\mathbf{v}_2 = [1, -1, -1]$ . A két egyenes távolsága:  $d(e, f) = \sqrt{14}$ . A normáltranszverzális irányvektora:  $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = [-3, -2, -1]$ . A továbbiakban az **64.** feladat megoldásában leírt módon járunk el. A  $t$  normáltranszverzális egyenletrendszere:

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y+2}{2} = z-2.$$

b)  $d(e, f) = \sqrt{41}$ .     $t : x = 6t + 9, y = -2t, z = -t + 2$ .

c)  $d(e, f) = 2\sqrt{17}$ .     $t : \frac{x+3}{2} = \frac{1-y}{2} = \frac{z}{3}$ .

d)  $d(e, f) = \sqrt{14}$ .     $t : 1-x = \frac{2-y}{3} = \frac{z-1}{2}$ .

86. Legyen  $S_1$  a  $P_1P_2$  szakasz felezőpontján átmenő és a  $P_1P_2$  szakaszra merőleges sík,  $S_2$  pedig a  $P_1P_3$  szakasz felezőpontján átmenő és a  $P_1P_3$  szakaszra merőleges sík;  $G$  az  $S_1$  és  $S_2$  metszésvonala.  $S_1$  egyenlete:  $6x + 4y + z = 47,5$ ;  $S_2$  egyenlete:  $4x + y + 4z = 30,5$ .  $G : x = 3t, x = \frac{149}{20} + 15t, y = \frac{7}{10} - 20t, z = -10t$ .

87. Két ilyen sík van, mert  $d(e, P) = \sqrt{2}$  és ez nagyobb 1-nél. Legyen a keresett  $S$  sík egyenlete:  $Ax + By + Cz + D = 0$ . Mivel  $d(P, S) = 1$ , a **T 5.11** szerint

$$(*) \quad \frac{|2A + B + 3C + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 1.$$

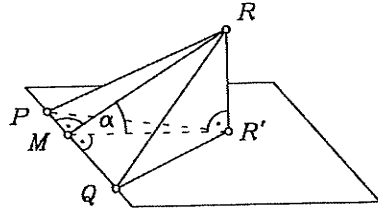
Az  $e$  egyenesen felvéve két pontot, két további egyenletet kapunk az  $A, B, C, D$  együtthatókra.

Legyen ez a két pont pl. a  $Q(1, 3, 4)$  és  $R(1, 0, 3)$ ; ekkor az  $A + 3B + 4C + D = 0$  és  $A + 3C + D = 0$  egyenleteket kapjuk, ezekből  $C$  és  $A + D$  értékét  $B$ -vel kifejezhetjük:  $C = -3B$  és  $A + D = 9B$  (a  $Q$  és  $R$  más választása esetén is ezt kapjuk.) A  $(*)$  egyenletbe helyettesítve  $|A + B| = \sqrt{A^2 + 10B^2}$  adódik. Ebből

5. Analitikus térgeometria

$2AB = 9B^2$  következnek. A  $B = 0$  esetben  $A \neq 0$ , és ezért  $A$ -t választhatjuk 1-nek, ezzel a keresett sík egyenlete  $x - 1 = 0$ . A  $B \neq 0$  esetben pedig  $B = 2$  választással  $9x + 2y - 6z + 9 = 0$ . A síkok szögének koszinusza:  $\frac{9}{11}$ .

88. Előzetes megjegyzés: Egy  $T$  területű háromszöget vetítsünk merőlegesen egy síkra. Ha ez a sík és a háromszög síkja  $\alpha$  szöget zár be, akkor a vetületi háromszög  $T'$  területére  $T' = T \cos \alpha$ . Az ábra alapján ezt könnyen beláthatjuk. Itt az  $RM$  szakasz a  $PQ$  oldalhoz tartozó magasság a  $PQR$  háromszögben,  $R'M$  pedig ennek merőleges vetülete. A feladatban  $T' = \frac{1}{2}T$ ; ezért  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ .



A keresett  $S$  sík tartalmazza az  $x$  tengelyt, ezért egyenlete  $By + Cz = 0$  alakú. A  $P_1P_2P_3$  sík normálvektora:  $[-2, -1, 3]$ . Az  $S$  sík és a  $P_1P_2P_3$  sík szögének koszinuszát a normálvektorokkal kifejezve, a  $\frac{|3C - B|}{\sqrt{14}\sqrt{B^2 + C^2}} = \frac{1}{2}$  egyenletet kapjuk, ebből pedig azt, hogy  $5B^2 + 12BC - 11C^2 = 0$ .  $C^2$ -tel osztva:  $5\left(\frac{B}{C}\right)^2 + 12\frac{B}{C} - 11 = 0$ . (Sem  $C$ , sem  $B$  nem lehet 0, mert akkor a keresett sík normálvektora nullvektor lenne.) Két sík elégíti ki a feltételeket; egyenleteik:

$$S_1: \frac{-6 + \sqrt{91}}{5}y + z = 0 \quad \text{és} \quad S_2: \frac{-6 - \sqrt{91}}{5}y + z = 0.$$

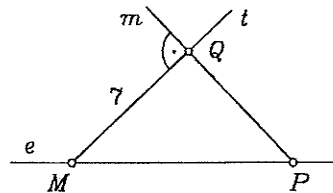
A  $P_1$  és  $P_2$  csúcs távolsága ezektől a síktól:

$$d(S_1, P_2) = 2d(S_1, P_1) = \frac{-1 + \sqrt{91}}{2\sqrt{38 - 3\sqrt{91}}}.$$

$$d(S_2, P_2) = 2d(S_2, P_1) = \frac{1 + \sqrt{91}}{2\sqrt{38 + 3\sqrt{91}}}.$$

89. Az  $A, B, C$  ponthármas akkor és csak akkor nem kollineáris, ha  $t \neq 9$ . A síkok közös pontja:  $K(2, 1, 4)$ . Ha  $t \neq 9$ , akkor az  $ABC$  sík egyenlete a  $t$  paraméter értékétől függetlenül  $x - y - 1 = 0$ , és így a  $K$  pont távolsága az  $ABC$  síktól  $\sqrt{2}$  egység.

90. A  $P$  ponton áthaladó és az  $e$  egyenesre merőleges  $S$  sík tartalmazza a meghatározandó  $m$  egyenest (ha létezik ilyen), továbbá az  $m$  és  $e$  egyenesek  $t$  normáltranszverzálisát. Ezt mutatja az ábra, ahol az  $e$  egyenes merőleges a rajz síkjára. Az  $S$  sík egyenlete:  $3x - 6y + 2z - 1 = 0$ . Az  $e$  egyenes és az  $S$  sík  $M$  metszéspontjára:  $M(7, 5, 5)$ . Az



5. Analitikus térgeometria

$|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{98} > 7$ , ezért két olyan egyenes van, amely kielégíti a feladat feltételeit.

Feltevésünk szerint az  $e$  és  $m$  egyenesek távolsága ( $MQ =$ ) 7 egység. Ebből és az  $MP = \sqrt{98}$  értékből következik, hogy az  $MPQ$  egyenlőszárú derékszögű háromszög:  $PQ = 7$ . Ez utóbbiak és az 5.14 tétel alapján

$$(1) \quad \cos(\overrightarrow{MP}, m) = \cos 45^\circ = \frac{|\overrightarrow{MP} \cdot \mathbf{m}|}{\sqrt{98}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ahol az  $\mathbf{m} = [a, b, c]$  vektor az  $m$  egyenes irányvektora. Válasszuk az  $\mathbf{m}$  vektort úgy, hogy

$$(2) \quad |\mathbf{m}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 7$$

legyen. Ez utóbbi és  $\overrightarrow{MP} = [-8, -5, -3]$  miatt az (1) összefüggésből

$$(3) \quad 8a + 5b + 3c = 49$$

következik. Az  $m$  egyenes merőleges az  $e$  egyenesre, ezért

$$(4) \quad 3a - 6b + 2c = 0.$$

A (2), (3) és (4) egyenletekből kapjuk, hogy a keresett egyenesek irányvektorai:  $\mathbf{m}_1 = [2, 3, 6]$  és  $\mathbf{m}_2 = [6, 2, -3]$ . A két egyenes egyenletrendszer:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3t \\ z = 2 + 6t \end{cases} \quad \text{és} \quad \begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = 2t \\ z = 2 - 3t. \end{cases}$$

91. A 63. feladat megoldásához hasonlóan járunk el.  $2 - x = y - 1 = z - 2$ .

92. A szög koszinusza:  $\frac{\sqrt{14}}{3\sqrt{3}}$ . A feltételt két pont elégíti ki:  $D_1\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$  és

$$D_2\left(\frac{79}{34}, \frac{79}{34}, -\frac{11}{68}\right).$$

93.  $B\left(\frac{1}{3}, \frac{1+\sqrt{2}}{3}, \frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)$ ,  $C\left(\frac{1}{3}, \frac{1-\sqrt{2}}{3}, \frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)$ .

94. A  $C$  csúcs lehetséges értékei:  $C_1(0, 0, 0)$  és  $C_2(6, 4\sqrt{3}, 0)$ . Az  $ABC$  lap területe:  $7\sqrt{3}$  egység.

A tetraéder magassága: 4 egység. A negyedik csúcs ( $D$ ) rajta van az adott egyenesen és vagy a  $z = 4$ , vagy pedig a  $z = -4$  egyenletű síkon van. A  $D$  csúcs lehet:  $D_1(2, 1, 4)$  és  $D_2(2, 5, -4)$ .

Négy tetraéder van:  $ABC_1D_1$ ,  $ABC_1D_2$ ,  $ABC_2D_1$ ,  $ABC_2D_2$ .

95. a) Az  $r$  lehetséges értékei: 2 és  $-2$ . A távolság mindkét esetben:  $\frac{7}{\sqrt{26}}$ .

b) Nincs olyan  $r$  szám, amelynél az  $e$  egyenes merőleges az  $\alpha$  síkra.

96. A három tükörkép a feladatbeli sorrendben:  $A(-3, 7, 1)$ ,  $B\left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{7}{3}\right)$ ,

$C\left(-\frac{13}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{9}{7}\right)$ . Az  $ABC$  sík egyenlete:  $35x + 4y + 6z + 71 = 0$ . Távolság:

$$\frac{120}{\sqrt{1277}} \text{ egység.}$$

97. A négy tetraéder csúcsai:

a)  $A(5, 4, 2)$ ,  $B(3, 2, 1)$ ,  $C(3, 4, 2)$ ,  $D(-3, 2, -1)$ .

b)  $A(5, 4, 2)$ ,  $B(3, 2, 1)$ ,  $C(3, 4, 2)$ ,  $D(9, 6, 5)$ .

c)  $A(5, 4, 2)$ ,  $B(7, 6, 3)$ ,  $C(3, 4, 2)$ ,  $D(-3, 2, -1)$ .

d)  $A(5, 4, 2)$ ,  $B(7, 6, 3)$ ,  $C(3, 4, 2)$ ,  $D(9, 6, 5)$ .

Mind a négy tetraéder térfogata  $\frac{4}{3}$  egység.

5. Analitikus térgeometria

98. Ha létezik ilyen,  $d$  hosszúságú szakasz, legyen  $\mathbf{v} = [x, y, z]$  olyan vektor, amelyre  $|\mathbf{v}| = d$  teljesül. Az egyenesek egységnyi hosszúságú irányvektorai a feladatbeli sorrendben:

$$\mathbf{v}_1 = \left[\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{6}{7}\right], \mathbf{v}_2 = \frac{1}{9}[1, 4, -8] \text{ és } \mathbf{v}_3 = \frac{1}{9}[-1, 8, 4].$$

A  $\mathbf{v}_1\mathbf{v} = 2$ ,  $\mathbf{v}_2\mathbf{v} = 3$ ,  $\mathbf{v}_3\mathbf{v} = 1$  egyenletrendszerből származó

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6z = 14 \\ x + 4y - 8z = 27 \\ -x + 8y + 4z = 9 \end{cases}$$

egyenletrendszert csak az  $x = -5$ ,  $y = 2$ ,  $z = -3$  számhármassal elégíti ki. Ezért egy és csak egy olyan  $d$  hosszúságú szakasz létezik, amely kielégíti a feladatbeli feltételeket. Hosszúsága:  $\sqrt{38}$ .

99. A  $P$  pont és az adott egyenes távolsága: 6. Két sík elégíti ki a feltételt. Egyenleteik:  $2x - y + 2z + 9 = 0$  és  $2x - y + 2z - 27 = 0$ .
100. A négy metszéspont:  $E(2, -1, 5)$ ,  $F(3, -2, 3)$ ,  $G(5, 5, 1)$ ,  $H(4, 2, 3)$ . A hajlásszög koszinusza:  $\frac{1}{\sqrt{21}}$ .

101. A felbontás lehetséges, mert az egyenesek irányvektorai nem komplanárisak. Az  $e$ ,  $f$ ,  $g$ , illetve a  $g$  egyenesekkel párhuzamos összetevők rendre:

$$\mathbf{v}_1 = [8, 4, -6], \mathbf{v}_2 = [-1, 10, -4], \text{ illetve } \mathbf{v}_3 = [3, -8, 2].$$

102. A meghatározandó sík legyen  $S: Ax + By + Cz + D = 0$ . A hasáb élének metszéspontjai az  $S$  síkon:  $M_1\left(0, 0, -\frac{D}{C}\right)$ ,  $M_2\left(0, 1, -\frac{B+D}{C}\right)$ ,  $M_3\left(1, 0, -\frac{A+D}{C}\right)$  ( $C \neq 0$ ). (A  $C = 0$  esetben az  $S$  sík párhuzamos az éllel.) Ha a kimetszett háromszög egyenlő oldalú, akkor  $M_1M_2 = M_1M_3 = M_2M_3$ . Vegyük még figyelembe azt is, hogy az adott  $P$  és  $Q$  pont rajta van az  $S$  síkon. A feladat feltételeit két sík elégíti ki; egyenleteik:  $x + y + z + 1 = 0$  és  $x + y - z + 3 = 0$ .

103. A páronkénti metszésvonalak egyenletrendszerei:

$$e_1: \begin{cases} x = t + 3 \\ y = t + 1 \\ z = t \end{cases}, \quad e_2: \begin{cases} x = u + 1 \\ y = u + 3 \\ z = u \end{cases}, \quad e_3: \begin{cases} x = v + 4 \\ y = v + 4 \\ z = v. \end{cases}$$

Ebből leolvasható, hogy a páronkénti metszésvonalak párhuzamosak. A sík általános egyenlete:  $Ax + By + Cz + D = 0$ . A  $P$  ponton átmenő és az a vektorral párhuzamos síkokra teljesülni kell a következőknek:  $A + B + C + D = 0$  és  $A = B$ . Ebből következik, hogy a metsző síkok általános egyenlete:

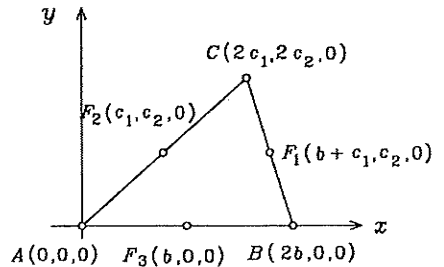
$$(1) \quad Ax + Ay - (2A + D)z + D = 0, \text{ ahol } D \neq 0.$$

(A  $D = 0$  esetben az  $Ax + Ay - 2Az = 0$  egyenletű síkot kapjuk, amely párhuzamos a hasáb élével.) Az (1) egyenletű síkok és az  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  egyenesek

közös pontjai legyenek rendre  $M_1$ ,  $M_2$  és  $M_3$ . Kapjuk, hogy  $\overline{M_1M_2} = [2, 2, 0]$ ,  $\overline{M_1M_3} = \left[\frac{4A}{D} + 1, \frac{4A}{D} + 3, \frac{4A}{D} + 4\right]$ ,  $\overline{M_2M_3} = \left[\frac{4A}{D} + 3, \frac{4A}{D} + 1, \frac{4A}{D} + 4\right]$ , valamint  $M_1M_2 = 2\sqrt{2}$  és  $M_1M_3 = M_2M_3$ . Ezzel állításunkat igazoltuk. Az  $M_1M_2M_3$  háromszögek között nincs derékszögű, mert ha lenne, akkor  $M_1M_3 = M_2M_3 = 2$ -nek teljesülni kellene. Könnyen belátható, hogy ez lehetetlen.

## 5. Analitikus térgeometria

104. Az előző feladat megoldásához hasonlóan járunk el. Egyetlen ilyen sík létezik. Egyenlete:  $y - z + 1 = 0$ .
105. Legyen a metsző sík  $S$ , az általa lemetszett kisebb tetraéder pedig  $AB'C'D$ . Az  $ABCD$  tetraéder  $A$  csúcsához tartozó  $m$  és az  $AB'C'D$  tetraéder  $A$  csúcsához tartozó  $m'$  magasságára  $m' = m/\sqrt[3]{2}$  adódik. E feladatnál  $m = 2/\sqrt{3}$ , és a  $BCD$  sík egyenlete:  $x+y+z-1=0$ . A felező sík egyenlete:  $x+y+z+d=0$  alakú;  $d$  értéke a  $|3+d|/\sqrt{3} = 2/(\sqrt{3}\sqrt[3]{2})$  egyenlet alapján vagy  $-3 + 2/\sqrt[3]{2}$ , vagy  $-3 - 2/\sqrt[3]{2}$ . De az  $S$  síknak a  $BCD$  sík és az  $A$ -n átmenő, vele párhuzamos ( $x+y+z-3=0$ ) egyenletű sík között kell haladnia; tehát  $-3 < d < -1$ . A felező sík egyenlete:  $x+y+z-3+2/\sqrt[3]{2}=0$ .
106. A  $t = u = 0$  paraméterekhez tartozó pont az  $e$ , illetve az  $f$  egyenesen  $E(x_1, y_1, z_1)$ , illetve  $F(x_2, y_2, z_2)$ ; irányvektoruk  $\mathbf{v}_1 = [a_1, b_1, c_1]$ , illetve  $\mathbf{v}_2 = [a_2, b_2, c_2]$ . A két egyenes akkor és csak akkor egymásikú, ha  $\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \overrightarrow{EF} = 0$ . Ez a vegyes szorzat a feladatbeli determinánssal egyenlő.
107. Az  $e$  egyenest tartalmazó és az  $S$  síkra merőleges sík normálvektora  $\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$ , ahol  $\mathbf{v}$  az  $e$  egyenes irányvektora, az  $\mathbf{u}$  pedig a keresett  $S'$  sík normálvektora. Tekintsük az egyenes  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  pontját, és legyen  $P(x, y, z)$  a tér tetszőleges pontja. A  $P$  pont akkor és csak akkor van rajta az  $S'$  síkon, ha a  $\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n}$  skaláris szorzat zérus.
108. A bizonyítandó tulajdonság csak a négy csúcs egymáshoz viszonyított helyzetétől függ. Ezért a koordináta-rendszert úgy célszerű megválasztani, hogy a számolás lehetőleg kevés fáradsággal járjon és áttekinthető legyen. A tetraéder csúcsai:  $A, B, C, D$ . Az  $ABC$  háromszöget az  $xy$  tengelysíkban, az ábra szerinti elrendezésben vesszük fel. A  $D$  csúcs:  $D(2d_1, 2d_2, 2d_3)$ . Az  $AB, AC$  és  $CB$  élre merőleges felező síkok egyenlete rendre:



$$x = b, \quad c_1x + c_2y - c_1^2 - c_2^2 = 0, \quad (b - c_1)x - c_2y - b^2 + c_1^2 + c_2^2 = 0.$$

Ez a három sík egy közös  $e$  egyenesen halad át, melynek egyenletrendszeré:

$$e : \quad x = b, \quad y = \frac{c_1^2 + c_2^2 - bc_1}{c_2}.$$

Az  $AD$  él felező merőleges síkja:  $S : d_1x + d_2y + d_3z - (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) = 0$ . Bevezetjük a következő jelöléseket:  $L = (c_1^2 + c_2^2 - bc_1)/c_2$  és  $K = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ . Az  $e$  egyenes és az  $S$  sík metszéspontja:  $M = \left(b, L, \frac{K - d_1b - d_2L}{d_3}\right)$ . Kimutatjuk, hogy a  $DM$  és  $AM$  szakaszok egyenlő hosszúságúak.

$$\overline{AM}^2 = b^2 + L^2 + \left(\frac{K - d_1b - d_2L}{d_3}\right)^2,$$

$$\overline{DM}^2 = (b - 2d_1)^2 + (L - 2d_2)^2 + \left(\frac{K - d_1b - d_2L}{d_3} - 2d_3\right)^2.$$



## 5. Analitikus térgeometria

A műveletek és az összevonás elvégzése után kapjuk, hogy valóban  $DM = AM$ . Mivel az  $e$  egyenes minden pontja egyenlő távolságra van  $A$ -tól,  $B$ -től és  $C$ -től, ezért  $DM = BM = CM$  is teljesül. Ezekből következik, hogy az  $M$  pont rajta van a  $BD$  és  $DC$  élek felező merőleges síkjain is.

109.1. megoldás. Az előző feladat megoldásának elején mondottakat itt is alkalmazhatjuk. Legyen az egyik egyenes az  $x$  tengely, a másik pedig legyen párhuzamos az  $xy$  tengelysíkkal. Tegyük fel, hogy a két egyenes szöge  $\alpha$  ( $\neq 0$ ). Legyen  $A(a, 0, 0)$  és  $B(b, 0, 0)$  az  $x$  tengely két, egymástól adott  $r$  távolságra levő (különböző tetszőleges) pontja. A másik egyenesen pedig a  $C(c_1, c_2, k)$  és a  $D(d_1, d_2, k)$  pontot tűzzük ki úgy, hogy távolságuk adott  $s$  legyen. A két szakaszra  $r = |a - b|$  és

$$(1) \quad s^2 = (c_1 - d_1)^2 + (c_2 - d_2)^2$$

áll fenn. Az  $ABCD$  tetraéder térfogata:

$$(2) \quad V = \frac{1}{6} |\vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AD}| = \frac{1}{6} |a - b| |k| |c_2 - d_2|.$$

A  $CD$  egyenes egy irányvektora  $\mathbf{v} = [\cos \alpha, \sin \alpha, 0]$ ; egyenletrendszere

$$CD: \quad x = c_1 + t \cos \alpha, \quad y = c_2 + t \sin \alpha, \quad z = k.$$

A  $D$  pont rajta van ezen az egyenesen, ezért  $(d_1 - c_1) \sin \alpha = (d_2 - c_2) \cos \alpha$ . Ez utóbbiból és az (1) egyenletből kapjuk, hogy  $|c_2 - d_2| = s \sin \alpha$ . Ezt (2)-be helyettesítve:  $V = \frac{1}{6} r |k| s \sin \alpha$ . Tehát a térfogat csak az egyenesek egymáshoz viszonyított helyzetétől és a két szakasz hosszától függ, ezért (adott egyenesek esetén) konstans.

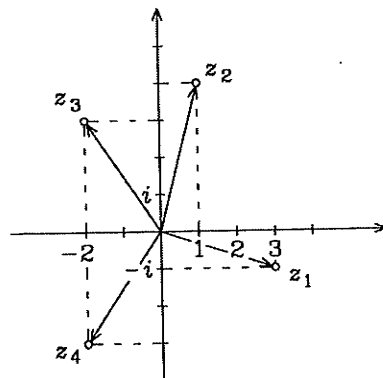
2. megoldás. Legyen  $e$  és  $f$  a két egyenes;  $AB$ , illetve  $CD$  a rajtuk felvett  $r$ , ill.  $s$  hosszúságú szakasz ( $r$  és  $s$  adott pozitív számok). Továbbá legyen  $\alpha = (e, f) \angle$ . Ismeretes, hogy

$$\begin{aligned} d(e, f) &= \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{CD} \cdot \vec{AD}|}{|\vec{AB} \times \vec{CD}|} = \frac{|\vec{AB} \cdot (\vec{AD} - \vec{AC}) \cdot \vec{AD}|}{rs \sin \alpha} = \\ &= \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AD}|}{rs \sin \alpha} = \frac{6V}{rs \sin \alpha}, \end{aligned}$$

ahol  $V$  az  $ABCD$  tetraéder térfogata. Ebből már következik az első megoldás utolsó mondataként megfogalmazott állítás.

## 6. Komplex számok (megoldások)

1. Lásd ábra.



2.  $z_1 = 2 + 2i, \quad z_2 = -3 + 2i,$   
 $z_3 = 4 - 2i, \quad z_4 = -1 - i.$

3.  $\bar{z}_1 = 2 - 7i, \quad \bar{z}_2 = -3 + 5i,$   
 $\bar{z}_3 = -5i, \quad \bar{z}_4 = i, \quad \bar{z}_5 = -9, \quad \bar{z}_6 = 0.$

4. Teljes indukcióval.

5. Teljes indukcióval.

6. Az előző feladatból következik  $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$  esetén.

7.  $6 + 2i, \quad -2 + 8i.$       8.  $-2 - 2i, \quad 8 - 6i.$       9.  $2 - 4i, \quad 6 - 2i.$

10.  $-7 + 23i.$       11.  $-3 - i.$       12.  $23 + 14i.$

13. A nevező konjugáltjával bővítjük a törtet, majd elvégezzük a szorzásokat:

$$\frac{3 + 2i}{1 - i} = \frac{3 + 2i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{(3 - 2) + (2 + 3)i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i.$$

14.  $\frac{7}{5} + \frac{9}{5}i.$

15.  $\frac{2}{3} - \frac{5}{3}i.$

16. A nevezőbeli szorzás elvégzése és a konjugálttal való bővítés, vagy a nevezőbeli tényezők konjugáltjaival való bővítés és a szorzások elvégzése után:  
 $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i.$

17.  $-\frac{7}{625} - \frac{24}{625}i.$

18.  $-\frac{11}{25} + \frac{2}{25}i,$

19.  $\frac{1 - \sqrt{3}}{4} + \frac{1 + \sqrt{3}}{4}i.$

20.  $-\frac{1}{26} - \frac{5}{26}i.$

21.  $-\frac{1}{10} + \frac{1}{10}i.$

22.  $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{17}{25} - \frac{19}{25}i, \quad \bar{z}_1 = \frac{23}{25} + \frac{11}{25}i, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{23}{25} - \frac{11}{25}i,$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = -\frac{17}{25} + \frac{19}{25}i, \quad \frac{z_1}{|z_2|} = \frac{1}{5} - i, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\sqrt{26}}{5}.$$

23.  $\frac{6}{5} + \frac{2}{5}i, \quad -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i, \quad \frac{3}{5} + \frac{11}{5}i, \quad \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i.$

24.  $\sqrt{157} + 1$  (l. T 6.6).      25.  $-7 + 3i.$

26. 1.

27.  $\frac{|3 + 4i||2 + i|}{|1 + 2i||4 + 3i|} = 1.$

28.  $\frac{|\sqrt{x^2 + y^2} + i\sqrt{2xy}|}{|(x - y) + 2i\sqrt{xy}|} = 1.$



## 6. Komplex számok

62.  $3003a^{10}$   $\left(\binom{m}{3} = \binom{m}{12}\right)$  miatt  $12 = m - 3$ , azaz  $m = 15$ ).

63.  $35x^5$ .

64.  $n = 7$ .

65.  $x_1 = 10$ ,  $x_2 = \frac{1}{\sqrt{10^5}}$ .

66.  $x_1 = 10$ ,  $x_2 = 10^{-4}$ .

67. Alkalmazzuk a binomiális tételt az  $a = 1$ ,  $b = 1$  esetre.

68. Alkalmazzuk a binomiális tételt az  $a = 1$ ,  $b = -1$  esetre.

69. Útmutatás: Adjunk az egyenlet mindkét oldalához 1-et, és használjuk fel a  $k! + k \cdot k! = k!(k+1) = (k+1)!$  összefüggést.

70.  $\binom{n}{1} = n \binom{n-1}{0}$ ,  $2 \binom{n}{2} = n \binom{n-1}{1}$ , ...,  $n \binom{n}{n} = n \binom{n-1}{n-1}$ , ezért  
 $\binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + \dots + n \binom{n}{n} = n \left[ \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{n-1}{n-1} \right]$ ,  
ami 67. szerint egyenlő  $n \cdot 2^{n-1}$ -nel.

71. Bontsuk fel az egyes tagokat a  $(k+1) \binom{n}{k} = \binom{n}{k} + k \binom{n}{k}$  összefüggés alapján. Ezzel visszavezetjük a feladatot a 67. és 70. feladatokra.

72. Kiegészítve az egyenlet bal oldalát az  $1 - \binom{n}{0} + \binom{n}{1} - \binom{n}{1}$  összeggel és felhasználva a  $(k-1) \binom{n}{k} = k \binom{n}{k} - \binom{n}{k}$  összefüggést, visszavezetjük a feladatot a 67., és 70. feladatokra.

73. Induljunk ki az egyenlet jobb oldalából. A binomiális együtthatók additív tulajdonsága alapján

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-2} = \\ &= \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-3}{k-3} = \dots \\ &= \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} + \dots + \binom{n-k}{0}. \end{aligned}$$

74. Az  $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$  összefüggés miatt a bal oldal első két tagjának összege:  
 $\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} = \binom{n+2}{1}$ , ezért az első három tag összege:  $\binom{n+2}{1} + \binom{n+2}{2} = \binom{n+3}{2}$ , és így tovább, a bal oldal első  $k$  tagjának összege  $\binom{n+k}{k-1}$ , így a teljes bal oldal  $\binom{n+k}{k-1} + \binom{n+k}{k}$ , ami valóban egyenlő a jobb oldallal.

75. Lásd a 73. feladat megoldását.

76. Lásd a 73. feladat megoldását.

## 6. Komplex számok

77. A binomiális együtthatók additív tulajdonsága alapján  

$$\binom{n}{2} = \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}, \quad \binom{n}{4} = \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{4}, \dots$$
 Beírva ezeket a megfelelő tagok helyébe, visszavezettük a feladatot a 67. feladatra.
78. Lásd az előző feladat megoldását.
79. Hasonlítsuk össze az  $(a+b)^{2n}$  binomiális kifejtésében és az  $(a+b)^n(a+b)^n$  szorzatban az  $a^n b^n$ -es tagok együtthatóit és vegyük figyelembe a binomiális együtthatók szimmetriatulajdonságát.
80. Ha  $n = 2m - 1$ , akkor a szimmetriatulajdonság miatt  

$$\binom{n}{0}^2 - \binom{n}{1}^2 = 0, \quad -\binom{n}{1}^2 + \binom{n}{n-1}^2 = 0, \dots, \quad (-1)^{m-1} \binom{2m-1}{m-1} + (-1)^m \binom{2m-1}{m} = 0,$$
 tehát az összeg valóban 0.  
 Az  $n = 2m$  eset vizsgálatához szorozzuk össze az  $(a+b)^n$  és  $(a-b)^n$  binomiális kifejtését, és adjuk össze az  $a^n b^n$ -es tagok együtthatóit. Akkor éppen az egyenlet bal oldalát kapjuk. Az  $(a^2 - b^2)^n$  kifejtésében pedig az  $a^n b^n$ -es tag együtthatója  $(-1)^m \binom{2m}{m}$ .
81. Egyrészt írjuk fel  $(1+i)^{8n}$ -t a binomiális tétel alapján, másrészt mutassuk meg, hogy  $(1+i)^8 = 16$ .
82.  $72(\sqrt{3}i - 1)$ .      83.  $-128(1+i)$ .      84.  $-8(1+i)$ .
85.  $-27$ .
86.  $\operatorname{Re} z = 3, \operatorname{Im} z = 0, r = 3, \varphi_0 = 0$ .    87.  $\operatorname{Re} z = -8, \operatorname{Im} z = 0, r = 8, \varphi_0 = \pi$ .
88.  $\operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z = -2, r = 2, \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$ .
89.  $\operatorname{Re} z = 1, \operatorname{Im} z = 1, r = \sqrt{2}, \varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ .
90.  $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}, \operatorname{Im} z = -\frac{\sqrt{3}}{2}, r = 1, \varphi_0 = \frac{4\pi}{3}$ .
91.  $\operatorname{Re} z = 2, \operatorname{Im} z = -2\sqrt{3}, r = 4, \varphi_0 = \frac{5\pi}{3}$ .
92.  $\operatorname{Re} z = 4\sqrt{3}, \operatorname{Im} z = -4, r = 8, \varphi_0 = \frac{7\pi}{6}$ .
93.  $\operatorname{Im}(x+iy+i) = y+1 > 2, \operatorname{Im} z > 1$ .    94.  $\operatorname{Im}(ix-y) = x \geq 1, \operatorname{Re} z \geq 1$ .
95. Az  $x = 1$  számot ábrázoló ponton átmenő és a valós tengelyre merőleges egyenes.
96.  $\operatorname{Re}(2x + 2iy) = 2x < 4, x < 2, \operatorname{Re} z < 2$ .
97. Annak a szögtartománynak a pontjai, amelyet az  $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z \geq 0$  feltételekkel meghatározott félegyenes és a képzetes tengely pozitív fele határol, az előbbi félegyenes pontjait kizárva, az utóbbi pontjait hozzászámítva a tartományhoz.
98.  $\arg\{(1+i)z\} = \arg(1+i) + \arg z$  miatt a feltétel átírható a  $-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$  alakra; azok a pontok elégítik ki, amelyek az  $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Re} z$  egyenletű egyenestől "jobbra" eső félsíkban vannak (az egyenest kizárva).
99.  $3 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$ .      100.  $z = 2\sqrt{3} \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$ .

## 6. Komplex számok

101.  $4(\cos \pi + i \sin \pi)$ .

102.  $5\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ .

103.  $12 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$ .

104.  $3\sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$ .

105.  $\left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$ .

106.  $4 \left( \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$ .

107.  $\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$ .

108.  $\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i$ .

109.  $2i$ .

110.  $-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ .

111.  $-2i$ .

112.  $-3 - \sqrt{3}i$ ,

113.  $x^2 + y^2 = a^2$ . Origó középpontú,  $a$  sugarú kör.

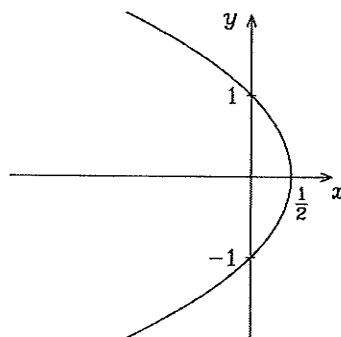
114.  $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ . A  $(0, a)$  középpontú,  $a$  sugarú kör.

115.  $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ . Az  $(a, 0)$  középpontú,  $a$  sugarú kör.

116.  $\cos \varphi$ -vel való beszorzás után kapjuk, hogy  $r \cos \varphi = 2$ , tehát a görbe az  $x = 2$  egyenletű egyenes.

117.  $y = a$  egyenletű egyenes.

118.  $(1 + \cos \varphi)$ -vel való beszorzással kapjuk, hogy  $r + r \cos \varphi = 1$ , azaz  $\sqrt{x^2 + y^2} + x = 1$ , ahonnan átalakítás után az  $y^2 + 2x - 1 = 0$  ill.  $y^2 = 2\left(\frac{1}{2} - x\right)$  egyenlethez jutunk, melynek képe az ábrán látható parabola.



119.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  egyenletű ellipszis.

120.  $y^2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$  egyenletű parabola.

121.  $y^2 = 4a(4 - x)$  egyenletű parabola.

122.  $y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$  egyenletű parabola.

123.  $\frac{(x - 3)^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ . Ellipszis, amelynek a középpontja a  $(3, 0)$  pont, tengelyei az  $x$ , illetve  $y$  tengellyel párhuzamosak, a tengelyek félhossza 5, illetve 4.

124.  $\frac{\left(x + \frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$ . A görbe  $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$  középpontú ellipszis, melynek az

$x$ , ill.  $y$  tengellyel párhuzamos tengelyei vannak; a tengelyek félhossza:  $a = \frac{4}{3}$ ,

ill.  $b = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

125. Mivel  $r$  csak nemnegatív lehet, alkalmas feltételt kell keresnünk arra, hogy a jobb oldal pozitív legyen.  $\cos \varphi = \frac{x}{r}$  helyettesítéssel  $r = \frac{16}{3 - 5\frac{x}{r}}$ , amiből

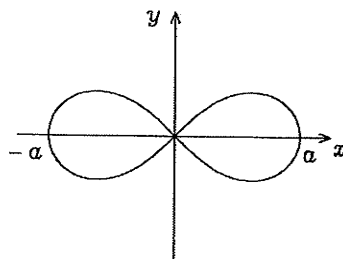
## 6. Komplex számok

$3r = 16 + 5x$ . Emiatt  $16 + 5x \geq 0$ , azaz  $x > -\frac{16}{5}$ . Az  $r$  helyébe  $\sqrt{x^2 + y^2}$ -et írva a  $3r = 16 + 5x$  egyenletből átalakítások után az

$$\frac{(x+5)^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$

egyenletet kapjuk. Ez olyan hiperbola egyenlete, melynek valós tengelye az  $x$  tengelyen, képzetes tengelye az  $x = -5$  egyenletű egyenesen van és a tengelyek és félhossza 3 ill. 4; ezek miatt a hiperbola egyik fókusza az origóban van. Az  $x > -\frac{16}{5}$  feltétel miatt a hiperbolának csak a jobb oldali ágát vehetjük figyelembe.

126. Négyzetreemelés és átalakítás után  $r^2 = a^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$ . Felhasználva a T 6.11 tétel egyenleteit:  $x^2 + y^2 = a^2\left(\frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2}{x^2+y^2}\right)$ , amiből a keresett egyenlet, az ábrán is látható ún. **lemniskáta** egyenlete:  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ .



127.  $6(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$ .  
 128.  $6\sqrt{2}(\cos 130^\circ + i \sin 130^\circ)$ .  
 129.  $2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$ .  
 130.  $6\left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}\right)$ .  
 131.  $\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)$ .  
 132.  $-\cos \varphi + i \sin \varphi = (-1)(\cos \varphi - i \sin \varphi) = (\cos \pi + i \sin \pi)(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) = \cos(\pi - \varphi) + i \sin(\pi - \varphi)$ .  
 133.  $\cos(\pi + \varphi) + i \sin(\pi + \varphi)$ .  
 134. Forgassuk el a  $z_2 - z_1$  helyvektorát  $60^\circ$ -kal, ill.  $-60^\circ$ -kal és adjuk a  $z_1$  helyvektorához. A két megoldás:  
 $z_3 = (4 - 3i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + (1 + 4i) = 3 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{5}{2} + 2\sqrt{3}\right)i \approx 5,59807 + 5,96410i$ ,  
 $z'_3 = (4 - 3i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + (1 + 4i) = 3 - \frac{3\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{5}{2} - 2\sqrt{3}\right)i \approx 0,401924 - 0,964101i$ .  
 135. A  $z_2 - z_1$  helyvektorának  $90^\circ$ -os (ill.  $-90^\circ$ -os) elforgatásával kapott vektort hozzáadva a  $z_1$  és a  $z_2$  helyvektorához kapjuk az első (ill. második) megoldást. A  $z_2 - z_1$  helyvektorát  $45^\circ$ -kal ill.  $-45^\circ$ -kal elforgatva, a kapott vektorokat  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -vel szorozva és  $z_1$  helyvektorához adva kapjuk a harmadik megoldást. A három megoldás:

$$\begin{aligned} z_3 &= 8i, & z_4 &= 7 + 4i; \\ z'_3 &= -8 - 6i, & z'_4 &= -1 - 10i; \\ z''_3 &= \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i, & z''_4 &= -\frac{5}{2} - \frac{9}{2}i. \end{aligned}$$

A harmadik megoldás egyszerűbben úgy is megkapható, hogy  $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$  helyvektorához hozzáadjuk a  $z_2 - z_1$  helyvektorára merőleges vektor  $\frac{1}{2}$ -szeresét.

## 6. Komplex számok

136. Három megoldás van:  $z_4 = z_2 + z_3 = 3 + i$ ,  $z'_4 = z_3 - z_2 = 1 + 5i$ ,  $z''_4 = z_2 - z_3 = -1 - 5i$ .
137.  $z_{k+1} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}\right)$ , ( $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ).
138.  $z_{k+1} = i + (3 - 5i)\left(\cos\frac{2k\pi}{5} + i \sin\frac{2k\pi}{5}\right)$ , ( $k = 1, 2, 3, 4$ ).
139.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}(\cos 103^\circ + i \sin 103^\circ)$ .      140.  $\frac{3}{4}(\cos 62^\circ + i \sin 62^\circ)$ .
141.  $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$ .      142.  $\frac{-4}{19} - \frac{\sqrt{3}}{19}i$ .
143.  $-64$ .      144.  $-i$ .      145.  $-64(\sqrt{3} + i)$ .
146.  $-\frac{1 + \sqrt{3}i}{2024}$ .      147.  $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$ .      148.  $\frac{i}{49}$ .
149.  $-8(1 + \sqrt{3}i)$ .      150.  $-256$ .      151.  $-16\sqrt{3} + 16i$ .
152. 1,  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .      153.  $-1$ ,  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .
154. 1,  $i$ ,  $-1$ ,  $-i$ .
155. 1,  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,  $-1$ ,  
 $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .
156.  $2i$ ,  $-\sqrt{3} - i$ ,  $\sqrt{3} - i$ .      157.  $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ ,  $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$ .
158.  $3\left(\cos\frac{3\pi}{10} + i \sin\frac{3\pi}{10}\right)$ ,  $3\left(\cos\frac{7\pi}{10} + i \sin\frac{7\pi}{10}\right)$ ,  $3\left(\cos\frac{11\pi}{10} + i \sin\frac{11\pi}{10}\right)$ ,  
 $3\left(\cos\frac{15\pi}{10} + i \sin\frac{15\pi}{10}\right)$ ,  $3\left(\cos\frac{19\pi}{10} + i \sin\frac{19\pi}{10}\right)$ .
159.  $\cos\frac{\pi}{7} + i \sin\frac{\pi}{7}$ ,  $\cos\frac{3\pi}{7} + i \sin\frac{3\pi}{7}$ ,  $\cos\frac{5\pi}{7} + i \sin\frac{5\pi}{7}$ ,  
 $\cos\pi + i \sin\pi = -1$ ,  $\cos\frac{9\pi}{7} + i \sin\frac{9\pi}{7}$ ,  
 $\cos\frac{11\pi}{7} + i \sin\frac{11\pi}{7}$ ,  $\cos\frac{13\pi}{7} + i \sin\frac{13\pi}{7}$ .
160.  $\sqrt{2}(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ , ahol  $\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}$ , ill.  $\varphi = 45^\circ, 165^\circ, 285^\circ$ . Algebrai alakba is felírható az eredmény, hisz a  $\frac{\pi}{4}$ -hez tartozó gyök  $1 + i$ , a másik két gyök például a harmadik egységgyökkel való beszorzás útján kapható meg:  $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)i$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)i$ .
161. Kalkulátorral legalább négy tizedes pontossággal számolva  $2 + i$ ,  $-2 - i$  adódik. A következő megfontolás szerint — amely bármely komplex szám négyzetgyökének kiszámítására használható — ezek pontos értékek. Legyen  $u^2 = (x + yi)^2 = z$ , akkor  $x^2 - y^2 = 3$ ,  $2xy = 4$ , az utóbbiból  $y = \frac{2}{x}$ , és ennek felhasználásával  $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$  adódik, amiből,  $x_{1,2}^2 = 4$ ,  $x_{3,4}^2 = -1$ , s mivel  $x$  valós, ez utóbbi hamis gyök. Tehát  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -2$ ,  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = -1$ ; a megoldás:  $2 + i$ ,  $-2 - i$ .



## 6. Komplex számok

162.  $3 + 4i, -3 - 4i$ , lásd az előző feladat megoldását.

163. Az  $\sqrt[n]{c^n z} = c \sqrt[n]{z}$  egyenlőség mindkét oldalán  $n$  különböző szám szerepel, és mindkét oldal  $n$ -edik hatványa  $c^n z$ , így az egyenlőség valóban fennáll.

164. Ekvivalens átalakításokkal  $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$ , és ebből

$$z + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \text{ adódik.}$$

Az előző feladat szerint  $\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ . Így  $z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

165.  $z_1 = 2 + i, z_2 = -2 + i$ .

166.  $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 1 + i$ .

167.  $z_1 = -3 + i, z_2 = -2 + i$ .

$$\begin{aligned} 168. z_{1,2} &= \frac{-1 + 2i + \sqrt{(1 - 2i)^2 + 8i}}{2} = \frac{-1 + 2i + \sqrt{-3 + 4i}}{2} = \\ &= \frac{-1 + 2i \pm (1 + 2i)}{2}, \quad z_1 = 2i, \quad z_2 = -1. \end{aligned}$$

169. A Moivre-képlet és a binomiális tétel alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \cos 5x + i \sin 5x &= (\cos x + i \sin x)^5 = \\ &= \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x + i(5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x). \end{aligned}$$

Amiből

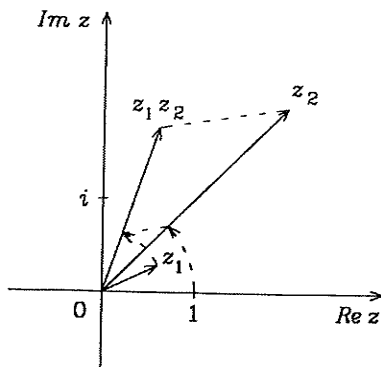
$$\cos 5x = \cos^5 x - 10 \cos^3 x (1 - \cos^2 x) + 5 \cos x (1 - \cos^2 x)^2 = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x.$$

170. l. az előző feladat megoldását!

171. 1. megoldás: A 161. feladat megoldásában leírt módon  $-1 + 4i$  és  $1 - 4i$ .

2. megoldás: Legyen  $-15 - 8i = 17(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , ahol  $\cos \varphi = -\frac{15}{17}$  és  $\sin \varphi = -\frac{8}{17}$ ,  $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2} (< 2\pi)$ . A  $-15 - 8i$  szám négyzetgyökei:  $\pm \sqrt{17}(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2})$ . Mivel  $\frac{\pi}{2} < \frac{\varphi}{2} < \pi$ , ezért  $\cos \frac{\varphi}{2} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$  és  $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{4}{\sqrt{17}}$ . Ezekből a négyzetgyökök:  $-1 + 4i$  és  $1 - 4i$ .

172. Ha  $z_1 = 0$  vagy  $z_2 = 0$ , akkor a  $z_1 z_2$ -höz tartozó helyvektor a  $0$ . Ha  $z_1, z_2 \neq 0$ , akkor  $\frac{|z_1 z_2|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{1}$ , továbbá ha  $z_1$  argumentuma  $\varphi_1$  és  $z_2$  argumentuma  $\varphi_2$ , akkor  $z_1 z_2$  argumentuma  $\varphi_1 + \varphi_2$ . Ezek alapján a szerkesztés menete a következő ábráról leolvasható.



173. Ha két komplex szám egyenlő, akkor abszolút értékük is, ezért  $|z|(|z|^{n-1} - 1) = 0$ . Ebből következik, hogy  $|z| = 0$  vagy  $|z|^{n-1} = 1$ , azaz  $z = 0$  vagy  $|z| = 1$ . Az eredeti egyenlet mindkét oldalát  $z$ -vel megszorozva, a  $z \neq 0$  esetben

## 6. Komplex számok

az  $|z|^2 = z^{n+1}$  egyenletet kapjuk. Ebből a  $|z| = 1$  miatt  $z^{n+1} = 1$  adódik. Összegezve, az egyenlet megoldásai: 0 és a  $\cos \frac{2k\pi}{n+1} + i \sin \frac{2k\pi}{n+1}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ )  $(n+1)$ -edik egységgyökök.

174. Jelöljük az összeget  $s_{n,j}$ -vel. Könnyen belátható, hogy

$e_k = e_1^k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ), ezért  $s_{n,j} = 1 + e_1^j + e_1^{2j} + \dots + e_1^{nj}$ . Ha  $e_1^j = 1$ , akkor  $s_{n,j} = n+1$ . Ha  $e_1^j \neq 1$ , akkor  $s_{n,j} = \frac{1 - (e_1^j)^{n+1}}{1 - e_1^j} = \frac{1 - (e_1^{n+1})^j}{1 - e_1^j} = \frac{1 - 1^j}{1 - e_1^j} = 0$ .

175. Ha  $e = 1$ , akkor az összeg:  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ . Ha  $e \neq 1$ , akkor  $1 + 2e + 3e^2 + \dots + (n+1)e^n = (1 + e + e^2 + \dots + e^n) + (e + e^2 + \dots + e^n) + \dots + (e^{n-1} + e^n) + e^n = \frac{1 - e^{n+1}}{1 - e} + e \frac{1 - e^n}{1 - e} + \dots + e^{n-1} \frac{1 - e^2}{1 - e} + e^n \frac{1 - e}{1 - e} = \frac{(1 + e + e^2 + \dots + e^n) - (n+1)e^{n+1}}{1 - e}$ . Mivel  $1 + e + e^2 + \dots + e^n = 0$  és  $e^{n+1}$ , ezért a végeredmény  $\frac{n+1}{e-1}$ .

176.  $|(1+i)z^3 + iz| \leq |(1+i)z^3| + |iz| = |1+i||z|^3 + |i||z| = \sqrt{2}|z|^3 + |z| < \sqrt{2} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} < 2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ .

177. Az egyenlőség bal oldalát írjuk fel trigonometriai alakban.

178. Az egyenlőség bal oldalát írjuk fel trigonometriai alakban.

179. Írjuk fel az  $(1+i)^n$  kifejezést a binomiális tétel segítségével. A keresett összeg:  $2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}$  (l. a 177. feladatot!).

180. A keresett összeg:  $2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}$  (l. az előbbi feladatot!).

181. Használjuk fel, hogy a  $-1$  komplex  $n$ -edik egységgyökeinek összege 0. Továbbá azt, hogy ha  $n$  páratlan szám, akkor a komplex egységgyökök a komplex számsíkon olyan szabályos  $n$ -szög csúcsai, amely középpontja a 0, körülírt köre egységsugarú és szimmetrikus a valós tengelyre. Ezeket az észrevételeket alkalmazzuk az  $n = 11$  esetre.

182. L. az előző feladat megoldását!

183. L. 181. feladat megoldását!

## 7. Sorozatok (megoldások)

1.  $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$ .
2.  $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{5}$ .
3.  $1, \sqrt{6}, \sqrt{7} - 1, \sqrt{2}, 3 - \sqrt{3}, \sqrt{10} - 2$ .
4.  $\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .
5.  $1, 4, 9, 16, 25$ .
6.  $3, 9, 18, 30, 45$ .
7.  $-2, 2, -4, 4, -6$ .
8.  $-1, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{3}{8}$ .
9.  $a_1 = \sum_{k=1}^1 \left( \sum_{j=1}^k j \right) = \sum_{j=1}^1 j = 1, a_2 = \sum_{k=1}^2 \left( \sum_{j=1}^k j \right) = \sum_{j=1}^1 j + \sum_{j=1}^2 j = 1 + (1 + 2) = 4$ , hasonlóan  $a_3 = 10, a_4 = 20, a_5 = 35$ .
10.  $\left( \frac{i-1}{i+1} \right)^n = i^n$ , ezért:  $1, i, -1, -i, 1$ .
11.  $\left( \frac{(i-1)^3}{2} \right)^n = (i+1)^n$ , így:  $1, i+1, 2i, 2(i-1), -4$ .
12.  $a_n = 2n$ .
13.  $a_n = -8 - 5n$ .
14.  $a_n = 3 \sum_{k=1}^n \frac{1}{10^k} = \frac{10^n - 1}{3 \cdot 10^n}$ .
15.  $a_n = (-0, 1)^n$ .
16.  $a_n = 235 \sum_{k=1}^n \frac{1}{10^{3k}} = \frac{235}{999} \left( 1 - \frac{1}{10^{3n}} \right)$ .
17.  $1 + \frac{1}{2^{n-1}}$ .
18.  $a_n = 1 + (-1)^n$ .
19.  $a_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$  vagy "utasítással"  $a_n = \begin{cases} -1, & \text{ha } n = 4k - 3 \text{ vagy } 4k - 2; \\ 1, & \text{ha } n = 4k - 1 \text{ vagy } 4k. \end{cases}$
20.  $a_n = \frac{n^2 + 1}{5n - 2}$ .
21.  $a_n = \cos \frac{n\pi}{3}$ .
22.  $a_n = \begin{cases} k, & \text{ha } n = 2k - 1; \\ \frac{1}{k+1}, & \text{ha } n = 2k. \end{cases}$
23.  $a_n = i^{2n-1}$ .
24.  $a_n = \cos \frac{2n\pi}{3} + i \sin \frac{2n\pi}{3}, n \in \mathbf{N}$ .
25.  $(i-1)^{n+4} = -4(i-1)^n$ , ezért  $a_n = (i-1)^n, n \in \mathbf{N}$ .
26. A sorozat minden tagja  $-1$ .
27.  $2, \frac{3}{2}, 1, 0$ ; az 5. elem már nem létezik.
28.  $1, 2, \frac{1}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{-5}{8}$ .
29.  $1, 2, \frac{5}{2}, \frac{29}{10}, \frac{941}{290}$ .
30.  $-1, i+1, 3i, i-9, 80-17i$ .
31.  $2i, i-3, 9-5i, 57-89i, -4671-10145i$ .
32.  $i, j, -k, i, j$ .
33.  $i, j, k, 0, 0$ .
34. Ha  $u = u_1 + iu_2$  és  $v = v_1 + iv_2$ , akkor  $|u-v| = \sqrt{(u_1-v_1)^2 + (u_2-v_2)^2}$ .
35. Tetszőleges  $a, b \in M$  vektorokra

$$d(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{ha } a \neq b, \\ 0, & \text{ha } a = b; \end{cases}$$

ezért csak a háromszög-egyenlőtlenséggel kell részletesebben foglalkozni. Legyen  $a, b, c \in M$ . Ha van köztük két egyenlő vektor, akkor a háromszög-egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül, mégpedig egyenlőséggel. Ha  $a, b$  és  $c$  között nincsenek egyenlők, akkor  $d(a, b) + d(b, c) = 2 > 1 = d(a, c)$ .

## 7. Sorozatok

36. Ha  $H$  korlátos, akkor van olyan  $Q$  pont a térben és olyan  $v$  pozitív valós szám hogy a  $H$  minden  $P$  pontjára  $d(Q, P) < v$ . Ebből  $d(O, P) \leq d(O, Q) + d(Q, P) < d(O, Q) + v$ , azaz  $H$  minden pontja benne van az  $O$  középpontú  $d(O, Q) + v$  sugarú gömb belsejében. Az állítás megfordítása nyilvánvaló. A feladat komplex számokra vonatkozó része hasonlóan bizonyítható.
37. Csak a háromszög-egyenlőtlenség bizonyítását vázoljuk. Legyenek  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  komplanáris egységvektorok. Ha az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok szöge  $\alpha$ , a  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorok szöge  $\beta$ , akkor

$$\begin{aligned} d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) &= |\mathbf{a} \times \mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{c}||\sin(\alpha \pm \beta)| = |\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta| \leq \\ &|\sin \alpha \cos \beta| + |\cos \alpha \sin \beta| = |\sin \alpha| |\cos \beta| + |\cos \alpha| |\sin \beta| \leq \\ &|\sin \alpha| + |\sin \beta| = d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + d(\mathbf{b}, \mathbf{c}). \end{aligned}$$

38. Csak a háromszög-egyenlőtlenség bizonyítását adjuk meg. Ha  $A(a_1, a_2)$ ,  $B(b_1, b_2)$  és  $C(c_1, c_2)$  az  $\mathbf{R}^2$  metrikus tér tetszőleges pontjai, akkor

$$\begin{aligned} d(A, C) &= |a_1 - c_1| + |a_2 - c_2| = |a_1 - b_1 + b_1 - c_1| + |a_2 - b_2 + b_2 - c_2| \\ &\leq |a_1 - b_1| + |b_1 - c_1| + |a_2 - b_2| + |b_2 - c_2| = d(A, B) + d(B, C). \end{aligned}$$

Az  $(1, 0)$  pont 1 sugarú környezete a  $(0, 0), (1, -1), (2, 0), (1, 1)$  csúcspontú négyzet belső pontjainak halmaza az  $(1, 0)$  pont kivételével.

39. Az előző feladathoz hasonló módon járhatunk el. Az  $(1, -1)$  ponttól 1 távolságra lévő pontok halmaza a  $(0, 0), (2, 0), (2, -2), (0, -2)$  csúcspontú négyzet határpontjai.
40. Minden  $x(\in A)$  elemre  $\inf A \leq x$ , s így  $-\inf A \geq -x$ . Ez azt jelenti, hogy  $-\inf A$  a  $B$  egy felső korlátja. Ha  $w$  a  $B$  egy felső korlátja, akkor minden  $x(\in A)$  elemre  $-x \leq w$ , azaz  $x \geq -w$ . Következésképpen  $-w \leq \inf A$ , s így  $w \geq -\inf A$ , tehát  $-\inf A = \sup B$ .
41. A metrikától megkövetelt első három tulajdonság teljesülését könnyen beláthatjuk. A háromszög-egyenlőtlenség a Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenséggel (1.85) a következőképpen bizonyítható: Legyenek  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  és  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  az  $\mathbf{R}^n$  halmaz tetszőleges pontjai.

$$\begin{aligned} (d(A, B) + d(B, C))^2 &= \left( \sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k - b_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n (b_k - c_k)^2} \right)^2 = \\ &\sum_{k=1}^n |a_k - b_k|^2 + \sum_{k=1}^n |b_k - c_k|^2 + 2 \sqrt{\sum_{k=1}^n |a_k - b_k|^2 \sum_{k=1}^n |b_k - c_k|^2} \geq \\ &\sum_{k=1}^n |a_k - b_k|^2 + \sum_{k=1}^n |a_k - b_k|^2 + 2 \sqrt{\left( \sum_{k=1}^n |a_k - b_k| |b_k - c_k| \right)^2} = \\ &\sum_{k=1}^n (|a_k - b_k| + |b_k - c_k|)^2 \geq \sum_{k=1}^n (|a_k - b_k + b_k - c_k|)^2 = \end{aligned}$$

7. Sorozatok

$$\sum_{k=1}^n (a_k - c_k)^2 = d(A, C)^2.$$

42. Bármely  $p \in X$  és  $q \in X$  esetén  $d(p, p) = 0$  és  $d(p, q) = d(q, p) \geq 0$ . Legyen most  $r$  az  $X$  halmaz egy tetszőleges további eleme. Ha  $p = r$ , akkor  $d(p, q) + d(q, r) \geq 0 = d(p, r)$ . Ha  $p \neq r$  és  $p = q$ , akkor  $q \neq r$ , s így  $d(p, q) + d(q, r) = 1 = d(p, r)$ . Ha  $p \neq r$  és  $p \neq q$ , akkor  $d(p, q) + d(q, r) \geq 1 = d(p, r)$ .
43. Legyen  $H \subseteq X$  és  $p \in H$ . Például a  $p$  pont 1 sugarú teljes környezete  $H$ -hoz tartozik (a  $p$  pont 1 sugarú teljes környezetében ugyanis csupán a  $p$  pont van), azaz  $H$  minden pontja belső pont. Ez azt jelenti, hogy  $H$  nyílt halmaz. Hasonlóan látható be, hogy  $X - H$  minden pontja  $H$ -nak külső pontja. Mivel, így  $H$ -nak határpontja nincs,  $H$  zárt is.
44. Nem. Például:  $(3 - 2)^2 + (2 - 1)^2 \not\leq (3 - 1)^2$ .
45. Igen.  $d(x, y) \geq 0$ ,  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ;  $d(x, y) = d(y, x)$ .

$$\sqrt{|x - y|} + \sqrt{|y - z|} \geq \sqrt{|x - z|} \iff$$

$$|x - y| + |y - z| + 2\sqrt{|x - y||y - z|} \geq |x - z|,$$

de  $|x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z|$ , s ebből már adódik a háromszög-egyenlőtlenség.

46. Nem.  $d(x, y) = 0 \iff x = \pm y$ . 47. Igen.
48. A sorozat nem korlátos, mert a pontok második koordinátáiból alkotott sorozat nem korlátos.
49. A sorozat korlátos, mert minden  $n$ -re:

$$0 < \frac{3n + 1}{2n} \leq \frac{3n + n}{2n} = 2; \quad 0 < \frac{n - 1}{n} < 1.$$

50. Korlátos. 51. Korlátos.

52.  $|z_n| = \left( \frac{|1 + i|}{\sqrt{2}} \right)^n = 1$ , ezért a sorozat korlátos.

53. A rekurzív definícióról áttérhetünk a sorozat egyetlen képlettel való megadására:  $z_n = (1 + i)^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Bármely  $v$  pozitív valós számra:  $|z_n| \geq v$ , ha  $n \geq \frac{\lg v}{\lg \sqrt{2}}$ , ezért a sorozat nem korlátos.

54. A sorozat korlátos, mert a koordinátákból alkotott mind a két sorozat korlátos.

55. Korlátos.

56. Bármely  $\varepsilon > 0$  esetén:

$$|a_n - a| = \left| \frac{2n - 1}{2n + 1} - 1 \right| = \frac{2}{2n + 1} < \varepsilon, \quad \text{ha } n > n_0 = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}.$$

Ha  $\varepsilon = 10^{-2}$ , akkor  $n_0 = 99,5$ ; azaz a 100. elemtől kezdve esnek a sorozat elemei az 1-nek  $10^{-2}$  sugarú teljes környezetébe, tehát  $n_1 = 100$ .

## 7. Sorozatok

57.  $n_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1, n_1 = 1000.$

58. Ha  $n > 2$ , akkor  $\left| \frac{n+2}{3n-8} - \frac{1}{3} \right| = \frac{14}{3(3n-8)}$ . Ebben az esetben  $|a_n - a| < \varepsilon$ ,  
ha  $n > \frac{14}{9\varepsilon} + \frac{8}{3}$ .  $n_1 = 1403.$

59.  $n_0 = \frac{1}{\log_3(\varepsilon + 1)}, n_1 = 100.$

60. Mivel  $0 < a_n < \frac{1}{3}$ , ezért  $\varepsilon \geq \frac{1}{3}$  esetén a sorozat minden tagja benne van az 1 szám  $\frac{1}{3}$  sugarú környezetében, ezért küszöbszámmak választható bármely 1-nél kisebb valós szám. Ha  $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$ , akkor

$$a_n \in \left(\frac{1}{3} - \varepsilon, \frac{1}{3} + \varepsilon\right) \text{ akkor és csak akkor, ha } n > n_0 = \log_4 \frac{1 - 3\varepsilon}{9\varepsilon}. \quad n_1 = 1.$$

61.  $|a_n - a| = \left| \lg \frac{n+1}{n+2} \right| = \lg \frac{n+2}{n+1} < \varepsilon$ . Ebből  $n_0 = \frac{2 - 10^\varepsilon}{10^\varepsilon - 1}$ .  $n_1 = 500.$

62.  $n_0 = \frac{4}{\varepsilon^2 + 2\varepsilon}, n_1 = 20.$       63.  $n_0 = \log_3 \frac{2}{\varepsilon}, n_1 = 101.$

64.  $|a_n - a| = \left| \frac{9(-1)^{n-1}}{5(5n + (-1)^{n-1})} \right| = \begin{cases} \frac{9}{5(5n-1)}, & \text{ha } n \text{ páros;} \\ \frac{9}{5(5n+1)}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$

$$\frac{9}{5(5n-1)} < \varepsilon \iff \frac{9}{25\varepsilon} + \frac{1}{5} < n,$$

$$\frac{9}{5(5n+1)} < \varepsilon \iff \frac{9}{25\varepsilon} - \frac{1}{5} < n.$$

Ezek szerint  $n_0 = \frac{9}{25\varepsilon} + \frac{1}{5}$ .  $n_1 = 37.$

65. Az  $|a_n - a| = \frac{n}{n^3 + 1} < \varepsilon$  egyenlőtlenség megoldása elég nehézkes. Helyette a következő becslést végezhetjük el:

$$\frac{n}{n^3 + 1} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

Ha  $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ , akkor az eredeti egyenlőtlenség is biztosan teljesül. Így viszont  $n_1$ -et is csak becsülni tudjuk, azaz az 32. elemtől kezdve minden elem biztosan benne van a 0 szám  $10^{-3}$  sugarú teljes környezetében.

66. Az állítást valós számsorozatra bizonyítjuk (azaz  $m = 1$  esetre), de  $m > 1$ -re hasonlóan bizonyítható. Legyen az  $[a_n]$  valós sorozat korlátos, akkor van olyan  $k \in \mathbb{R}^+$ , hogy  $|a_n| < k$ . Tegyük fel, hogy a sorozatnak  $a$  torlódási helye, de nem határértéke, akkor választható olyan  $\delta \in \mathbb{R}^+$ , hogy  $(a - \delta, a + \delta) \subset [-k, k]$  és a  $(-k, a - \delta)$  vagy a  $(a + \delta, k)$  intervallumba a sorozatnak végtelen sok eleme esik. A Bolzano-Weierstrass-tétel (T 7.17) szerint kiválasztható a  $(-k, a - \delta)$  vagy a  $(a + \delta, k)$  intervallumba eső konvergens részsorozat, azaz a sorozatnak legalább két torlódási helye van.

7. Sorozatok

67. Legyen például  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . Megmutatjuk, hogy nincs olyan  $n_0$  küszöbszám, hogy ha  $n > n_0$ , akkor  $|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{2}$  minden  $p$  pozitív egész számra teljesül. Tegyük fel, hogy létezik az  $n_0$  küszöbszám, és legyen  $n$  az a pozitív egész szám, amelyre  $n_0 < n \leq n_0 + 1$ . Mivel

$$\frac{1}{2} > |a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} \geq \frac{p}{n+p}$$

(minden tört nevezője helyett  $n+p$ -t írva), ezért minden  $p \in \mathbf{N}^+$ -ra:

$$\frac{p}{n+p} < \frac{1}{2}. \text{ Ebből: } p < n, \text{ ami lehetetlen.}$$

68. Nem. Az előző feladat nem konvergens sorozata teljesíti ezt a feltételt:

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \text{ ha } n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

69.  $\lg(n+1) > k \iff n > 10^k - 1, \quad n_0 = 10^{10}.$

70.  $\frac{n-1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n} - 1 > k \iff n > (k+1)^2, \quad n_0 = 10^6 + 1.$

71. 1. megoldás:

$$\frac{n^2}{n+1} \geq \frac{n^2}{n+n} = \frac{n}{2} > k, \text{ ha } n > 2k.$$

2. megoldás:

$$\frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2-1}{n+1} + \frac{1}{n+1} = n-1 + \frac{1}{n+1} > n-1 \geq k, \text{ ha } n \geq k+1.$$

3. megoldás:

$$\frac{n^2}{n+1} > k \iff n^2 - kn - k > 0 \iff n > \frac{k + \sqrt{k^2 + 4k}}{2}. \quad n_0 = 21.$$

72. Bármely  $\varepsilon (\in \mathbf{R}^+)$ -hoz van olyan  $n_1 \in \mathbf{N}^+$ , hogy ha  $n > n_1$ , akkor  $0 \leq a_n < \varepsilon$ . Ha  $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$  és  $n > n_2$ , akkor  $|b_n - 0| = |b_n| \leq a_n < \varepsilon$ . Ez azt jelenti, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

73. Jelölje  $|z|$  egészrészét szokásosan  $\text{Ent } |z|$ , és legyen  $n_0 = \text{Ent } |z| + 1$ . Akkor

$$n \geq n_0 \text{ esetén } \frac{|z|}{n} < 1 \text{ és}$$

$$\left| \frac{z^n}{n!} \right| = \frac{|z|^n}{n!} = \frac{|z|}{1} \frac{|z|}{2} \dots \frac{|z|}{n_0} \frac{|z|}{n_0+1} \dots \frac{|z|}{n} \leq \frac{|z|^{n_0} |z|}{n_0! n} = \frac{|z|^{n_0+1}}{n_0! n},$$

ha  $n > n_0$ , amiből már 72. feladat alapján adódik az állítás.

74. A  $k = 0$  esetben a T 7.27 tétel szerint igaz az állítás. Legyen  $k \geq 1$ . A sorozat alulról korlátos (0 például egy alsó korlátja). A sorozat valamilyen indextől kezdve szigorúan monoton csökkenő:

$$\frac{n^k}{a^n} > \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} \iff a > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \iff \frac{1}{\sqrt[k]{a-1}} < n.$$

( $\sqrt[k]{a}$  legyen egyenlő  $a$ -val.) A T 7.22 tételt felhasználva kapjuk, hogy a sorozat konvergens. Tekintsük a sorozat páros indexű elemeinek részsorozatát. A T 7.15 tétel szerint:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)^k}{a^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^k \left(\frac{1}{a}\right)^n \frac{n^k}{a^n} = 2^k \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0,$$

miel  $a > 1$  miatt  $0 < \frac{1}{a} < 1$ .

75. Használjuk fel az  $\frac{n^k}{n!} = \frac{a^n n^k}{n! a^n}$  azonosságot és az előző két feladat eredményét.

76. Ha  $q = 0$ , akkor az állítás nyilvánvalóan igaz. Legyen  $0 < |q| < 1$ , akkor  $\left|\frac{1}{q}\right| > 1$ . Alkalmazzuk a 74. feladat állítását az  $a = \left|\frac{1}{q}\right|$  és  $k = 1$  esetre. Ezután a 72. feladat segítségével kapjuk az állítást, ha  $a_n = |nq^n|$  és  $b_n = nq^n$ . (Megjegyezzük, hogy a feladat a 74. feladat nélkül is megoldható. Ehhez először megmutatjuk, hogy  $[|nq^n|]$  sorozat valamilyen indextől kezdve szigorúan monoton csökken, ha  $q \neq 0$ :  $n|q|^n > (n+1)|q|^{n+1} \iff n > n_0 = \frac{|q|}{1-|q|}$ . Mivel az  $[|nq^n|]$  ( $n > n_0$ ) sorozat alulról korlátos (0 egy alsó korlátja), így konvergens, s a legnagyobb alsó korlátjához tart. Tegyük fel, hogy a sorozatnak van egy  $k$  pozitív alsó korlátja, azaz minden  $n > n_0$  esetén:  $1 > |q| \geq \frac{\sqrt[k]{k}}{\sqrt[k]{n}} > 0$ .

Ismert, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[k]{k}}{\sqrt[k]{n}} = 1$ . Ez azt jelenti, hogy 1 bármely környezetéből a sorozatnak legfeljebb véges sok tagja marad ki, ami ellentmond az előbbi egyenlőtlenségnek. Ezért  $\lim_{n \rightarrow \infty} |nq^n| = 0$ . ( $n_0$ -nál kisebb vagy egyenlő indexű elemek nem változtatják meg a határértéket!))

77. Először mutassuk meg, hogy az  $[ \sqrt[n]{n!} ]$  sorozat szigorúan monoton növekvő, ezért a reciproka szigorúan monoton csökkenő. Mivel a sorozat pozitív tagú, ezért 0 egy alsó korlátja. A 73. feladat segítségével mutassuk meg, hogy nincs a sorozatnak pozitív alsó korlátja.

78. Van olyan  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , hogy  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ . A Moivre-képlet szerint  $z^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$ . Legyen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n\varphi = a$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n\varphi = b$ . Akkor  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n+1)\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos n\varphi \cos \varphi - \sin n\varphi \sin \varphi) = a \cos \varphi - b \sin \varphi$  és  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n-1)\varphi = a \cos \varphi + b \sin \varphi$ . Ha  $\cos \varphi \neq 1$ , akkor  $a = 0$  és  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n+1)\varphi = b \cos \varphi$  miatt,  $b = 0$ ; Így  $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$ , amiből következik, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n = 0$ , ami azonban lehetetlen. Így  $\cos \varphi = 1$ , azaz  $z = 1$ . Ebben az esetben a sorozat konvergens.

79. 1.megoldás:  $0 \leq \left| \sin n \frac{\pi}{\sqrt{2n\pi}} \right| \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$

2.megoldás: Egy korlátos és egy nullasorozat szorzata szintén nullasorozat.

80.  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad 1 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \leq 2^{\frac{1}{n}}$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$ . A rendőrlv

miatt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$ , ezért  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .



81. A Bernoulli-egyenlőtlenség (T 7.34) szerint:  $a_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geq 1 + \sqrt{n}$ .

Ebből:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

82.  $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{(-1)^n}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2k} = \frac{5}{2}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2k} = -\frac{3}{2}$  ( $k \in \mathbb{N}^+$ ),  $\frac{5}{2}$  és  $-\frac{3}{2}$  a sorozat torlódási helyei.

83.  $a_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n+1}, & \text{ha } n = 2k-1; \\ \left(\frac{n}{2}\right)^2, & \text{ha } n = 2k \text{ (} k \in \mathbb{N}^+ \text{)}. \end{cases}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2k-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k-1}{k+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}} = 1.$$

A sorozat egyetlen torlódási helye 1, de a sorozat nem konvergens.

84.  $a_n = \frac{2}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{1}{4}2^n} \rightarrow 0$ , ha  $n \rightarrow \infty$ .

85.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

86.  $-\infty$ .

87. A sorozatnak három torlódási helye van:  $0, 1, \frac{1}{2}$ .

88.  $\frac{n^3+1}{n^2+1} > \frac{n^3}{n^2+1} \geq \frac{n^3}{2n^2} = \frac{n}{2} \Rightarrow -\frac{n^3+1}{n^2+1} < -\frac{n}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

89.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p \left( a_0 + \frac{a_1}{n} + \dots + \frac{a_{p-1}}{n^{p-1}} + \frac{a_p}{n^p} \right)}{n^q \left( b_0 + \frac{b_1}{n} + \dots + \frac{b_{q-1}}{n^{q-1}} + \frac{b_q}{n^q} \right)} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{p-q} \frac{a_0}{b_0} = \begin{cases} 0, & \text{ha } p < q; \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{ha } p = q; \\ \infty, & \text{ha } p > q \text{ és } \frac{a_0}{b_0} > 0; \\ -\infty, & \text{ha } p > q \text{ és } \frac{a_0}{b_0} < 0. \end{cases}$$

90. 48.: divergens; 49.:  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$ ; 50.: divergens, 51.: divergens;

52.:  $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4}$ , a sorozat divergens; 53.: divergens; 54.:  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = i + j$ ; 55.:  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = i + j$ .

91. A törtet  $(n^2+i)$ -vel bővítve kapjuk, hogy  $\frac{n^4+n^2-1}{n^4+1} + i \frac{-n^4+2n^2}{n^4+1}$ . A T 7.28 tétel szerint:  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1 - i$ . A feladat egyszerűbben is megoldható:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i}{n} = 0, \text{ ezért } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-i\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{1-\frac{i}{n^2}} = 1 - i.$$

92.  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = i$ .

93. Divergens.

94.  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ .

95.  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{\left(\frac{i}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{i}{3}\right)^n} = 0$ , mert  $\left|\frac{i}{3}\right| < 1$ .

96. A sorozatnak csak két eleme van:  $0, -i$ .

97. A sorozat divergens, mert  $|1-i| = \sqrt{2}$ .

98. Alkalmazzuk a Moivre-képletet,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$ .

7. Sorozatok

99.  $\sum_{k=1}^n i^k = \frac{1-i^{n+1}}{1-i}$ ; a sorozat divergens, négy torlódási pontja van.
100.  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+i)^k} = \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{1+i}} = \left(1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{n+1}\right) \frac{i+1}{i}$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1-i$ .
101.  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = i$ .
102. A sorozat divergens, mert  $\frac{|1-3i|}{|1+2i|} = \sqrt{2}$ .
103.  $a_{n+1} = \frac{2n+1}{3n+4} > \frac{2n-1}{3n+1} = a_n \iff 6n^2+5n+1 > 6n^2+5n-4$ . Az utóbbi egyenlőtlenség minden  $n \in \mathbb{N}^+$ -re teljesül, ezért a sorozat szigorúan monoton növekvő.  $\sup\{a_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{4}{n}} = \frac{2}{3}$ ,  $\inf\{a_n\} = a_1 = \frac{1}{4}$ .
104. Az előző feladat megoldásában alkalmazott gondolatmenettel is dolgozhatunk, de most kevesebb számolással jár a következő:  $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{20n^2-5} > 0$  minden pozitív  $n$ -re, ezért a sorozat szigorúan monoton növekvő.  $\sup\{a_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{1}{2}$ ,  $\inf\{a_n\} = a_1 = -\frac{3}{5}$ .
- 105.
- $$a_{n+1} - a_n = \frac{n-2}{n(n+1)(n+2)} \begin{cases} > 0, & \text{ha } n > 2; \\ = 0, & \text{ha } n = 2; \\ < 0, & \text{ha } n < 2. \end{cases}$$
- Ebből következik, hogy  $a_1 > a_2 = a_3$ , és a harmadik elemtől a sorozat kezdve szigorúan monoton nő.  $\inf\{a_n\} = a_2 = a_3 = \frac{5}{6}$ ,  $\sup\{a_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .
106.  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  minden  $n$ -re, ezért a sorozat szigorúan monoton növekvő.  $\sup\{a_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ ,  $\inf\{a_n\} = a_1 = \frac{1}{3}$ .
107. A sorozat szigorúan monoton csökkenő,  $\inf\{a_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -25$ ,  $\sup\{a_n\} = a_1 = -\frac{124}{25}$ .
108. A sorozat szigorúan monoton növekvő.  $\sup\{a_n\} = 3$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 3$ ,  $\inf\{a_n\} = a_1 = \frac{2}{\sqrt{2}}$ .
109.  $a_2 < a_1$ , a sorozat a második elemtől szigorúan monoton nő. Ha  $n \geq 2$ , akkor  $\frac{n!}{n^2} = \frac{(n-1)!}{n} > \frac{(n-1)(n-2)}{n} \geq \frac{n^2-3n+2}{n} > \frac{n^2-3n}{n} = n-3$ , azaz a sorozat felülről nem korlátos, alulról korlátos.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $\inf\{a_n\} = a_2 = \frac{1}{2}$ .
110. A sorozat nem monoton, nem konvergens, alulról korlátos,  $\inf\{a_n\} = 0$ .
111. A 73. feladat alapján ( $z = k$ ) a sorozat határértéke 0.
- $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{k}{n+1} \begin{cases} > 1, & \text{ha } n < k-1; \\ = 1, & \text{ha } n = k-1; \\ < 1, & \text{ha } n > k-1. \end{cases}$$

$k \geq 3$  esetén a sorozat a  $(k-1)$ -edik elemig szigorúan monoton nő, a  $k$ -edik elemtől pedig szigorúan monoton csökken,  $a_{k-1} = a_k$ . A  $k = 2$  esetben  $a_1 = a_2$ , s a második elemtől a sorozat szigorúan monoton csökken. A  $k = 1$  esetben a sorozat szigorúan monoton csökken. A  $k \geq 2$  esetben  $\sup[a_n] = a_{k-1} = a_k = \frac{k^k}{k!}$ . A  $k = 1$  esetben  $\sup[a_n] = a_1 = 1$ .

112. A sorozat nem monoton, nem konvergens. Az  $[a_{2k}; k \in \mathbb{N}^+]$  részsorozat pozitív elemű, szigorúan monoton csökkenő, alulról korlátos, tehát konvergens (határértéke 0). Az  $[a_{2k-1}; k \in \mathbb{N}^+]$  részsorozat negatív elemű, szigorúan monoton növekvő, felülről korlátos, azaz konvergens. Ez azt jelenti, hogy a sorozat korlátos,  $\inf[a_n] = a_1 = -1$ ,  $\sup[a_n] = a_2 = 3$ . (Torlódási helyei 0 és 2.)

113.  $a_n = \frac{n(n+1)}{2(n+1)(n+10)} = \frac{1}{2} \frac{n+10-10}{n+10} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{10}{n+10}\right)$ . Ebből látható, hogy a sorozat szigorúan monoton nő, és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$ . A sorozat korlátos,  $\inf[a_n] = a_1 = \frac{1}{22}$ ,  $\sup[a_n] = \frac{1}{2}$ .

114. A sorozat nem monoton, váltakozó előjelű (oszilláló). Az  $[|a_n|]$  sorozat szigorúan monoton csökkenő és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Ebből következik, hogy  $\inf[a_n] = a_1 = -\frac{1}{2}$  és  $\sup[a_n] = a_2 = \frac{1}{3\sqrt[3]{2}+1}$ .

115. Mivel  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{5^{n+1}}$ , ezért a sorozat szigorúan monoton növekvő.

$a_n = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$ , így  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{4}$ . A sorozat korlátos,  $\inf[a_n] = a_1 = \frac{1}{5}$ ,  $\sup[a_n] = \frac{1}{4}$ .

116. Szigorúan monoton csökkenő, korlátos;  $\inf[a_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,  $\sup[a_n] = a_3 = 3$ .

117. A határérték  $\left(\frac{4}{3}\right)$  kiszámításakor használjuk fel a 74. feladat eredményét  $k = 2$  és  $a = 4$  esetben.

118. A határérték 1 (kiszámításakor használjuk fel a 74. feladat eredményét  $k = 1$  és  $a = 2$ , illetve  $k = 0$  és  $a = 2$  esetben).

119.  $a_n = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} \sin \frac{1}{n}$ .  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , mert egy egy nullasorozat és korlátos

szorzata.  $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2}$ , ezért  $0 < \sin \frac{1}{n+1} < \sin \frac{1}{n}$ . Továbbá  $\frac{2^n}{3^n+1} > \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}+1}$  minden  $n$ -re teljesül. Így

$$\frac{2^n}{3^n+1} \sin \frac{1}{n} > \frac{2^n}{3^n+1} \sin \frac{1}{n+1} > \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}+1} \sin \frac{1}{n+1},$$

azaz a sorozat szigorúan monoton csökkenő. A sorozat korlátos,  $\inf[a_n] = 0$ ,  $\sup[a_n] = a_1 = \frac{1}{2} \sin 1$ .

7. Sorozatok

120. A nevező gyöktelenítésével és  $\sqrt{n}$ -nel egyszerűsítve kimutatható, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ . A sorozat szigorúan monoton csökkenő és felülről korlátos,  $\sup\{a_n\} = a_1 = -1$ .

$$121. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1000}{n} + \frac{20}{n^2}}{0,001 - \frac{100}{n^2}} = 0. \quad 122. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^2 - 1}{n^2 + 1} = -3.$$

123.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1} = 0$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+3} = 1$ , ezért  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$ .

$$124. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3^2}.$$

$$125. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 1}{2\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 3} = \frac{1}{3}.$$

$$126. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

$$127. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

$$128. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

$$129. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

130.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3}{2n^2+3} = \infty$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-5n^2}{5n+1} = -\infty$ , ezért a sorozat határértékét tagonként nem számíthatjuk. Összevonva  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3-13n^2+3}{10n^3+2n^2+15n+3} = \frac{1}{5}$ .

131. Egyszerűsítjük a törtet  $n^{\frac{3}{2}}$ -del;  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ .

$$132. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

$$133. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4.$$

$$134. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

$$135. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5^{-5}.$$

$$136. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n(n+1)}{2(n+2)} - \frac{n}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{2n+1} = -\frac{1}{2}.$$

$$137. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+\dots+(2n-1) - (2+4+\dots+2n)}{\sqrt{n^2+1}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n(n+1)}{\sqrt{n^2+1}} = -1.$$

$$138. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

139. Felhasználva, hogy a számláló

$$1(1+1) + 2(2+1) + \dots + n(n+1) = (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + (1+2+\dots+n),$$

azt kapjuk, hogy a határérték  $\frac{1}{3}$ .

$$140. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} (na+k)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} (n^2 a^2 + 2kna + k^2) = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \left( (n-1)n^2 a^2 + 2na \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \right) = a^2 + a + \frac{1}{3}.$$

$$141. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-b}{1-a} \frac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}} = \frac{1-b}{1-a}.$$

142. Alkalmazzuk a binomiális tételt;  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1980$ .

$$143. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

144. Megmutatható (pl. teljes indukcióval), hogy  $\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\dots\sqrt[2^n]{2} = \sqrt[2^n]{2^{2^n-1}}$ , ezért  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1-\frac{1}{2^n}} = 2$ .

7. Sorozatok

$$145. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1})^2 - (\sqrt{2k-1})^2} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} (\sqrt{2n+1} - 1) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{2 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$146. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{n + \sqrt{n^2 + 1}} = -\infty. \quad 147. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

148. Felhasználva az  $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$  azonosságot:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\sqrt[3]{(n^2 - n^3)^2 - n^3} \sqrt{n^2 - n^3} + n^2} = \frac{1}{3}.$$

149. Használjuk az  $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$  azonosságot.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

150.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

151. Felhasználva azt, hogy a számláló első tényezője egy számtani sorozat kezdő elemeinek összege, ismert átalakítással azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n - 7}{\sqrt{n^2 - n} + \sqrt{n^2 + n}} = \frac{5}{2}.$$

152.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , mert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^{-n}}{2^{-n} - 3^n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{9}\right)^n}{\left(\frac{1}{6}\right)^n - 1} = 0$  és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{n^2 + 3} - n} = \frac{\sqrt{n^2 + 3} + n}{3(2n + \sqrt{4n^2 - 1})} = \frac{1}{6}, \text{ továbbá } |\sin n| < 1.$$

153.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

154. A 74. feladat alapján azonnal adódik, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . A feladat a rendőr-elv alkalmazásával is megoldható:  $0 < \frac{n}{3^n} < \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .

155.  $1 < \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2}} < \sqrt[n]{n}$ ; alkalmazzuk a rendőr-elvet;  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

156.  $1 < \sqrt[3n^2]{n^2 + 2n + 4} < \sqrt[3]{7n^2} = \sqrt[3]{7} (\sqrt[3]{n})^2$  miatt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

157.  $1 \leq 5n^2 - 30n + 21 \iff n \geq 6$ . Így, ha  $n \geq 6$ , akkor  $1 \leq \sqrt[5]{5n^2 - 30n + 21} < \sqrt[5]{5n^2}$ ; a rendőr-elvet alkalmazva  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ . A feladat megoldható az alábbi 166. feladat alapján is:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[5]{n})^2 \left(5 - \frac{30}{n} + \frac{21}{n^2}\right)^{\frac{1}{5}} = 1.$$

158.  $\frac{1}{3} \leq \frac{2n-1}{2n+1} < 1$ , ebből a rendőr-elv segítségével  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ . Alkalmazzuk az alábbi 160. vagy a 166. feladat eredményét is.

159.  $1 < \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}} < \sqrt[n]{n}$ , ebből a rendőr-elv segítségével kapjuk, hogy a határérték 1.

7. Sorozatok

160.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^{p-q} \sqrt[n]{\frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \dots + \frac{a_p}{n^p}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \dots + \frac{b_q}{n^q}}} = 1$ . (l. még az 89. és 166. feladatot.) Megjegyezzük, hogy ez alapján a 155. — 159. feladatok egyszerűen megoldhatók.

161. Először nemnegatív  $k$  egész számokra mutatjuk meg a feladat állítását teljes indukcióval.  $k = 0$  esetben nyilvánvalóan igaz az állítás. Tegyük fel, hogy valamely  $k \geq 0$  egész számra  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$ . Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k+1}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1+k}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{n+1}{n+1+k} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n+1}} = e^k e^1 1 = e^{k+1}. \end{aligned}$$

(Felhasználtuk azt, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$ ;

ez igaz, mivel  $\left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]$  részsorozata az  $\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]$  sorozatnak).

Legyen most  $k$  negatív egész szám, akkor az

$$\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+k-k}{n+k}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{-k}{n+k}\right)^{-k} \left(1 + \frac{-k}{n+k}\right)^{n+k}}$$

átalakítást az  $n > |k|$  esetben elvégezve kapjuk, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = \frac{1}{1 \cdot e^{-k}} = e^k$ .

162. Mivel az  $\left[\left(1 + \frac{k}{a_n}\right)^{a_n}\right]$  sorozat az  $e^k$ -hoz konvergáló  $\left[\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n\right]$  sorozat részsorozata, ezért igaz az állítás.

163.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{q_n}\right)^{q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{p}{q_n}\right)^{q_n}\right)^{\frac{1}{q}} = (e^p)^{\frac{1}{q}} = e^{\frac{p}{q}}$  (az előző feladat alapján).

164. Mivel  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ , feltehető, hogy  $a_n \neq 0, b_n \neq 0$ . (A legfeljebb véges sok 0 elem elhagyható, a konvergenciát nem befolyásolja.) Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor  $r \in \mathbf{Q}$ . Ha  $\text{Ent } a_n = k_n$  és  $r > 0$ , akkor

$$\begin{aligned} \frac{k_n + 1}{k_n + r + 1} \left(1 + \frac{r}{k_n + 1}\right)^{k_n + 1} &= \left(1 + \frac{r}{k_n + 1}\right)^{k_n} < \left(1 + \frac{r}{a_n}\right)^{a_n} \\ &< \left(1 + \frac{r}{k_n}\right)^{k_n + 1} = \left(1 + \frac{r}{k_n}\right)^{k_n} \left(1 + \frac{r}{k_n}\right). \end{aligned}$$

Az nyilvánvaló, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty$ , ezért a 162. és 163. feladatok, valamint a rendőr-elv alapján kapjuk, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{a_n}\right)^{a_n} = e^r$ . Ha  $r = 0$ , akkor az állítás nyilvánvaló.  $r < 0$  esetben a 161. feladat bizonyítását szószertint megismételve ( $k$  helyett  $r$ -rel és  $n$  helyett  $a_n$ -nel) kapjuk az állítást. Mivel  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ , így  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-b_n) = \infty$ . Tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{b_n}\right)^{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{-r}{-b_n}\right)^{-b_n}\right)^{-1} = (e^{-r})^{-1} = e^r.$$

Legyen most már  $r \neq 0$  tetszőleges valós szám. Akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{r} = \begin{cases} \infty, & \text{ha } r > 0; \\ -\infty, & \text{ha } r < 0. \end{cases}$$

Ez alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{a_n}\right)^{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{a_n}{r}}\right)^{\frac{a_n}{r}}\right)^r = e^r.$$

165. Ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  vagy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  vagy  $a_n$  felbontható két olyan részsorozatra, amelyek határértéke  $\infty$  illetve  $-\infty$ , ezért az előző feladat szerint az állítás igaz.

166. Mivel  $0 < a$ , ezért az  $[a_n]$  sorozatnak csak véges sok eleme lehet 0. Ezeket az elemeket hagyjuk el, azaz tegyük fel, hogy minden  $n$ -re  $a_n > 0$ . Így a T 7.41 tétel alapján:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{b_n \ln a_n} = e^{b \ln a} = a^b.$$

167. Például  $a_n = n$  és  $b_n = \frac{r}{n}$ .

168.  $a_n = 2^n$ ,  $b_n = \frac{1}{n}$  (l. még a 74. feladatot!).

169.  $a_n = 2^n$ ,  $b_n = -\frac{1}{n}$ .

170. Ha  $r > 1$ , akkor legyen például  $a_n = r^n$  és  $b_n = \frac{1}{n}$ . Ha  $0 < r < 1$ , akkor  $a_n = r^{-n}$  és  $b_n = -\frac{1}{n}$ . Ha  $r = 1$ , akkor például  $a_n = 2^n$  és  $b_n = \frac{1}{n^2}$  (l. még a 166. feladatot!).

171.  $a_n = 2^{n^2}$ ,  $b_n = \frac{1}{n}$ .

172.  $a_n = \sqrt[n]{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ,  $b_n = n$ .      173.  $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ ,  $b_n = n^2$ .

174. Ha  $0 \leq r < 1$ , akkor legyen például  $a_n = r^n$ ,  $b_n = \frac{1}{n}$ . Ha  $r > 1$ , akkor  $a_n = r^{-n}$ ,  $b_n = -\frac{1}{n}$ . Ha  $r = 1$ , akkor  $a_n = b_n = \frac{1}{n}$ .

7. Sorozatok

175.  $a_n = 2^{-2^n}$ ,  $b_n = -\frac{1}{n}$ .

176. Ha  $a_n > 0$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ , így  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_n}\right)^{b_n} = \infty$ , ami azt jelenti, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = 0$ .

177. e.

178.  $\sqrt{e}$ .

179.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{3n+2}\right)^{\frac{2n}{3n+2}} = (e^{-3})^{\frac{2}{3}} = e^{-2}$ .

Megjegyezzük, hogy a feladat megoldható a 161. — 166. feladatok alkalmazása nélkül is, de ebben az esetben bonyolultabb átalakítások szükségesek:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{3n+2}{3n+1} \cdot \frac{3n+1}{3n} \cdot \frac{3n-1}{3n-1}\right)^{2n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{3n+1}\right)^{3n+1} \cdot \frac{3n+1}{3n+2} \cdot \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n} \cdot \left(1 + \frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1} \cdot \frac{3n}{3n-1}}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt[3]{e \cdot 1 \cdot e \cdot 1}\right)^2} = e^{-2}, \end{aligned}$$

felhasználva azt, hogy konvergens sorozat határértéke megegyezik részsorozatának határértékével.

180. Mivel  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = e^{-2} < \frac{1}{2}$ , így valamely  $n$ -től  $0 < \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \leq \frac{1}{2}$ .

Ezért a rendőr-elv miatt

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n\right)^n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

181.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{2n+1}{n}} = 0 \cdot (e^{-1})^2 = 0$ .

182.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left(\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} = \infty$ .

183. 1.

184. 1.

185.  $e^{-2}$ .

186.  $-\frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-\frac{29}{3}}$ .

187.  $e^{-9} + 1$ .

188.  $-\infty$ .

189. Először teljes indukcióval megmutatjuk, hogy a sorozat szigorúan monoton csökkenő.  $a_1 > a_2 = 4$ . Tegyük fel, hogy  $a_n > a_{n+1}$ . Akkor  $a_{n+1} = 5 - \frac{6}{a_n} > 5 - \frac{6}{a_{n+1}} = a_{n+2}$ . Például teljes indukcióval az is megmutatható, hogy a sorozat alulról korlátos; minden  $n$ -re  $a_n > 3$ . Az  $a_1$ -re ez igaz. Tegyük fel, hogy  $a_n > 3$ . Ezt felhasználva  $a_{n+1} = 5 - \frac{6}{a_n} > 5 - \frac{6}{3} = 3$ . Ezzel megmutattuk,



7. Sorozatok

hogy a sorozat konvergens. A T 7.15 tétel szerint bármely  $k \in \mathbb{N}^+$  esetén  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ . Ezért  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{6}{a_n}\right) = 5 - \frac{6}{x}$ . Ebből:  $x^2 - 5x + 6 = 0$ ;  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$ . Mivel minden  $a_n > 3$ , a sorozat határértéke nem lehet 2; tehát  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$ .

190. Azonos átalakításokkal kapjuk, hogy  $a_{n+1}^2 - a = (a_n - a_{n+1})^2$ , azaz  $a_{n+1} \geq \sqrt{a}$ . Most megmutatjuk, hogy a második elemtől kezdve a sorozat monoton csökkenő:

$$a_{n+2} = \frac{1}{2} \left( \frac{a_{n+1}^2 + a}{a_{n+1}} \right) \leq \frac{1}{2} \frac{a_{n+1}^2 + a_{n+1}^2}{a_{n+1}} = a_{n+1}.$$

Tehát a sorozat konvergens. Határértéke:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{a}{a_n} \right) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right);$$

mivel  $x > 0$ , ebből  $x = \sqrt{a}$  adódik.

191. Felhasználva a számtani és mértani közép közötti azt az összefüggést, hogy ha  $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}^+$ , akkor

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} \leq \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k},$$

először megmutatjuk, hogy minden  $n$ -re  $a_{n+1} \geq \sqrt[k]{a}$ :

$$a_{n+1} = \frac{(k-1)a_n + \frac{a}{a_n^{k-1}}}{k} \leq \sqrt[k]{a_n^{k-1} \frac{a}{a_n^{k-1}}} = \sqrt[k]{a}.$$

A sorozat a második elemtől kezdve monoton csökkenő, mert

$$a_{n+2} = \frac{1}{k} \frac{(k-1)a_{n+1}^k + a}{a_{n+1}^{k-1}} \leq \frac{1}{k} \frac{(k-1)a_{n+1}^k + a_{n+1}^k}{a_{n+1}^{k-1}} = a_{n+1}.$$

A sorozat konvergens. Mivel

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \frac{1}{k} \left( (k-1)x + \frac{a}{x^{k-1}} \right),$$

ezért  $x = \sqrt[k]{a}$ .

192. Határérték csak olyan  $x$  szám lehet, amelyre teljesül az

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n^2 + a_n) = 2x^2 + x$$

egyenlet, azaz  $x = 0$ . A sorozat monoton növekvő, ezért akkor és csak akkor konvergens, ha felülről korlátos, s ebben az esetben a határérték a sorozat legkisebb felső korlátja. Ha tehát a sorozat konvergens, akkor minden  $n$ -re  $a_n \leq 0$ . Mivel  $a_{n+1} = a_n(2a_n + 1)$  és  $a_n, a_{n+1} \leq 0$ , ezért a  $2a_n + 1 \geq 0$  feltételnek teljesülni kell, s így  $a_n \geq -\frac{1}{2}$ . Kaptuk, hogy konvergencia esetén minden  $n$ -re  $-\frac{1}{2} \leq a_n \leq 0$ , ezért szükségképpen  $-\frac{1}{2} \leq a \leq 0$ . Most megmutatjuk, ha

## 7. Sorozatok

$-\frac{1}{2} \leq a \leq 0$ , akkor a sorozat konvergens (és természetesen a határérték 0). Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy akkor minden  $n$ -re:  $-\frac{1}{2} \leq a_n \leq 0$ . Az  $n = 1$ -re a feltétel miatt teljesül az állítás. Tegyük fel, hogy valamely  $n$ -re  $-\frac{1}{2} \leq a_n \leq 0$ . Akkor  $-a_n \geq 2a_n^2 \geq 0$ , azaz  $0 \geq 2a_n^2 + a_n \geq a_n$  ( $\geq -\frac{1}{2}$ ), tehát  $0 \geq a_{n+1} \geq -\frac{1}{2}$ . Mivel a sorozat monoton növekvő, ezért valóban konvergens. Tehát az  $[a_n]$  sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha  $-\frac{1}{2} \leq a \leq 0$ , s ebben az esetben  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Ha  $a < -\frac{1}{2}$  vagy  $a > 0$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ , mivel a sorozat monoton növekvő, de felülről nem korlátos.

193. A sorozat divergens, mert az  $x = x + \frac{1}{x^3 + 1}$  egyenletnek nincs megoldása.

Mivel a sorozat szigorúan monoton növekvő, ezért  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

194. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő.

$a_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{a} = a_2$  nyilván igaz és könnyen belátható, hogy az  $a_n < a_{n+1}$  feltevésből következik a  $a_{n+1} < a_{n+2}$  egyenlőtlenség. A sorozat felülről korlátos. Igazoljuk ezt is teljes indukcióval. Ekkor olyan  $k$  számot kell keresni, amelyre  $a_n \leq k$ -ből  $a_{n+1} \leq k$  következik. Ehhez az  $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n} \leq \sqrt{a + k}$  egyenlőtlenség miatt elegendő, ha  $\sqrt{a + k} \leq k$  vagyis  $a \leq k^2 - k$  igaz. Ha  $k = a + 1$ , akkor az előző egyenlőtlenség biztosan teljesül, továbbá  $a_1 \leq k$  is igaz lesz. A sorozat tehát bármely pozitív  $a$ -val konvergens. Az  $x$  határérték a következő egyenletnek tesz eleget:  $x = \sqrt{a + x}$ , ahonnan  $x > 0$  miatt:

$$x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

$$195. a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-1} = \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n-1} a_{n-2} = \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{2}{3} \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{n}.$$

196. l. az 1.56 feladatot!

$$197. a_{n+1} b_{n+1} = a_n b_n, \text{ ezért minden } n\text{-re } a_n b_n = ab.$$

$$198. 0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} \frac{a_n + b_n}{a_n + b_n} \leq \frac{a_n - b_n}{2}.$$

199. Az előbbi feladat alapján  $0 \leq a_n - b_n \leq \frac{a-b}{2^{n-1}}$ , azaz  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ , tehát  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . Jelöljük a közös határértéket  $x$ -szel, akkor

$$x^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab,$$

így  $x = \sqrt{ab}$ . (l. 197. feladatot!)

200. Az  $n = 1, 2$  esetekre közvetlenül ellenőrizhető az állítás. Mivel  $\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} + 1$ , ezért

$$\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Ezekből pedig azonnal következik, hogy ha valamely  $n$ -re és  $(n+1)$ -re igaz az állítás, akkor  $(n+2)$ -re is igaz.

201. Mivel  $\left| \frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \right| < 1$ , ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{1+\sqrt{5}} - \frac{2}{1+\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n}{1 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1}} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

202. Az általánosság megszorítása nélkül az  $AB$  szakasz hossza választható 1-nek. Legyen  $AC = 1 - x$  és  $CB = x$ . Így  $\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}$ , azaz  $x^2 + x - 1 = 0$ , amelynek egyetlen pozitív megoldása:  $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ .

203. Legyen  $r$  olyan szám, hogy  $|\lim_{n \rightarrow \infty} a_n| < r < 1$ . Van olyan  $n_0$  küszöbszám, hogy ha  $n > n_0$ , akkor  $|a_n| \leq r$ , ezért  $0 \leq |a_n|^n \leq r^n$ , amiből a rendőr-elv segítségével adódik az állítás.

204. Legyen  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = q > 1$ , akkor van olyan  $r$ , hogy  $1 < r < q$ . Ehhez az  $r$ -hez van olyan  $n_0$  küszöbszám, hogy ha  $n > n_0$ , akkor  $1 < r < a_n$ , s így  $r^n < a_n^n$ , amiből már adódik az állítás.

205. Először teljes indukcióval mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{m+1} n^{m+1} < 1^m + 2^m + \dots + n^m < \frac{1}{m+1} (n+1)^{m+1}.$$

Ebből a rendőr-elv alkalmazásával adódik az állítás.

206. l. 166. feladatot!

207. l.

208.  $\left(1 - \frac{1}{n^k}\right)^n = \left( \dots \left( \left(1 - \frac{1}{n^k}\right)^{n^k} \right)^{1/n} \dots \right)^{1/n}$  felhasználásával.

209. A 203. feladatot alkalmazhatjuk  $a_n = \sqrt[n]{b_n}$ -nel.

210. Ha  $a_n \geq 0$ , akkor  $1 \leq \sqrt[k]{1 + a_n} \leq 1 + a_n = 1 + |a_n|$ .

Ha  $-1 \leq a_n < 0$ , akkor  $1 \geq \sqrt[k]{1 + a_n} \geq 1 + a_n = 1 - |a_n|$ .

Így minden  $a_n \geq -1$ -re:  $1 - |a_n| \leq \sqrt[k]{1 + a_n} \leq 1 + |a_n|$ .

Mivel  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , ezért  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ , s így a rendőr-elv miatt

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{1 + a_n} = 1$ .

211. A Cauchy-féle konvergenciakritériumot (T 7.18) alkalmazzuk ( $p \in \mathbf{N}^+$ ):

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \frac{\cos(n+1)}{3^{n+1}} + \dots + \frac{\cos(n+p)}{3^{n+p}} \right| \leq$$

$$\frac{1}{3^{n+1}} + \dots + \frac{1}{3^{n+p}} = \frac{1}{3^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{3^p}}{1 - \frac{1}{3}} < \frac{1}{3^n}.$$

Legyen  $\varepsilon$  tetszőleges pozitív szám. Mivel  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ , ezért van olyan  $n_0$

küszöbszám, hogy ha  $n > n_0$ , akkor  $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$ , s így  $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ .

7. Sorozatok

212. A sorozat szigorúan monoton nő. Továbbá:

$$a_n < \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \dots + \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a-1} \left(1 - \frac{1}{a^n}\right) < \frac{1}{a-1}.$$

213. Jelöljük az  $a_1, a_2, \dots, a_k$  számok közül a legnagyobbat  $A$ -val. Becsüljük a sorozatot alulról és felülről is:

$$\therefore \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n} \leq A \sqrt[n]{k}.$$

Mivel rögzített  $k$ -ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{k} = 1$ , ezért a rendőr-elv szerint  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n} = A$ .

214.  $s_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n$ , így a beszínezett rész területe:  $1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n$ .  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$ .

215. Legyen  $[a_n]$  tetszőleges sorozat. 1.eset: A sorozatnak nincs legnagyobb eleme, akkor könnyen látható, hogy a sorozatból kiválasztható egy szigorúan monoton növekvő részsorozat. 2.eset: A sorozatnak van legnagyobb eleme, de véges sok elem elhagyásával olyan sorozatot kapunk, amelynek már nincs legnagyobb eleme. Erre a maradék sorozatra alkalmazzuk az 1. esetbeli megfontolást. 3.eset: Akárhogyan hagyunk is el véges sok elemet a sorozatból, a megmaradt elemek között mindig van legnagyobb. Ekkor egy monoton csökkenő részsorozatot tudunk kiválasztani a következő módon. Legyen a sorozat legnagyobb eleme  $a_{n_1}$ . Az  $a_1, a_2, \dots, a_{n_1}$  elemek elhagyásával kapott sorozatnak is van legnagyobb eleme, legyen ez  $a_{n_2}$ . Nyilvánvalóan  $a_{n_1} \geq a_{n_2}$ . Ezt az eljárást folytatva – miután kiválasztottuk az  $a_{n_k}$  elemet – az  $n_k$ -nál nagyobb indexű elemek között is van legnagyobb, így  $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, a_{n_{k+1}}, \dots$  a sorozat egy monoton csökkenő részsorozata.

216.  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$  ( $n > 1$ ), ezért  $1 < \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} < \frac{n}{n-1}$ .

Az eredmény a rendőr-elv alkalmazásával kapható meg.

217. Tudjuk, hogy  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ . Ebből egyrészt  $n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$ , másrészt  $1 < (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{n} n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ , s így  $\frac{n}{n+1} < n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$ , amiből a rendőr-elv alkalmazásával adódik az eredmény. Megjegyezzük, hogy a T 7.41 tétel alkalmazásával azonnal adódik az állítás:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \ln e = 1.$$

218. Felhasználva az  $\ln \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ln \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \ln(k-1) - 2 \ln k + \ln(k+1)$

azonosságot:  $a_n = -\ln 2 + \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ . A T 7.41 tétel szerint:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0, \text{ ezért } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\ln 2.$$



8. Függvényhatárérték és folytonosság

14.  $a = b = -1$ .      15.  $\{x \in \mathbf{R}; x \neq -1\}$ .      16.  $(-\infty, \frac{5}{2}]$ .  
 17.  $\mathbf{R}$ .      18.  $\emptyset$ .      19.  $\{0\}$ .  
 20.  $\{x \in \mathbf{R}; x \neq \pm 10\}$ .      21.  $\{x \in \mathbf{R}; x > \frac{4}{3}\}$ .      22.  $\{x \in \mathbf{R}; |x| > 2\}$ .  
 23.  $(4, \infty)$ .      24.  $\{x \in \mathbf{R}; x > 2\}$ .  
 25.  $\{x \in \mathbf{R}; -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ .  
 26.  $\{x \in \mathbf{R}; x < 2 \text{ vagy } x > 3\}$ .  
 27.  $\{x \in \mathbf{R}; \frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ .  
 28.  $(\frac{8}{3}, 3)$ .  
 29.  $(2; 3)$ .  
 30.  $\{x \in \mathbf{R}; -1 < x < 0 \text{ vagy } x > 1, x \neq 2\}$ .  
 31.  $e^{2k\pi} < x < e^{(2k+1)\pi}, k \in \mathbf{Z}$ .      32.  $x < 1 - \frac{1}{e}$ .  
 33.  $\text{Dom } f = \text{Dom } \frac{1}{f} = \mathbf{R}$ .  
 34.  $\text{Dom } f = [-2; \infty)$ ;  $\text{Dom } \frac{1}{f} = [-2; -1) \cup (-1; \infty)$ .  
 35.  $\text{Dom } f = [-\frac{1}{2}; \infty)$ ;  $\text{Dom } \frac{1}{f} = [-\frac{1}{2}; 0) \cup (0; \infty)$ .  
 36.  $\text{Dom } f = \mathbf{R}$ ;  $\text{Dom } \frac{1}{f} = \{x \in \mathbf{R}; x \neq \frac{\ln 2}{\ln 5 - \ln 2}\}$ .  
 37.  $\text{Dom } f = \text{Dom } \frac{1}{f} = \mathbf{R}$ .  
 38.  $\text{Dom } f = \{x \in \mathbf{R}; x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ ;  $\text{Dom } \frac{1}{f} = \{x \in \mathbf{R}; x \neq k\pi, x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ .  
 39.  $-1 \leq \cos 3x \leq 1 \iff 1 \geq -\cos 3x \geq -1 \iff 3 \geq 2 - \cos 3x \geq 1 \iff \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos 3x} \leq 1$ , ezért  $\text{Ran } f = [\frac{1}{3}; 2]$ ;  $\text{Dom } f = \mathbf{R}$ .  
 40.  $f(0) = 0$ . Legyen  $x \neq 0$ , akkor  $f(x) \neq 0$ . Oldjuk meg az  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$  egyenletet  $x$ -re, azaz  $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(f(x))^2}}{2f(x)}$ . Mivel  $\text{Dom } f = \mathbf{R}$ , ezért az egyenletnek minden  $x (\neq 0)$  esetén megoldhatónak kell lenni, tehát  $1 - 4(f(x))^2 \geq 0$ . Az  $f(0) = 0$  esetet is figyelembe véve:  $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ .  
 41. Az  $1 - 2 \cos x > 0$  feltétel miatt az értelmezési tartomány:  $\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ .  $-1 \leq \cos x \leq 1 \iff 2 \geq -2 \cos x \geq -2 \iff 3 \geq 1 - 2 \cos x \geq -1$ , de  $1 - 2 \cos x > 0$ , így  $3 \geq 1 - 2 \cos x > 0$ , ezért  $f(x) \leq \lg 3$ .  
 42.  $\text{Dom } f = [-1; 2]$ ;  $f(x) = \sqrt{-(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4}}$ . Mivel  $-1 \leq x \leq 2$ , ezért  $-\frac{3}{2} \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}$ ;  $0 \leq (x - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{9}{4}$ ;  $0 \geq -(x - \frac{1}{2})^2 \geq -\frac{9}{4}$ ;  $\frac{9}{4} \geq -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4} \geq 0$ ;  $\frac{3}{2} \geq f(x) \geq 0$ .

8. Függvényhatárérték és folytonosság

43.  $0 \leq x - 5 \leq 1$ , azaz  $5 \leq x \leq 6$ .

44.  $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ .

45.  $-1 \leq x \leq 0$ .

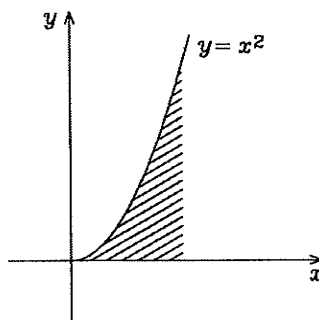
46.  $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$ .

47.  $0 \leq 3x^2 \leq 1$ , azaz  $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

48.  $k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

49.  $\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ ; az  $x^2 + y^2 \leq 1$  körlap pontjainak halmaza.

50. Egyrészt  $y \geq 0$ , másrészt  $x - \sqrt{y} \geq 0$ . Az utóbbiból adódik, hogy  $x \geq 0$  és  $x^2 \geq y$ .  $\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x, 0 \leq y \leq x^2\}$  (1. ábra)



51.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, y < 0\}$ .

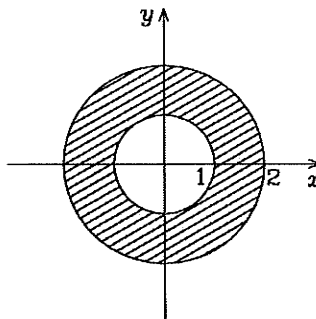
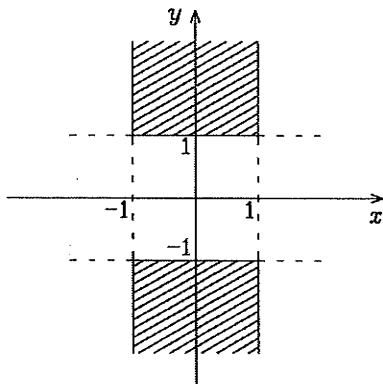
52. Azon  $P(x, y)$  pontok halmaza, amelyek ordinátájára az  $x \geq 0$  esetben  $2k\pi \leq y \leq (2k+1)\pi$ , az  $x \leq 0$  esetben pedig  $(2k+1)\pi \leq y \leq (2k+2)\pi$  teljesül, ahol  $k \in \mathbb{Z}$ .

53.  $\ln(\sin x \cos y) \geq 0$  miatt  $\sin x \cos y \geq 1$ , azaz  $\sin x = \cos y = 1$  vagy  $\sin x = \cos y = -1$ . Így az értelmezési tartományt a  $P\left(\frac{(4k+1)\pi}{2}; 2m\pi\right)$  és a  $Q\left(\frac{(4r-1)\pi}{2}; (2s+1)\pi\right)$  pontok halmaza ábrázolja, ahol  $k, m, r, s \in \mathbb{Z}$ .

54.  $\text{Dom } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, y > 0, z > 0\}$

55. Az origó középpontú egységsugarú gömbtartomány belső pontjainak halmaza.

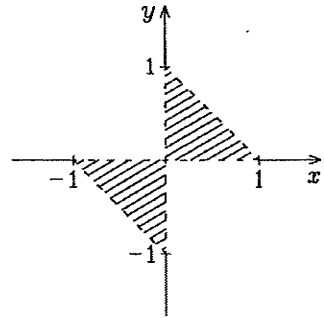
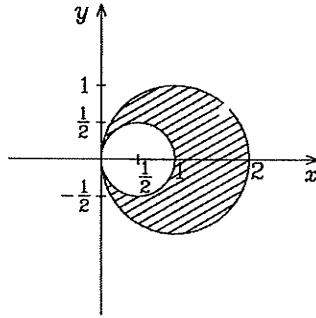
56.  $\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 1, |y| \geq 1\}$ .



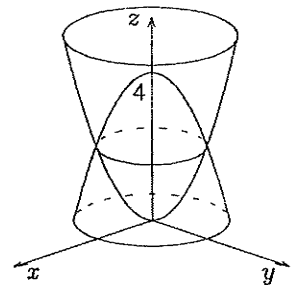
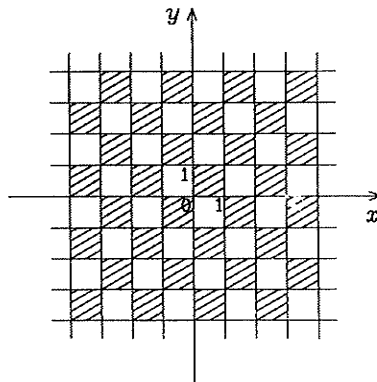
57.  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$  körgyűrű.

8. Függvényhatárérték és folytonosság

58. Az  $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}$  körkülső és az  $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$  körlap közös része.



59.  $\frac{1}{\sqrt{xy}}$  akkor van értelmezve, ha  $xy > 0$ . Ez az első és harmadik síknegyedben igaz (a tengelyeken lévő pontok kivételével). A második tagban az  $|x + y| < 1$  teljesülése szükséges, azaz  $-1 < x + y < 1$ . Ez az  $y = -1 - x$  és az  $y = 1 - x$  párhuzamos egyenesek közötti nyílt sávot jellemzi. Az értelmezési tartomány képe a két alakzat közös része. (l. a fenti ábrán).
60.  $x = ky$ ,  $y \neq 0$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Az origón átmenő egyenessereg (az origó nem tartozik bele a tartományba). Megjegyezzük, hogy  $\text{Ran } f = \{0\}$ .
61. A feltétel:  $\sin \pi x \sin \pi y \geq 0$ . A kifejezés pontosan akkor 0, ha  $\sin \pi x = 0$  vagy  $\sin \pi y = 0$ , azaz  $x = k$  vagy  $y = l$  ( $k, l \in \mathbb{Z}$ ); az előjelváltási pontok tehát az egész koordinátájú helyeken vannak. Ha  $0 < x < 1$  és  $0 < y < 1$ , akkor mindkét tényező pozitív; ezért az értelmezési tartomány képe a következő ábrán látható sakktableszerű nemkorlátos zárt halmaz.

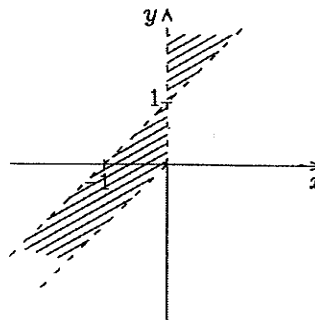


62.  $\text{Dom } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$ ; két forgási paraboloid közös része.
63. Egyrészt  $y > x$ , másrészt  $x \neq 0$ , mégpedig



8. Függvényhatárérték és folytonosság

$x$  és  $\ln(y - x)$  egyező előjelű. Ha tehát  $x > 0$ , akkor  $y > x + 1$ ; ha  $x < 0$ , akkor  $x < y < x + 1$ . Az értelmezési tartomány képe a következő ábrán látható.



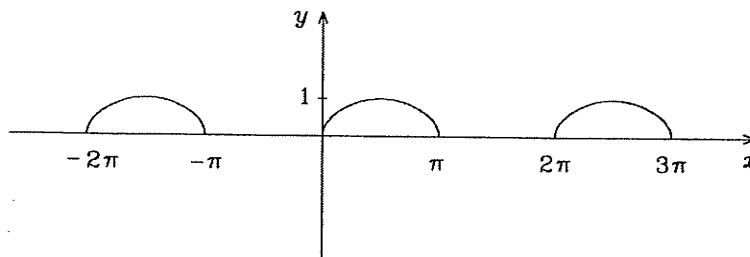
64. A két koordináta-tengely.  
 65.  $\sin \pi x = \sin \pi y = 0 \implies x, y \in \mathbb{Z}$ . Az értelmezési tartomány  $\mathbb{Z}^2$ .  
 66. Ha  $c < 1$  akkor a számlálót, illetve a nevezőt 0-val egyenlővé téve a következő köregyenletekhez jutunk:

$$k_1 : (x + 1)^2 + y^2 = 1 - c$$

$$k_2 : (x - 1)^2 + y^2 = 1 - c,$$

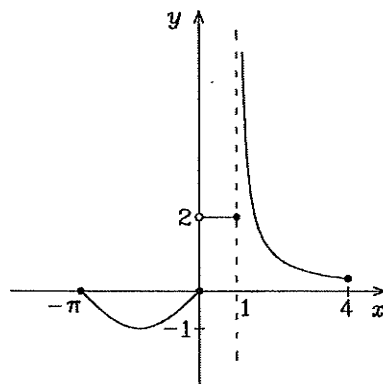
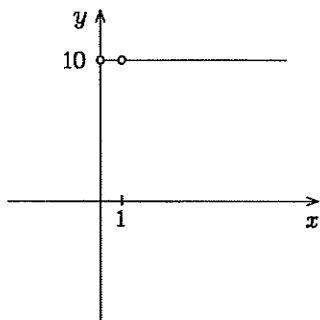
és így az értelmezési tartomány képe a két kör belsejének közös részéből, a két kör külsejének közös részéből és a  $k_1$  kör pontjaiból áll. (Ha  $0 \leq c < 1$ , akkor a két kör belsejének közös része üres.) Ha  $c = 1$ , akkor az értelmezési tartomány az  $xy$ -koordinátasík, kivéve az  $(1, 0)$  pontot. Ha  $c > 1$ , akkor az  $xy$ -koordinátasík.

67.  $r$  sugarú  $z$ -tengelyű henger, kizárva belőle az  $s$  sugarú origó középpontú gömbtartomány pontjait.  
 68.

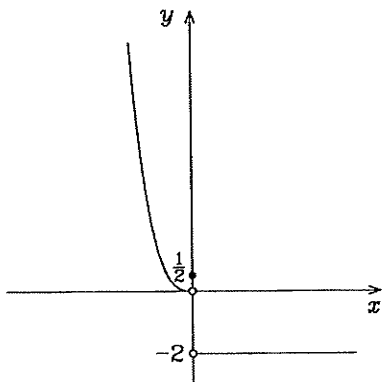


8. Függvényhatáérték és folytonosság

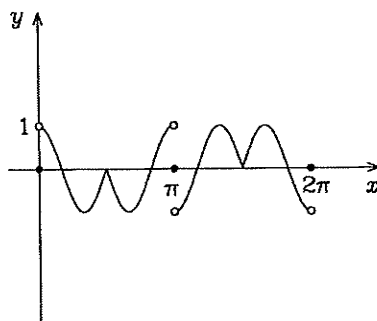
69.  $x^{\frac{1}{\lg x}} = x^{\log_x 10} = 10, x > 0, x \neq 1.$  70.



71.

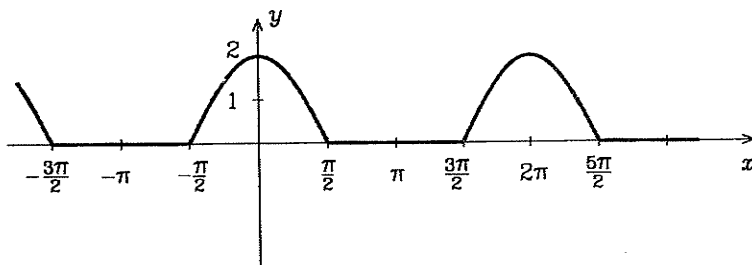


72.



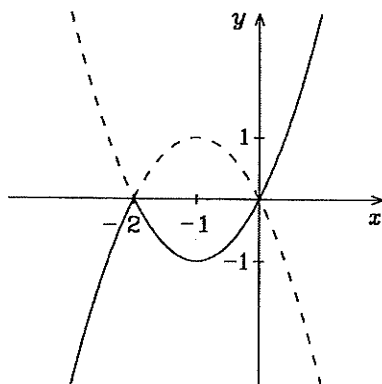
73.  $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } x \geq 0; \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$

74.

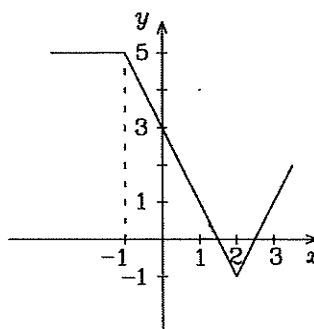


8. Függvényhatárérték és folytonosság

75.



76.



77.  $f(x+a)$  és  $f(x)+b$ : Eltolás  $[-a; 0]$  illetve  $[0; b]$  vektorral.

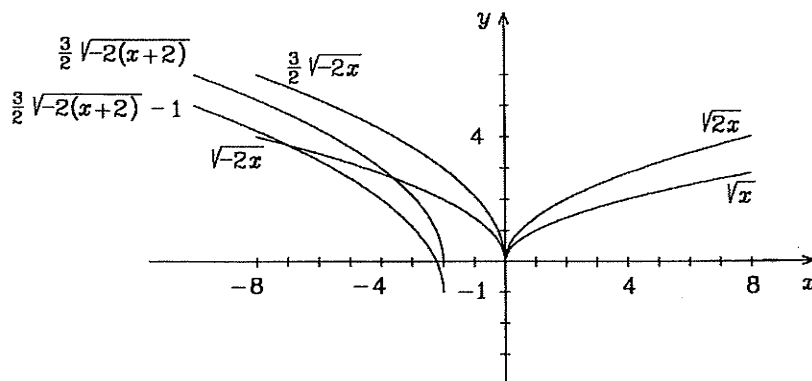
$f(kx)$ : Ha  $0 < k$ , akkor az  $y$ -tengelyre vonatkoztatott  $\frac{1}{k}$  arányú nyújtás, ha  $k < 0$ , akkor az  $y$ -tengelyre vonatkoztatott  $\frac{1}{|k|}$  arányú nyújtás és az  $y$ -tengelyre vonatkozó tükrözés.

$lf(x)$ : Ha  $0 < l$ , akkor az  $x$ -tengelyre vonatkoztatott  $l$  arányú nyújtás, ha  $l < 0$ , akkor az  $x$ -tengelyre vonatkoztatott  $|l|$  arányú nyújtás és az  $x$ -tengelyre vonatkozó tükrözés.

$|f(x)|$ : Ha  $f(x) \geq 0$ , akkor  $|f(x)| = f(x)$ , ha  $f(x) < 0$ , akkor  $|f(x)| = -f(x)$ , ez pedig az  $x$ -tengelyre való tükrözést jelent.

$f(|x|)$ : Ha  $x \geq 0$ , akkor  $f(|x|) = f(x)$ , ha  $x < 0$ , akkor  $f(|x|) = f(-x)$ , ez pedig az  $y$ -tengelyre való tükrözést jelent. Eszerint  $f(|x|)$  grafikonja  $f(x)$  grafikonjának azon részéből áll amelyre  $x \geq 0$  és ennek  $y$ -tengelyre vonatkozó tükrképéből.

78. Egy lehetséges sorrend:  $f(kx), lf(kx), lf(k(x+a)), lf(k(x+a))+b$ .

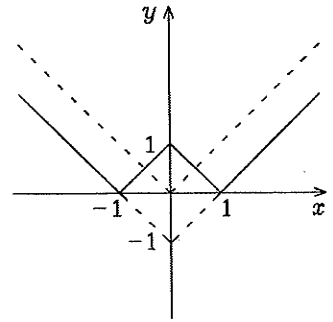
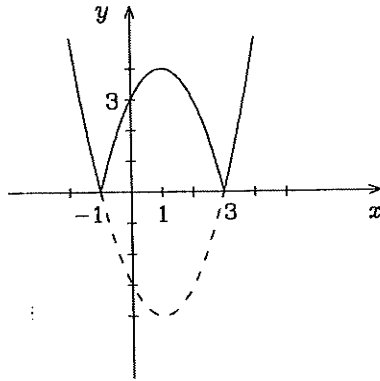


8. Függvényhatárérték és folytonosság

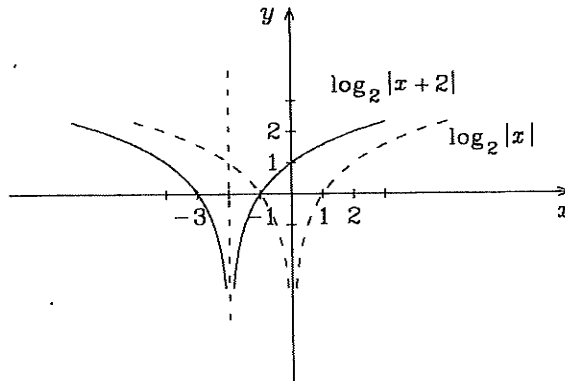
79.  $\frac{2x+5}{x+1} = \frac{2(x+1)+3}{x+1} = 2 + \frac{3}{x+1}$ .

80.  $3 \cos x - \sqrt{3} \sin x = 2\sqrt{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) = 2\sqrt{3} \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right)$ .

81.  $|x^2 - 2x - 4| = |(x-1)^2 - 4|$ . 82.



83.



84. Az  $x$ -nívóvonalak a  $z = a^2 + y^2$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) egyenletű parabolák, az  $y$ -nívóvonalak a  $z = x^2 + b^2$  ( $b \in \mathbb{R}$ ) egyenletű parabolák, a  $z$ -nívóvonalak pedig az  $x^2 + y^2 = c$  ( $c \geq 0$ ) egyenletű körök. A függvény grafikonja  $z$ -tengelyű forgási paraboloid.

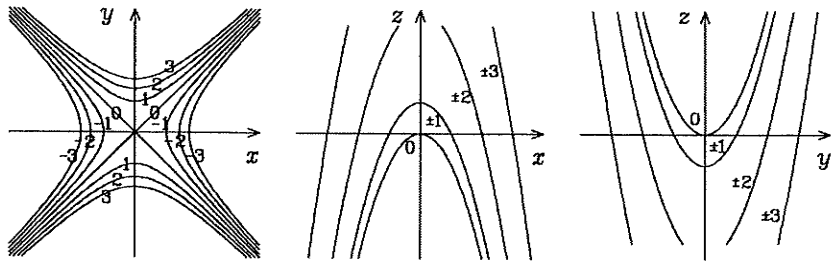
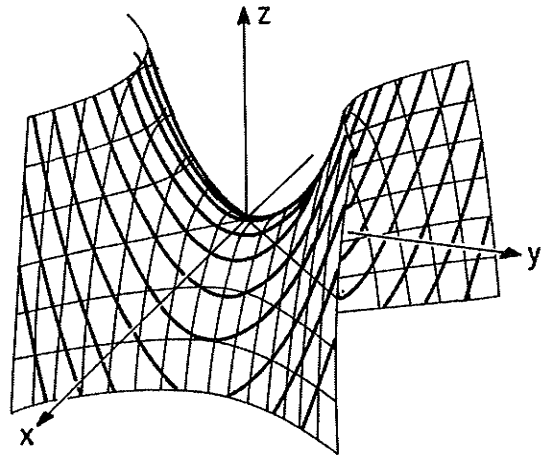
85. A  $z$ -nívóvonalak  $c^2 = x^2 + y^2$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) egyenletű körök. A felületet messük el a  $z$ -tengelyre illeszkedő síkokkal. Ezen síkok egyenlete  $ax + by = 0$  ( $a, b \in \mathbb{R}; a^2 + b^2 \neq 0$ ) alakú. A metszésvonalak egyenletrendszerét a

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + y^2 \\ 0 &= ax + by \end{aligned}$$

8. Függvényhatárérték és folytonosság

egyenletrendszer megoldása adja. Ha  $b = 0$ , akkor  $x = 0$  és  $z = \pm y$ . Ha  $b \neq 0$ , akkor  $y = -\frac{a}{b}x$  és  $z = \pm \frac{a^2 + b^2}{b}x$ . A metszéspárok tehát minden esetben az origón átmenő, merőleges,  $z$ -tengelyre szimmetrikus egyenespárok. A függvény grafikonja  $z$ -tengelyű kettős körkúp (forgáskúp). Megjegyezzük, hogy az  $x$ - illetve  $y$ -nívóvonalak hiperbolák.

86. Az  $x$ - illetve  $y$ -nívóvonalak parabolák. A  $z$ -nívóvonalak  $y^2 - x^2 = c$  ( $c \in \mathbf{R}$ ) egyenletű hiperbolák. (Ha a felületet az  $yz$  síkkal metszük, a metszéspárok a  $z = y^2$  egyenletű parabola. Az  $xz$  síkkal való metszéskor a  $z = -x^2$  egyenletű parabolát kapjuk. A felületet úgy képzelhetjük el szemléletesen, hogy a  $z = y^2$  egyenletű parabolán "végigcsúszik" a  $z = -x^2$  egyenletű parabola.) A felület egy úgynevezett nyeregfelület.

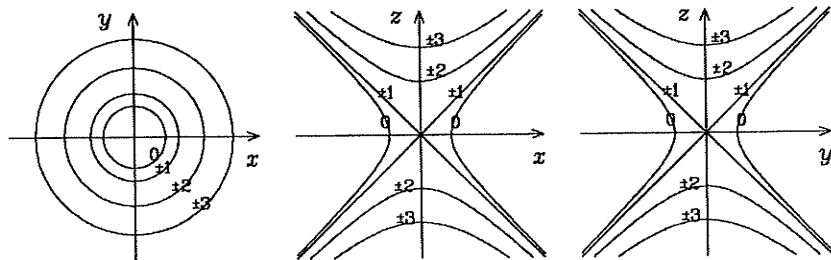
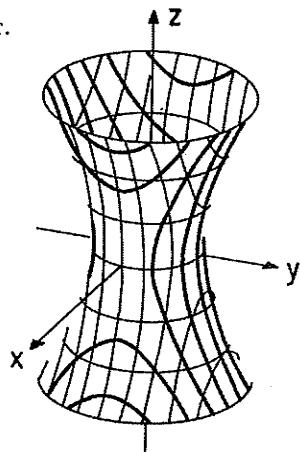


87. Az  $x$ - illetve  $y$ -nívóvonalak parabolák. A  $z$ -nívóvonalak  $y = -x \pm c$  ( $c \geq 0$ ) egyenletű párhuzamos egyenesek. A felület parabola alapú, azaz parabolikus henger.
88. Az  $x$ -nívóvonalak a  $z = a^2 + y$  ( $a \in \mathbf{R}$ ) egyenletű párhuzamos egyenesek, a  $y$ -nívóvonalak a  $z = x^2 + b$  ( $b \in \mathbf{R}$ ) egyenletű parabolák, a  $z$ -nívóvonalak az  $y = c - x^2$  ( $c \in \mathbf{R}$ ) egyenletű parabolák. (Az  $yz$  síkban a metszéspárok a  $z = y$  egyenletű egyenes, az  $xz$  síkban pedig a  $z = x^2$  egyenletű parabola. A felületet a  $z = x^2$  egyenletű parabolának a  $z = y$  egyenesen való "csúsztatásával"

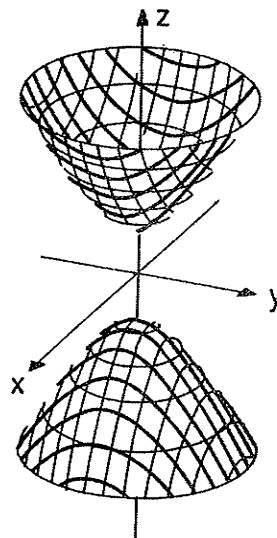
8. Függvényhatárérték és folytonosság

származtathatjuk.) A felület parabolikus henger.

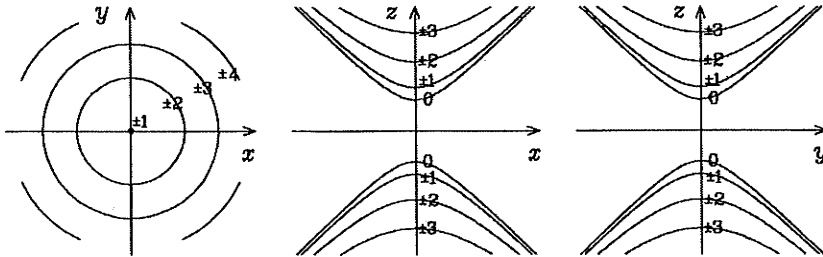
89. Az  $y = 0$  egyenletű síkkal ( $xz$  sík) metszve a metszévonal az  $x^2 - z^2 = 1$  egyenletű hiperbola. Az  $yz$  síkkal metszve a felületet szintén hiperbola adódik. A  $z$ -nívóvonalak az  $x^2 + y^2 = c^2 + 1$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) egyenletű körök. A felület egy úgynevezett egyköpenyű forgáshiperboloid, amely például az  $x^2 - z^2 = 1$  egyenletű hiperbola  $z$ -tengely körüli forgatásával adódik.



90. Az  $xz$  síkkal metszve a metszévonal az  $z^2 - x^2 = 1$  egyenletű hiperbola. Az  $yz$  síkkal metszve, metszévonalaként szintén hiperbola adódik. A  $z$ -nívóvonalak az  $x^2 + y^2 = c^2 - 1$  ( $|c| \geq 1$ ) egyenletű körök. A felület egy úgynevezett kétköpenyű hiperboloid, amely például az  $z^2 - x^2 = 1$  egyenletű hiperbola  $z$ -tengely körüli forgatásával adódik.



8. Függvényhatárérték és folytonosság



91.  $y = 2x - \frac{x^2}{9}$ .

92.  $y = x - 2$ .

93.  $y = \sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2x\sqrt{1-x^2}$ .

94.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

95.  $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$ .

96.  $\sin 2t = \frac{2 \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg}^2 t}$ ,  $\cos 2t = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t}$ ;  $y = \frac{2x + 1 - x^2}{1 + x^2}$ .

97.  $y = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ .

98.  $x^2 + y^2 = a^2$ .

99.  $x^2 - y^2 = 4$ ,  $x \geq 2$ .

100. Az  $f(x) = \frac{3x+1}{5x+4}$  függvény értelmezve van 2 valamely (pl. 1 sugarú) környezetében, mivel  $\operatorname{Dom} f = \mathbf{R} - \{-\frac{4}{5}\}$ . Legyen  $\{x_n\}$  tetszőleges olyan sorozat, amely benne van ebben a környezetben és  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ . Akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3x_n + 1}{5x_n + 4} = \frac{3 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 1}{5 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 4} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{5 \cdot 2 + 4} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}.$$

Tehát a Heine-féle definíció értelmében igaz az állítás.

Legyen  $\varepsilon$  tetszőleges pozitív szám. Azt kell megmutatni, hogy 2-nek van olyan  $\delta$  sugarú környezete, amelyre, ha  $0 < |x-2| < \delta$ , akkor  $\left| \frac{3x+1}{5x+4} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ , azaz

$$\left| \frac{x-2}{2(5x+4)} \right| < \varepsilon. \text{ Elég csak azokkal az } x\text{-ekkel foglalkozni, amelyekre } x > -\frac{4}{5};$$

akkor az előző egyenlőtlenség a következőképpen írható:

$$-2\varepsilon(5x+4) < x-2 < 2\varepsilon(5x+4).$$

Ezt az egyenlőtlenségrendszert megoldva  $\varepsilon < \frac{1}{10}$  esetben, kapjuk a következőket:

$$\frac{2-8\varepsilon}{1+10\varepsilon} < x < \frac{2+8\varepsilon}{1-10\varepsilon}.$$

## 8. Függvényhatárérték és folytonosság

Mivel  $2 - \frac{2-8\varepsilon}{1+10\varepsilon} = \frac{28\varepsilon}{1+8\varepsilon}$  és  $\frac{2+8\varepsilon}{1-10\varepsilon} - 2 = \frac{28\varepsilon}{1-8\varepsilon}$ , ezért a  $\delta = \frac{28\varepsilon}{1+10\varepsilon}$  választással teljesül az első egyenlőtlenség  $\varepsilon < \frac{1}{10}$  esetben. (Ha  $\varepsilon \geq \frac{1}{10}$ , akkor egy tetszőleges  $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{10}$  számra az előző megfontolások teljesülnek, s így  $\varepsilon$ -ra is.) Kaptuk, hogy a Cauchy-féle definíció értelmében is a határérték  $\frac{1}{2}$ .

101. Heine: Mivel  $\text{Dom } f = \mathbf{R} - \{0; 4\}$ , ezért például ha  $x_n \in (3; 5)$  és  $x_n \neq 4$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), továbbá  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 - 16}{x_n^2 - 4x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + 4}{x_n} = 2$ .

Cauchy: Legyen  $\varepsilon > 0$ . Ha  $x \neq 4$ , akkor  $\left| \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} - 2 \right| = \left| \frac{x - 4}{x} \right|$ , és az előző feladatnál látott módon adódik, hogy  $\varepsilon < 1$ -re  $\delta = \frac{4\varepsilon}{1+\varepsilon}$  megfelelő. De kevesebb számolással is célhoz érhetünk. Ha most azt is feltesszük, hogy  $x \in (2; 5)$ , kapjuk a következő egyenlőtlenséget:  $\left| \frac{x - 4}{x} \right| < \frac{|x - 4|}{2}$ . Ha tehát  $\delta = 2\varepsilon$ , akkor minden  $x \in (2; 5)$  ( $x \neq 4$ ) szám, amely teljesíti a  $0 < |x - 4| < \delta$  egyenlőtlenségrendszert, teljesíti az  $\left| \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} - 2 \right| < \varepsilon$  egyenlőtlenséget is.

102. Heine: Legyen  $\{x_n\}$  tetszőleges olyan sorozat, amelyre  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ . Így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5x_n + 1}{3x_n + 9} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{1}{x_n}}{3 + \frac{9}{x_n}} = \frac{5}{3}.$$

103. Cauchy: Bebizonyítjuk, hogy bármely  $k$  pozitív számhoz van olyan  $\delta > 0$ , hogy ha  $0 < |x - 1| < \delta$ , akkor  $\left| \frac{1}{(1-x)^2} \right| = \frac{1}{(1-x)^2} > k$ . Oldjuk meg az előbbi egyenlőtlenséget:  $|1-x| < \frac{1}{\sqrt{k}}$ , azaz  $\delta = \frac{1}{\sqrt{k}}$ .

104. Heine:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \log_a x_n = -\infty$ .

Cauchy: Bebizonyítjuk, hogy tetszőleges  $k$  negatív valós számhoz van olyan  $M$  pozitív valós szám, hogy ha  $M < x$ , akkor  $\log_a x < k$ . Ez utóbbi egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha  $x > a^k$ , azaz  $M = a^k$ .

105. Heine: Válasszuk ki a következő két nullasorozatot:  $\{x_n\} = \left[ \frac{1}{n} \right]$ ,  $\{x'_n\} =$

$\left[ \frac{2}{4n+1} \right]$ . Nyilvánvaló, hogy  $\frac{1}{n}, \frac{2}{4n+1} \in \text{Dom } f$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Azonban  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n\pi = 0$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{x'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{2} = 1$ .

Cauchy: Tegyük fel, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{x} = a \geq 0$ . Ez azt jelenti, hogy bármely pozitív  $\varepsilon$ -hoz van olyan pozitív  $\delta$ , hogy ha  $|x| < \delta$ , akkor  $\left| \sin \frac{\pi}{x} - a \right| < \varepsilon$ , azaz  $a - \varepsilon < \sin \frac{\pi}{x} < a + \varepsilon$ . legyen  $0 < \varepsilon < 1$ . Ha most  $-1 < \sin \varphi < -\varepsilon$  és  $x = \frac{\pi}{\varphi + 2n\pi}$  ( $n \in \mathbf{N}^+$ ), akkor  $\sin \frac{\pi}{x} = \sin \varphi$  miatt bármely  $\delta > 0$  esetén van



8. Függvényhatárérték és folytonosság

olyan  $n \in \mathbf{N}^+$ , hogy  $|x| < \delta$ , de  $\sin \frac{\pi}{x} < -\varepsilon \leq a - \varepsilon$ . Ellentmondás. Hasonlóan,  $a < 0$  esetben is ellentmondásra jutunk.

106. A Heine-féle definíció alapján hasonlóan bizonyítható, mint a 7.89 feladat állítása.

107. Az előző feladathoz hasonlóan bizonyítható.

108.0. 109.  $\frac{1}{2}$ . 110.  $\infty$ .

111.3. 112.  $\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$ . 113.3.

114.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^3 + 5x^2 - 4x - 2}{(2x + 1)(1 - 2x^2)} = -\frac{9}{4}$ .

115.  $n^{-\frac{n(n+1)}{2}}$  ( $n \in \mathbf{N}^+$ ). 116.  $\frac{7}{3}$ .

117.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+5)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+5}{x+1} = 3$ .

118.1. 119.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 5x^3 + 1}{x^4 + 2} = \frac{1}{2}$ .

120.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - x - x^2}{(1-x)(x^2 + x + 1)} = 1$ .

121.  $\frac{p}{q}$ . 122.  $-\frac{1}{2}$ . 123. 10.

124.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2}} = 1$ . 125.1.

126.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[6]{\frac{1}{x}} + \sqrt[4]{\frac{1}{x}}}{\sqrt{2 + \frac{1}{x}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

127.1.

128.  $x \neq 1$  miatt  $(x-1)^2$ -nel egyszerűsíthetünk. Ezután a keresett határérték

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 2}{x + 1} = 2$ .

129.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{4}{3}} \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x^4}} - x^{\frac{5}{3}} \sqrt[5]{1 + \frac{4}{x^3}}}{x^{\frac{7}{3}} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^7}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{3}{x^4}} - \frac{1}{\sqrt[15]{x^{11}}} \sqrt[5]{1 + \frac{4}{x^3}}}{x \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^7}}} = 0$

130.  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x - 2 - 4}{(x-6)(\sqrt{x-2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{\sqrt{x-2} + 2} = \frac{1}{4}$ .

131.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(\sqrt{6x^2+3} - 3x)}{3 - 3x^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{6x^2+3} - 3x}{3(1-x)} = 1$ .

132.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(6-x-1)(3+\sqrt{4+x})}{(9-4-x)(\sqrt{6-x}+1)} = 3$ .

133.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}} = \frac{2}{3}$ .

8. Függvényhatárérték és folytonosság

134.1. 135.  $\frac{3}{2}$ .

136.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{2}$ .

137.0. 138.0. 139.  $\frac{2}{3}$ .

140.  $\frac{1}{2}$ . 141.  $\frac{a+b}{2}$ . 142.1.

143.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{(2 \sin x - 1)(\sin x + 1)}{(2 \sin x - 1)(\sin x - 1)} = -3$ .

144.  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x(1 + \cos x)} = \frac{1}{2}$ .

145. Alkalmazzuk a  $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$  és a  $\sin x = \sin 2 \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$  azonosságokat:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 1.$$

146. Végezzük el a  $z = x - \frac{\pi}{6}$  helyettesítést:  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{\sqrt{3} - 2 \cos(z + \frac{\pi}{6})} =$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{\sqrt{3} - \sqrt{3} \cos z + \sin z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2}}{2\sqrt{3} \sin^2 \frac{z}{2} + 2 \sin \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2}} = 1.$$

147.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left| \frac{\cos x \sqrt[3]{(1 + \sin x)^2}}{\sqrt[3]{(1 - \sin^2 x)^2}} \right| = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sqrt[3]{(1 + \sin x)^2}}{\cos x} \right| = \infty$ .

148.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0$ .

149.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2 \cos^2 x}{\sin^2 x(1 - \cos^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1}{4}$ .

150.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left( 1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right) \frac{\sqrt{2} \cos x + 1}{2 \cos^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos x + 1}{\cos^2 x} = 4$ .

151.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})(1 + \cos x)}{\cos^2 x} = 4\sqrt{2}$ .

152.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3$ . 153.  $4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \frac{x}{\sin x} \frac{1}{\cos 4x} = 4$ .

154. Ha  $\alpha = 0$ , akkor a határérték 0. Ha  $\alpha \neq 0$ , akkor  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} \frac{\beta x}{\sin \beta x} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$ . Ez

azt jelenti, hogy minden  $\alpha$ -ra  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$ .

155. Az előző feladat alapján:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin 6x}{\sin x} - \frac{\sin 7x}{\sin x}} = \frac{1}{6 - 7} = -1$ .

156. Használjuk fel az  $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$  azonosságot! A határérték:  $\frac{2}{3}$ .

157.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0$ .

8. Függvényhatárérték és folytonosság

158. Az előző feladathoz hasonló módon oldható meg. A határérték: 1.

159. Végezzük el az  $u = \sin x$  helyettesítést! Felhasználva az előző feladatot, a határérték: 1.

$$160. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3(\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 + \sin x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 + \sin x}} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 \cos x(1 + \cos x)} = \frac{1}{4}.$$

$$161. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x \cos x} = \frac{1}{2}.$$

$$162. \text{Legyen } z = 1 - x. \text{ Akkor: } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{2}z}{z} = \frac{\pi}{2}.$$

163. A  $z = x - 1$  jelölést és a 154. feladat eredményét használva:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(7\pi + 7\pi z)}{\sin(2\pi + 2\pi z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\sin 7\pi z}{\sin 2\pi z} = -\frac{7}{2}.$$

$$164. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{(\pi + x)(\pi - x)} = -\frac{1}{2\pi} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = -\frac{1}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z + \pi)}{z} =$$

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{2\pi}.$$

$$165. \pi \lim_{\frac{\pi}{x} \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}} = \pi.$$

$$166. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right)^7 = e^7. \quad 167. \sqrt[3]{e}.$$

$$168. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{3}{x-1}\right)^{x-1} \right)^{\frac{2x+1}{x-1}} = (e^3)^2 = e^6.$$

$$169. \sqrt{e}. \quad 170. e^3.$$

$$171. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left( \left(1 - \frac{1}{2x+1}\right)^{2x+1} \right)^{\frac{x}{2x+1}} = 0 (e^{-1})^{\frac{1}{2}} = 0.$$

$$172. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 - 3x + 7 + 8x - 3}{x^2 - 3x + 7} \right)^x =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \left(1 + \frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}} \right)^{\frac{x(8x-3)}{x^2-3x+7}} = e^8.$$

173. A függvényhatárérték Heine-féle definíciója alapján és D 7.42 szerint:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln f(x)} = e^{b \ln a} = a^b.$$

$$174. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} (1 + (f(x) - 1))^{g(x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}} \right)^{g(x)(f(x)-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)(f(x)-1)} = e^b.$$

$$175. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad 176. \frac{1}{4}.$$

8. Függvényhatárérték és folytonosság

177. Legyen  $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{2x^2 + 5}$  és  $g(x) = 8x^2 + 3$ .  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$  és

$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)(f(x) - 1) = -8$ , ezért  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^{g(x)} = e^{-8}$ .

178.  $e^0 = 1$ . 179.  $e^{-1}$ .

180.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} |\operatorname{tg} x| = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x (\sin x - 1) =$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \sin^2 x - 1}{\cos x \sin x + 1} = -\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin x} = 0$ . A határérték: 1.

181.  $e^{-\frac{1}{2}}$ . 182.  $\sqrt{e}$ .

183.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x - 6 + 8}{(x^3 + 8)(\sqrt[3]{(x-6)^2} - \sqrt[3]{(x-6)8 + \sqrt[3]{8^2}})} =$   
 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x^2 - 2x + 4)(\sqrt[3]{(x-6)^2} - \sqrt[3]{(x-6)8 + \sqrt[3]{4}})} = \frac{1}{144}$ .

184.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(1 + \sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{x^2} + \sqrt[5]{x^3} + \sqrt[5]{x^4})}{(1-x)(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})} = \frac{5}{3}$ .

185.  $\lim_{x \rightarrow \infty} 2 \cos \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+1}}{2} \sin \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{2} =$   
 $\lim_{x \rightarrow \infty} 2 \cos \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+1}}{2} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = 0$ .

186.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x)^6 \cos^2 3x^3 - 1}{\sin^6 2x} \frac{1}{(2x)^6 \cos 3x^3 + 1} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x^3 3^2}{(3x^3)^2 2^6} = -\frac{9}{128}$ .

187.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x + 4 \sin 5x}{\sin 6x(\sqrt{1+2 \sin 3x} + \sqrt{1-4 \sin 5x})} = \frac{13}{6}$  (l. a 154. feladatot).

188.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x \cos 2x}{\operatorname{tg} x^2(1 + \cos x \sqrt{\cos 2x})} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x(1 - \cos 2x) + \sin^2 x}{\operatorname{tg} x^2} =$

$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x(2 \cos^2 x + 1) \cos x^2}{\sin x^2} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \frac{x^2}{\sin x^2} = \frac{3}{2}$ .

189.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + (\cos^3 x - 1) \frac{1}{\cos^3 x - 1} \right)^{\frac{\cos^3 x - 1}{x \sin x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + (\cos^3 x - 1) \frac{1}{\cos^3 x - 1} \right)^{\frac{(\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x + 1)}{x \sin x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + (\cos^3 x - 1) \frac{1}{\cos^3 x - 1} \right)^{\frac{(\cos^2 x - 1)(\cos^2 x + \cos x + 1)}{x \sin x(1 + \cos x)}} = e^{-\frac{3}{2}}$$

190. Az 174. feladat szerint:  $f(x) = \frac{\sin x}{\sin a}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x - a}$  választással,  
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)(f(x) - 1) =$

8. Függvényhatárérték és folytonosság

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} = \lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} \frac{1}{\sin a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \operatorname{ctg} a,$$

és ezért  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^{\operatorname{ctg} a}$ .

191.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)}{h(x)} h(x)}{\frac{g(x)}{k(x)} k(x)} = \alpha \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{k(x)}$ .

192.  $\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = 2$ .

193.  $-2$  és  $2$ .

194.  $3$  és  $4$ .

195.  $\sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{2} |\sin x|$  azonosság segítségével:  $-\sqrt{2}$  és  $\sqrt{2}$ .

196. Ha  $x_n = \frac{1}{2n}$  és  $x'_n = \frac{2}{2n+1}$  ( $n \in \mathbf{N}^+$ ), akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = 0$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos 2\pi n = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2n+1) \frac{\pi}{2} = 0$ , ezért a függvénynek nincs jobb oldali határértéke a  $0$  helyen. Mivel a függvény páros, ezért bal oldali határérték sem létezik.

197.  $-\infty$  és  $\infty$ .

198.  $\frac{3}{2}$  és  $\frac{1}{4}$ .

199.  $f(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$ ,  $x \neq -3; -2$ . Minden  $x \in \mathbf{R} - \{-3; -2\}$

helyen folytonos a függvény.  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-1}{x+2} = 4$ , ezért az  $x = -3$  helyen a függvénynek hézagpontja van.  $\lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) = \infty$  és  $\lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) = -\infty$ , azaz az  $x = -2$  helyen a függvénynek pólusa van.

200. Minden  $x \in \mathbf{R} - \{-3; 3\}$  helyen folytonos; az  $x = -3$  és az  $x = 3$  helyen pólusa van.

201. Mindenütt folytonos.

202. A  $0$  és  $3$  helyeken pólusa van, másutt folytonos.

203. Az  $x \neq -1$  helyeken folytonos.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \infty$ , ezért az  $x = -1$  helyen lényeges szingularitása van.

204.  $x = 0$  kivételével mindenütt folytonos.  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$ , a függvénynek az  $x = 0$  helyen lényeges szingularitása van.

205.  $x = -2$  kivételével mindenütt folytonos. A függvénynek a  $-2$  helyen lényeges szingularitása van, mert  $\lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) = -3$  és  $\lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) = -1$ .

206. Az  $x = 1$  helyen lényeges szingularitása van, minden más helyen folytonos.

207. Az  $x = 0$  helyen hézagpontja van, a többi helyen folytonos.

208. Az  $x = 0$  helyen hézagpontja van, a többi helyen folytonos.

209. Ha  $x \neq k \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ), akkor a függvény folytonos.  $\lim_{x \rightarrow -n\pi-0} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -n\pi+0} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow (2n+1)\frac{\pi}{2}-0} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow (2n+1)\frac{\pi}{2}+0} f(x) = -\infty$ , ( $n \in \mathbf{Z}$ ), az  $x = k \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) helyeken a függvénynek pólusa van.

210. Ha  $x \neq 2k\pi$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ), akkor  $f(x) = 1 + \cos x$ , s így a függvény folytonos. Az  $x = 2k\pi$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) helyeken a függvénynek hézagpontja van.

8. Függvényhatárérték és folytonosság

211. Az  $x = \frac{k}{2}$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) helyek kivételével folytonos.  $\lim_{x \rightarrow \frac{k}{2}-0} f(x) = k-1-k+2 =$

1,  
 $\lim_{x \rightarrow \frac{k}{2}+0} f(x) = k - k + 2 = 2$ , az  $x = \frac{k}{2}$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) helyeken lényeges szingularitása van.

212. A határérték minden  $x$  helyen 1. Mivel

$$\begin{cases} 1, & \text{ha } x \neq 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$$

ezért  $x = 0$  helyen a függvénynek megszüntethető szakadása van.  $x \neq 0$  helyeken a függvény folytonos.

213. A határérték minden  $x$  helyen 1. Mivel

$$\begin{cases} 1, & \text{ha } x \neq k\pi; \\ 0, & \text{ha } x = k\pi (k \in \mathbf{Z}), \end{cases}$$

ezért  $x = k\pi$  helyeken a függvénynek megszüntethető szakadása van.  $x \neq k\pi$  helyeken a függvény folytonos.

214. Mindenütt folytonos.

215.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 - 1}{x(1 + \cos x)} = 0 = f(0)$ , azaz a függvény mindenütt folytonos.

216.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4 = f(0)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 = f(2)$ , tehát a függvény folytonos az  $x = 0$  és az  $x = 2$  helyeken. Legyen  $x_0 \in \mathbf{R} - \{0; 2\}$ . Ha  $[x_n]$  és  $[x'_n]$  olyan sorozatok, amelyekre  $x_n \in \mathbf{Q}$ ,  $x'_n \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$  ( $n \in \mathbf{N}^+$ ) és  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = x_0$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 4 - x_0^2$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = 4 - 2x_0$ . Mivel  $x_0 \in \mathbf{R} - \{0; 2\}$ , ezért  $4 - x_0^2 \neq 4 - 2x_0$ , így az  $x = x_0$  helyen a függvénynek lényeges szingularitása van.

217.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x^2} + \cos x}{\sqrt{1 + \cos x^2} - \cos^2 x} = \sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} \frac{x^2}{\sin^2 x} = \sqrt{2}$ , azaz az  $x = 0$  ( $k = 0$ ) helyen a függvénynek megszüntethető szakadása van. Ha  $x \neq 2k\pi$ , akkor a függvény folytonos. Ha  $x = 2k\pi$  ( $k \neq 0$ ), akkor a függvénynek pólusa van.

218.  $a = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ .

219.  $a = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x}{(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{1}{3}$ .

220.  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1$ , tehát az  $a$  bármilyen választása esetén az  $x = 0$  helyen a függvénynek lényeges szingularitása van.

221.  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -a$ , ezért  $a = -1$ .

222.  $-1 = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = b$ ,  $a - 1 = \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = 1$ , azaz  $a = 2$ .

223.  $1 - a + b = \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = -1$ ,  $1 = \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = 1 + a + b$ , ezért  $a = 1$ ,  $b = -1$ .

224.  $\lim_{x \rightarrow -1} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow -1} \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ . Az  $a$  bármely választása esetén az

### 8. Függvényhatárérték és folytonosság

$x = -1$  helyen a függvénynek pólusa van. (Megjegyezzük, hogy ha  $b = 0$ , akkor  $x = -1$  helyen kívül a függvény folytonos.)

$$225. a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos x}} = \frac{\pi}{2}$$

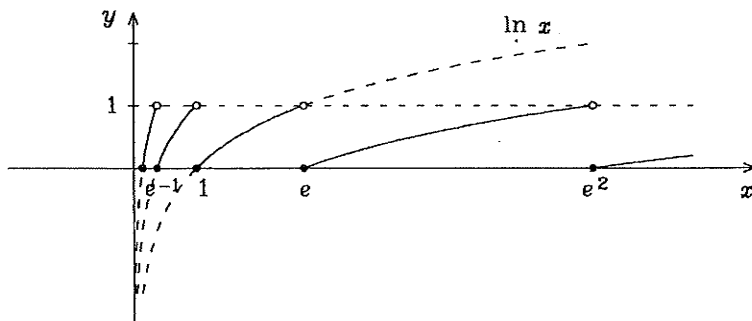
226. Szakadási helyek lehetnek:  $-1$  és  $1$ .  $\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = 0 \neq f(-1) = 1$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = 1 = f(-1)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 1 = f(1)$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 0 \neq f(1)$ , a függvény az  $x = -1$  helyen jobbról, az  $x = 1$  helyen balról folytonos.

227. Szakadási hely lehet:  $1$ . Ha  $a \neq 0$ , akkor a függvény az  $x = 1$  helyen egyik oldalról sem folytonos. Ha  $a = 0$ , akkor a függvény mindenütt folytonos.

228. Szakadási hely:  $0$ , ahol a függvény bal oldalról folytonos, de jobb oldalról nem.

229. Szakadási helyek:  $\pm\sqrt{n}$ ,  $n \in \mathbf{N}^+$ .  $\sqrt{2k-1}$  és  $\sqrt{2k}$  helyeken a függvény balról, a  $-\sqrt{2k}$  és  $\sqrt{2k-1}$  ( $k \in \mathbf{N}^+$ ) helyeken pedig jobbról folytonos.

230. A függvény szakadási helyei:  $x = e^n$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ).  $\lim_{x \rightarrow e^n-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^n-0} \ln x - \lim_{x \rightarrow e^n-0} \text{Ent}(\ln x) = n - (n-1) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow e^n+0} f(x) = n - n = 0 = f(e^n)$ , azaz az  $x = e^n$  helyeken a függvény jobb oldalról folytonos, de bal oldalról nem. A függvény grafikonját a következő ábra szemlélteti.



231. Szakadási helyek lehetnek:  $sp0, \frac{1}{2}$ , továbbá minden olyan pozitív  $x$ , ahol  $2 - \frac{2}{2x-1} = n \in \mathbf{Z}$ . Ebből az egyenletből  $x = \frac{4-n}{4-2n}$ , és a jobb oldal akkor és csak akkor nempozitív, ha  $n = 2, 3, 4$ .  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -1 = f(0)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$ , azaz az  $x = 0$  helyen a függvény bal oldalról folytonos, de jobb oldalról nem. Az  $x = \frac{1}{2}$  helyen egyik oldalról sem folytonos. Minden  $n \in \mathbf{Z} - \{2; 3; 4\}$  egész számra az  $x = \frac{4-n}{4-2n}$  helyeken a függvény jobb oldalról folytonos, de bal oldalról nem.

232. Dom  $f = (-1, 1)$ . Az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos a függvény.  $\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \infty$ , ezért az  $x = -1$  és az  $x = 1$  egyenesek a függvény függőleges aszimptotái.

8. Függvényhatárérték és folytonosság

233. Dom  $f = (0, 1]$ . A függvény folytonos az értelmezési tartományán.  
 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$ , ezért az  $x = 0$  egyenes függőleges aszimptota;  
 $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = f(1) = 0$ .
234. Dom  $f = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ . A függvény folytonos az értelmezési tartományon.  
 $\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = 0$  és  $\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = 0$ , ezért nincs függőleges aszimptota.  
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - \frac{1}{x^2}} = -\infty$  és  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - \frac{1}{x^2}} = \infty$ ,  
 ezért a függvénynek ferde aszimptotája sincs.
235. Dom  $f = \mathbf{R}$ , folytonos az értelmezési tartományon.  $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} =$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ ,  $c = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = 2$ ,  $y =$   
 $2$  vízszintes aszimptota.
236. Dom  $f = \mathbf{R} - \{0\}$ , folytonos az értelmezési tartományon, pólusa van az  
 $x = 0$  helyen, ezért az  $y$  tengely függőleges aszimptota.  $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} =$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ ,  $c_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ ,  $c_2 =$   
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = 1$ , így az  $y = -1$  és az  $y = 1$  egyenletű egyenesek  
 vízszintes aszimptoták.
237. Dom  $f = \mathbf{R} - \{1\}$ , folytonos az értelmezési tartományon,  $x = 1$  függőleges  
 aszimptota,  $y = x - 1$  ferde aszimptota.
238. Dom  $f = \mathbf{R} - \{0\}$ , folytonos az értelmezési tartományon,  $x = 0$  függőleges  
 aszimptota.  
 $m_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|} = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4 + \frac{1}{x^4}} = -2$ ,  
 $m_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ ,  $c_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - m_1 x) =$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|} + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - \sqrt{4x^4+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x(2x^2 + \sqrt{4x^4+1})} =$   
 $0$ .  
 Hasonlóan  $c_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m_2 x) = 0$ .  $y = -2x$  és  $y = 2x$  ferde aszimptoták.
239. Dom  $f = (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$ , folytonos az értelmezési tartományon, nincs  
 függőleges aszimptota,  $y = -\frac{3}{2}x$  és  $y = \frac{3}{2}x$  ferde aszimptoták.
240. Dom  $f = \mathbf{R}$ , folytonos az értelmezési tartományon,  $y = 0$  vízszintes aszimptota.
241. Dom  $f = \left(-\infty; \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}; \infty\right)$ , folytonos az értelmezési tartományon, nincs függőleges aszimptota,  $y = -x - \frac{3}{2}$  és  $y = x + \frac{3}{2}$  ferde aszimptoták.
242.  $f(x) = \frac{(x-a)^2(x+a)^2}{x(x-b)(x-2b)}$ , Dom  $f = \mathbf{R} - \{0; b; 2b\}$ , folytonos az értelmezési tartományon,  $y = x + 3b$  ferde aszimptota,  $x = 0$  függőleges aszimptota. Ha



8. Függvényhatárérték és folytonosság

$a \neq \pm b$ , akkor  $x = b$  függőleges aszimptota. Ha  $a \neq \pm 2b$ , akkor  $x = 2b$  függőleges aszimptota.

243.  $\text{Dom } f = \mathbf{R}$ , az  $x = 0$  hely kivételével folytonos, nincs függőleges aszimptota.

$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x^2}\right) = 1$ ,  $c = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = 0$ , ezért  $y = x$  ferde aszimptota.

244.  $\text{Dom } f = (-\infty; 0) \cup [1; \infty)$ .

$\lim_{x \rightarrow n-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow n-0} \left(\frac{x}{\text{Ent } x} - 1\right) = \frac{n}{n-1} - 1 = \frac{1}{n-1}$  ( $n \in \mathbf{Z} - \{1\}$ ),  
 $\lim_{x \rightarrow n+0} f(x) = \frac{n}{n} - 1 = 0 = f(n)$  ( $n \in \mathbf{Z} - \{0\}$ ). Ezekből következik, hogy az  $n \in \mathbf{Z} - \{0\}$  helyeken a függvény csak jobb oldalról folytonos, és nincs függőleges aszimptota. Megmutatható, hogy  $y = 0$  vízszintes aszimptota.

245.  $\text{Dom } f = \mathbf{R}$ . A folytonosság csak a  $\sqrt[n]{n}$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) helyeken kérdéses. Mivel

$\lim_{x \rightarrow \sqrt[n]{n}-0} f(x) = \frac{n-1}{\sqrt[n]{n^2}+1}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \sqrt[n]{n^2}+0} f(x) = \frac{n}{\sqrt[n]{n^2}+1} = f(n)$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ), a függvény ezeken a helyeken csak jobbról folytonos. Nincs függőleges aszimptota. Mivel  $\frac{x^3-1}{x(x^2+1)} \leq \frac{\text{Ent } x^3}{x(x^2+1)} < \frac{x^3+1}{x(x^2+1)}$ , ezért  $m = 1$ . Hasonló módon látható, hogy  $c = 0$ . Ezért  $y = x$  ferde aszimptota.

246. A T 8.16 tétel alapján közvetlen számítással igazolható.

247. Mivel a bal oldal  $y$ -ban harmadfokú, a  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}$  határérték meghatározása céljából osszuk el az egyenletet  $x^3$ -nal ( $x > 0$ ), majd képezzük mindkét oldal  $\infty$ -beli határértékét:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{y}{x}\right) \left(1 + \frac{y}{x}\right)$ , így  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{y}{x}\right) = 0$  vagy  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{x}\right) = 0$ , azaz  $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = -2$  vagy  $m = -1$ . Ha  $m = -2$ , akkor a  $c = \lim_{x \rightarrow \infty} (y + 2x)$  határértéket keressük. Osszuk el az eredeti egyenletet  $x$ -szel:  $(2x + y)^2 \left(1 + \frac{y}{x}\right) = 1$ , azaz  $1 = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x + y)^2 \left(1 + \frac{y}{x}\right) = -\lim_{x \rightarrow \infty} (2x + y)^2$ , ami lehetetlen. Ha  $m = -1$ , akkor a  $c = \lim_{x \rightarrow \infty} (y + x)$  határértéket keressük. Osszuk el az egyenletet  $x^2$ -tel:  $\left(2 + \frac{y}{x}\right)^2 (x + y) = \frac{1}{x}$ , így  $0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{y}{x}\right)^2 (x + y)$  és  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{y}{x}\right)^2 = 1$  miatt  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + y) = 0$ . Ez azt jelenti, hogy a függvény aszimptotája a  $\infty$ -ben  $y = -x$ . Hasonlóan látható, hogy a függvény aszimptotája a  $-\infty$ -ben szintén  $y = -x$ .

248. A  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x}$  meghatározásához osszuk el az egyenletet  $x^3$ -nal ( $x \neq 0$ ). (Megjegyezzük, hogy az egyszerűség kedvéért írunk a számításokban  $\pm\infty$ -t; ez azt jelenti, hogy mind  $\infty$ -ben, mind  $-\infty$ -ben ki kell számítani a határértéket.) Átrendezés után:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{y}{x}\right)^3 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 - \frac{y}{x^3} + \frac{2}{x^2}\right) = 1 - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x^3} \frac{1}{x^2}.$$

8. Függvényhatárérték és folytonosság

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \pm\infty$  lehetetlen, mert ebből

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{y}{x}\right)^3 = \mp\infty$  adódna, de  $\left(\frac{y}{x}\right)^3$  és  $\frac{y}{x}$  előjele megegyezik. Ez azt jelenti,

hogy  $\frac{y}{x}$  korlátos, amiből adódik, hogy  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} \frac{1}{x^2} = 0$ , s így  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{y}{x}\right)^3 = 1$ ,

azaz  $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = 1$ .  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - x)$  kiszámításához

alakítsuk az egyenletet a következő módon:  $y^3 - x^3 + y - x = x$ . Osszuk el az

egyenletet  $x^2$ -tel. Így:  $0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - x) \left( \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 1 + \frac{1}{x^2} \right) =$

$3 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - x)$ , ezért  $c = 0$ . Ferde aszimptota a  $\pm\infty$ -ben:  $y = x$ .

249. Az egyenletet  $x^4$ -nel osztva:  $\left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^2 = \frac{2}{x^3}$ , azaz  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1$  vagy

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = -1$ . Ha  $m = 1$ , akkor a  $c = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - x)$  határértéket kell kiszá-

mítanunk; az egyenletből  $(x - y)^2 \left(1 + \frac{y}{x}\right)^2 = \frac{2}{x}$ , amiből  $c = 0$ . Ha  $m = -1$ ,

akkor az egyenlet  $(x + y)^2 \left(1 - \frac{y}{x}\right)^2 = \frac{2}{x}$  alakjából  $c = 0$ . A  $\infty$ -ben a ferde

aszimptoták:  $y = x$  és  $y = -x$ . (Mindkettő valóban aszimptota, mert ha  $y$

ielégíti az egyenletet, akkor  $-y$  is, így a görbe szimmetrikus az  $x$  tengelyre.)

250.  $1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = \frac{3}{x}$ ,  $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = -1$ . Az egyenletből:  $(y + x) \left( \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x} + 1 \right) =$

$3$ , amiből  $c = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y + x) = 1$ .  $y = -x + 1$  ferde aszimptota a  $\infty$ -ben és a  $-\infty$ -ben.

251.  $1 - \frac{2}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right)$ ,  $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = 1$ . A  $c = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - x)$  meg-

határozásához alakítsuk az egyenletet a következő módon:

$$\frac{x^4 - 2x}{x - 1} - x^3 = y^3 - x^3,$$

$$\frac{x^3 - 2x}{x - 1} = (y - x)(y^2 + yx + x^2),$$

$$\frac{1 - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = (y - x) \left( \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 1 \right),$$

amiből  $c = \frac{1}{3}$ . (Megjegyezzük, hogy az  $x = 1$  egyenletű egyenes függőleges aszimptota.)

252.  $\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^4 = \frac{4}{x^2}$ ,  $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = 0$ . A  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$

meghatározásához osszuk el az eredeti egyenletet  $x^2$ -tel:  $y^2 + y^2 \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 4$ ,

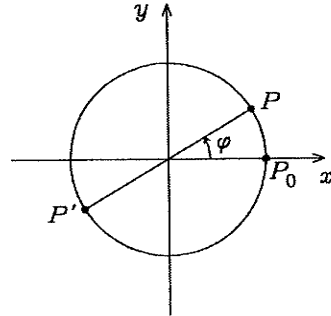
amiből:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm 2$ . A ferde aszimptoták egyenlete:  $y = \pm 2$ . (Nyilván-

való, hogy mind a két érték jó, mert az eredeti egyenletet minden  $y$ -nal együtt

$-y$  is kielégíti.)

8. Függvényhatárérték és folytonosság

253. Legyen  $f(x) = \sin x - x + 1$ . Mivel  $f(0) = 1$ ,  $f(\frac{3\pi}{2}) = -\frac{3\pi}{2}$ , ezért a Bolzano-tétel (T 8.22) szerint a függvénynek van zérushelye.
254.  $f(-1) = 19$ ,  $f(1) = -15$ , a Bolzano-tétel (T 8.22) szerint a függvénynek van zérushelye az intervallum belsejében.
255. Az  $f(x) = a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \dots + a_{2n}x + a_{2n+1}$  függvény folytonos a valós számok halmazán, továbbá  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  és  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ . Ezekből a Bolzano-tétel (T 8.22) segítségével adódik az állítás, hiszen van olyan  $a < b$ , hogy  $f(a) < 0$  és  $f(b) > 0$ .
256. A függvény folytonos a  $[-2, 2]$  intervallumban.  $f(-2) = 1$ ,  $f(2) = 5$ . Mivel  $1 < \frac{7}{3} < 5$ , ezért T 8.21 szerint van olyan  $x \in [-2, 2]$ , hogy  $f(x) = \frac{7}{3}$ .
257. Ha  $f(0) = 0$  vagy  $f(1) = 1$ , akkor  $c = 0$  vagy  $c = 1$ . Tegyük fel, hogy  $0 < f(0), f(1) < 1$ . Mivel  $f$  folytonos a  $[0, 1]$  intervallumon, ezért a  $g(x) = f(x) - x$  egyenlettel megadott függvény is folytonos a  $[0, 1]$  intervallumon.  $g(0) > 0$  és  $g(1) < 0$ , így a Bolzano-tétel (T 8.22) szerint van olyan  $c \in (0, 1)$ , hogy  $g(c) = 0$ , azaz  $f(c) = c$ .
258. Definiáljuk az  $f$  függvényt a  $[0; 1]$  intervallumon a következő módon:  $f(x) = y$  akkor és csak akkor, ha mozgatáskor a szalag  $x$  pontja  $y$ -ba kerül. Az  $f$  teljesíti az előző feladat feltételeit.
259. Legyen  $g(x)$  a  $(0; 0)$  és az  $(x; f(x))$  pontok távolsága, azaz  $g(x) = \sqrt{x^2 + f^2(x)}$  ( $x \in [0, 1]$ ).  $g$  folytonos a  $[0, 1]$  intervallumon,  $g(0) = 0$ ,  $g(1) = 1$ , ezért T 8.21 szerint minden  $d \in [0, 1]$  számhoz van olyan  $c \in [0, 1]$ , hogy  $g(c) = d$ .
260. Vegyük fel a koordináta-rendszer origóját a  $k$  kör (a vékony körgyűrű) középpontjában. Jelölje  $t$  azt a valós függvényt, amely a kör pontjaihoz a hőmérsékletét rendeli, azaz  $t: P \mapsto t(P)$  ( $P \in k$ ). A  $t$  nyilvánvalóan folytonos az értelmezési tartomány minden pontjában. Legyen  $P_0$  a  $k$  körnek az  $x$ -tengely pozitív felére eső pontja. Jelölje  $\varphi$  azt a szöveget, amellyel  $P_0$ -t az origó körül pozitív forgásirányba elforgatva, a  $k$  kör  $P$  pontját kapjuk. Legyen továbbá  $P'$  a  $P$  pont origóra vonatkoztatott tükörképe (l. az ábrát). Definiáljuk az  $f$  egyváltozós valós függvényt a  $f(\varphi) = t(P) - t(P')$  ( $\varphi \in [0; 2\pi]$ ) képpel.  $f$  folytonos az értelmezési tartományán. Ha  $f(0) = 0$ , akkor  $t(P_0) = t(P'_0)$ , azaz a  $P_0$  és  $P'_0$  pontok hőmérséklete egyenlő. Ha  $f(0) \neq 0$ , akkor  $f(\pi) = -f(0)$  miatt  $f(\pi)$  és  $f(0)$  ellenkező előjelűek, és ezért a Bolzano-tétel (T 8.22) szerint van olyan  $\varphi_1 \in (0; \pi)$ , hogy  $f(\varphi_1) = 0$ . Legyen  $P_1 \in k$ , amelyre  $f(\varphi_1) = t(P_1) - t(P'_1)$ , akkor  $t(P_1) = t(P'_1)$ .





9. Differenciálhányados, derivált

19.  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)h(x) - 0}{x - x_0} = h(x_0)$ . Másrészt a  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x - x_0|h(x) - 0}{x - x_0}$  határérték csak  $h(x_0) = 0$  esetén létezik, és akkor 0.
20. Tegyük fel, hogy  $f(x) = f(-x)$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ), ekkor  $f'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h}$  (legyen  $k = -h$ )  
 $= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x+k) - f(x)}{-k} = -f'(x)$ .  
 A másik összefüggés hasonlóan bizonyítható.
21.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{f(a) - f(a-h)}{h} \right) = 2f'(a)$ ,  
 mivel  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h} = \left\{ \begin{array}{l} \text{helyettesítés} \\ k = -h \end{array} \right\} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a+k) - f(a)}{k} = f'(a)$ .
22.  $g$  folytonos  $a$ -ban, mert  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = g(a)$ .
23.  $f(x) = |x - 1|$ .
24. Ilyen függvény **T 9.5** szerint nincs.
25. Pl.:  $f(x) = 0$ , vagy  $f(x) = x^2$ .
26.  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ x^2, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$ , deriváltja  $f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ 2x, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$ , amely nem differenciálható 0-ban. Két másik példa:  $f(x) = x|x|$  (lásd 141. feladat);  $f(x) = x^\alpha$ , ahol  $1 < \alpha < 2$  (lásd 144. feladat).
27.  $f'_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)y - xy}{h} = y$ ,  
 $f'_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(y+h) - xy}{h} = x$ ,  
 tehát a deriváltak:  $f'_x : (x, y) \mapsto y$ ,  $f'_y : (x, y) \mapsto x$ . Ezek értéke a  $P$  pontban:  
 $f'_x(1, 2) = 2$ ,  $f'_y(1, 2) = 1$ .
28.  $f'_x : (x, y) \mapsto 2x$ ,  $f'_y : (x, y) \mapsto 2y$ ,  $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ .
29.  $f'_x(x, y) = 4$ ,  $f'_y(x, y) = 2$ ,  $f'_x(1, 1) = 4$ ,  $f'_y(1, 1) = 2$ .
30.  $f'_x(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)yz - xyz}{h} = yz$ .  
 Hasonlóképpen kapjuk a másik két parciális deriváltat is, tehát:  
 $f'_x : (x, y, z) \mapsto yz$ ,  $f'_y : (x, y, z) \mapsto xz$ ,  $f'_z : (x, y, z) \mapsto xy$ . Ezek értéke a  $P$  pontban:  
 $f'_x(1, 2, 3) = 6$ ,  $f'_y(1, 2, 3) = 3$ ,  $f'_z(1, 2, 3) = 2$ .
31.  $f'_x : (x, y, z) \mapsto 3$ ,  $f'_y : (x, y, z) \mapsto -4$ ,  $f'_z : (x, y, z) \mapsto 2$ ,  $f'_x(0, 0, 0) = 3$ ,  
 $f'_y(0, 0, 0) = -4$ ,  $f'_z(0, 0, 0) = 2$ .
32.  $f'_x : (x, y, z) \mapsto 0$ ,  $f'_y : (x, y, z) \mapsto 0$ ,  $f'_z : (x, y, z) \mapsto 0$ ,  $f'_x(1, 1, 1) = 0$ ,  
 $f'_y(1, 1, 1) = f'_z(1, 1, 1) = 0$ .
33. Mivel  $f(h, 0) = 0$ , ha  $h \neq 0$ , ezért

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h - 0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h - 0}$$



9. Differenciálhányados, derivált

79.  $f'(v) = \frac{1}{3}(3v + 18v^2)^{-\frac{2}{3}}(3 + 36v), \quad v \neq 0, -\frac{1}{6}.$
80.  $f'(x) = -\frac{2}{3} \frac{ad - bc}{(ax + b)^{5/3}(cx + d)^{1/3}}, \quad x \neq -\frac{b}{a}, -\frac{d}{c}.$
81.  $g'(t) = \frac{\cos t}{2\sqrt{1 + \sin t}}, \quad t \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$
82.  $f_x(x, y) = 6x + y, \quad f_y(x, y) = x - 6y^2.$
83.  $g_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y}}, \quad g_y(x, y) = \frac{-1}{2\sqrt{x^2 - y}}.$
84.  $\rho_\varphi(\varphi, \psi) = \cos \varphi \cos \psi, \quad \rho_\psi(\varphi, \psi) = -\sin \varphi \sin \psi.$
85.  $f_x(x, y) = 2ax + by, \quad f_y(x, y) = bx + 2cy.$
86.  $f_x(x, y, z) = y + z, \quad f_y(x, y, z) = x + z, \quad f_z(x, y, z) = x + y.$
87.  $f_x(x, y, z) = \sin(xyz) + xyz \cos(xyz), \quad f_y(x, y, z) = x^2 z \cos(xyz),$   
 $f_z(x, y, z) = x^2 y \cos(xyz).$
88.  $g_x(x, y) = \frac{(ad - bc)y}{(cx + dy)^2}, \quad g_y(x, y) = \frac{(bc - ad)x}{(cx + dy)^2}.$
89.  $f_x(x, y, z) = x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}.$
90.  $h_x(x, y) = 2f(x)f'(x)g(y), \quad h_y(x, y) = f^2(x)g'(y).$
91.  $h_x(x, y, z) = 2f(x, y)f_x(x, y)g^3(y, z),$   
 $h_y(x, y, z) = 2f(x, y)f_y(x, y)g^3(y, z) + 3g^2(y, z)g_y(y, z)f^2(x, y),$   
 $h_z(x, y, z) = 3g^2(y, z)g_z(y, z)f^2(x, y).$
92.  $f_{x_1}(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3.$
93.  $f_{x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_{k+1} \dots x_n, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$
94.  $f_{x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$
95.  $f_x(0, 0) = -\frac{1}{3}, \quad f_y(0, 0) = \frac{1}{3}.$
96. A differenciálási szabályok szerint  $x \neq 0, y \neq 0$  esetén  
 $f_x(x, y) = \frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad f_y(x, y) = \frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}.$  Ezek a  $(0, 0)$  pontban nincsenek értelmezve, így a definíció alapján kell számolnunk.  
 $f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0,$  hasonlóképpen  $f_y(0, 0) = 0.$
97.  $f_x(x, y) = \frac{x^2}{(x^3 + y^3)^{3/2}}, \quad f_y(x, y) = \frac{y^2}{(x^3 + y^3)^{3/2}}.$  Ezek a  $(0, 0)$  pontban nincsenek értelmezve, így a definíció alapján számolva:  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 1.$
98.  $f_x(0, 0)$  nincs értelmezve,  $f_y(0, 0) = 0.$
99.  $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$   
 ugyanis  $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0.$   
 Az  $f'$  függvény nem folytonos 0-ban, mert a  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$  határérték nem létezik, így a  $\lim_{x \rightarrow 0} (2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x})$  határérték sem.

9. Differenciálhányados, derivált

100.  $f$  nem differenciálható az  $x_k = 1/(k\pi)$  helyeken. A 0 pontbeli differenciálhatóság a definíció alapján, az előző feladathoz hasonlóan bizonyítható.

101. A sorozat összegképletének mindkét oldalát deriválva kapjuk, hogy

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \left( \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \right)' = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

102. Az előző feladat összegképletének mindkét oldalát  $x$ -szel szorozva, majd mindkét oldalt deriválva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 1 + 4x + 9x^2 + \dots + n^2x^{n-1} &= \left( \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} \right)' = \\ &= \frac{1 + x - (n+1)^2x^n + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} - n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

103. A  $2 \sin u \cos v = \sin(u+v) + \sin(u-v)$  azonosságot felhasználva:

$$\begin{aligned} &2 \sin x (\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x) = \\ &2 \sin x \cos x + 2 \sin x \cos 3x + \dots + 2 \sin x \cos(2n-1)x = \\ &\sin 2x + (\sin 4x - \sin 2x) + \dots + (\sin 2nx - \sin(2n-2)x) = \sin 2nx, \end{aligned}$$

ami bizonyítja a feladatbeli első formulát. Ennek mindkét oldalát deriválva megkapjuk a kívánt összegképletet:

$$\begin{aligned} (\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x)' &= \left( \frac{\sin 2nx}{2 \sin x} \right)', \text{ azaz} \\ \sum_{k=1}^n (2k-1) \sin(2k-1)x &= \frac{(2n+1) \sin(2n-1)x - (2n-1) \sin(2n+1)x}{4 \sin^2 x}. \end{aligned}$$

104.  $3^4 \sin(3x+1)$ .      105.  $-2^7 \sin(4-2x)$ .      106.  $\frac{5!}{(1-x)^6}$ .

107.  $f^{(10)}(x) = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 17}{2^{10} x^9 \sqrt{x}}$ , ( $x > 0$ ).

108.  $f_{xx}(x, y) = 12x^2$ ,  $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 3y^2$ ,  $f_{yy}(x, y) = 6xy$ .

109.  $f_{xx}(x, y) = 2a$ ,  $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 2b$ ,  $f_{yy}(x, y) = 2c$ .

110.  $f_{xx}(x, y) = -4x^2y^2 \sin x^2y + 2y \cos x^2y$ ,  $f_{yy}(x, y) = -x^4 \sin x^2y$ ,  
 $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -2x^3y \sin x^2y + 2x \cos x^2y$ .

111.  $f_{xx}(x, y) = -\frac{2 \sin x^2 + 4x^2 \cos x^2}{y}$ ,  $f_{xy}(x, y) = \frac{2x \sin x^2}{y^2}$ ,  $f_{yy}(x, y) = \frac{2 \cos x^2}{y^3}$ .

112.  $f_{xx}(x, y, z) = 2$ ,  $f_{yy}(x, y, z) = 4(x+3y^2+z^3)$ ,  $f_{zz}(x, y, z) = 6z(2x+2y^2+5z^3)$ ,  
 $f_{xy}(x, y, z) = f_{yx}(x, y, z) = 4y$ ,  $f_{xz}(x, y, z) = f_{zx}(x, y, z) = 6z^2$ ,  
 $f_{yz}(x, y, z) = f_{zy}(x, y, z) = 12yz^2$ .

113.  $\frac{\partial^6 g}{\partial x^3 \partial y^3}(x, y) = -6(\cos x + \cos y)$ .

114.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{-2(x+y)}{(x-y)^3}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{4y}{(x-y)^3}$ ,  $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y) = \frac{4(x+2y)}{(x-y)^4}$ .

115.  $\frac{\partial^{n+m} f}{\partial x^n \partial y^m}(x, y) = n!m!$ .



9. Differenciálhányados, derivált

116.  $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}(x, y) = \frac{2(-1)^m(m+n-1)!(nx+my)}{(x-y)^{m+n+1}}$ . (Ha az eredményt nem tudtuk direkt módon kiszámítani, akkor bizonyítsuk be külön  $n$ -re majd külön  $m$ -re vonatkozó teljes indukcióval!)

117.  $y'(x) = 2cx$ , így  $y'(x)x - y(x) = 2cx^2 - 2cx^2 = 0$  valóban fennáll.

120.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0$ .

121.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 - 0 = 0$ .

122.  $\frac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{-x^2 + 2y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{-x^2 - y^2 + 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = 0$ .

123.  $(x^m)' = mx^{m-1}$ ,  $(x^m)'' = m(m-1)(x^{m-2}), \dots$ ,  
 $(x^m)^{(n)} = m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n}$ .

(A pontosság kedvéért megjegyezzük, hogy  $n = 0$  esetén  $m < m - n + 1$  miatt az  $m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)$  szorzatot úgy kell tekintenünk, mint aminek egyetlen tényezője sincs, így értéke 1. Mivel nem értelmeztük a  $0^0$  hatványt, ezért  $m = 0$  esetén az összefüggés nincs értelmezve az  $x = 0$  helyen.)

124. Az előző feladatbeli egyenlőségből következik.

125.  $((x-a)^{-1})' = -1(x-a)^{-2}$ ,  $((x-a)^{-1})'' = (-1)(-2)(x-a)^{-3}, \dots$ ,  
 $((x-a)^{-1})^{(n)} = (-1)(-2)\dots(-n)(x-a)^{-n-1} = (-1)^n n! / x^{n+1}$ .

126.  $(\sin x)' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ ,  $(\sin x)'' = (\sin(x + \frac{\pi}{2}))' = \sin(x + \frac{2\pi}{2})$ , hasonlóan  $(\sin(x + \frac{k\pi}{2}))' = \sin(x + \frac{(k+1)\pi}{2})$ , így teljes indukcióval kapjuk, hogy  $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$ .

127. Hasonló az előzőhöz.

128.  $a_0 n!$

129.  $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ ,  $(\sin x \cos x)^{(n)} = 2^{n-1} \sin(2x + \frac{n\pi}{2})$ .

130.  $\sin 3x \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin x)$ ,  
 $(\sin 3x \cos 2x)^{(n)} = \frac{1}{2}(5^n \sin(5x + \frac{n\pi}{2}) + \sin(x + \frac{n\pi}{2}))$ .

131.  $\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x + \cos(a+b)x)$ ,  $(\cos ax \cos bx)^{(n)} = \frac{1}{2}((a-b)^n \cos((a-b)x + \frac{n\pi}{2}) + (a+b)^n \cos((a+b)x + \frac{n\pi}{2}))$ .

132.  $\left(\frac{x}{x^2-1}\right)^{(n)} = \left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2} \left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$ .

133.  $\left(\frac{2x+1}{x^2+x-2}\right)^{(n)} = \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}$ .

134.  $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n! c^{n-1} (bc-ad)}{(cx+d)^{n+1}}$ , ha  $c \neq 0$  és  $n \in \mathbf{N}^+$ . A  $c = 0$  eset triviális. (Vegyük észre, hogy a számlálóban az  $a, b, c, d$  számokból álló determináns értéke áll.)

135. Teljes indukcióval bizonyítunk.  $n = 1$  esetén:  $(fg)' = f'g + fg'$ , tehát az állítás igaz. Tegyük fel, hogy az állítás  $n$ -re igaz, bizonyítjuk, hogy  $(n+1)$ -re is:

9. Differenciálhányados, derivált

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)} &= ((fg)^{(n)})' = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}\right)' \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k+1)}.\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy  $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$ ,  $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ , továbbá hogy

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \text{ kapjuk, hogy}$$

$$\binom{n}{0} f^{(n+1)} g + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right) f^{(n)} g' + \dots + \binom{n}{n} f g^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)}.$$

136.  $(x^2 \sin x)'' = (x^2)'' \sin x + 2(x^2)'(\sin x)' + x^2(\sin x)' = 2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x.$

137.  $(x \sin x)^{(25)} = x \cos x + 25 \sin x$ , mert  $x$  minden további deriváltja 0.

138.  $x^2 \cos x + 50x \sin x - 300 \cos x.$

139.  $13 \sin 2x \sin(x+1) - 14 \cos 2x \cos(x+1).$

140.  $f'(x) = 12x^3 - 4x$ ,  $f'(0) = 0$ ,  $f''(x) = 36x^2 - 4$ ,  $f''(0) = -4$ ,  $f'''(x) = 72x$ ,  $f'''(0) = 0$ ,  $f^{(4)}(x) = 72$ ,  $f^{(4)}(0) = 72$ ,  $f^{(n)}(x) = 0$ ,  $f^{(n)}(0) = 0$ , ha  $n > 4$ .

141.  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{ha } x < 0 \end{cases} = x|x|$ ,  $\text{Dom } f = \mathbf{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -2x, & \text{ha } x < 0 \end{cases} = 2|x|$$
,  $\text{Dom } f' = \mathbf{R}$

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha } x > 0 \\ -2, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$
,  $\text{Dom } f'' = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$$f^{(n)}(x) = 0$$
, ha  $n \geq 3$  és  $x \neq 0$ ,  $\text{Dom } f^{(n)} = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ .

Tehát  $f(0) = f'(0) = 0$ , de  $f^{(n)}(0)$  nincs értelmezve, ha  $n \geq 2$ .

142.  $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x$ ,  $f^{(2n)}(0) = 0$ ,  
 $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$ ,  $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$ .

143.  $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x$ ,  $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$ ,  
 $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \sin x$ ,  $f^{(2n+1)}(0) = 0$ .

144. A 35. feladat szerint:  $(x^{\frac{4}{3}})'|_0 = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}|_0 = 0$ ,  $(x^{\frac{4}{3}})'' = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}$ , tehát e függvény differenciálható 0-ban, de kétszer nem.  $(x^{\frac{7}{3}})'|_0 = 0$ ,  $(x^{\frac{7}{3}})''|_0 = 0$ ,  $(x^{\frac{7}{3}})''' = \frac{28}{27}x^{-\frac{2}{3}}$ , tehát e függvény kétszer differenciálható 0-ban, de háromszor nem. Legyen  $k = n + \varepsilon - 1$ , ahol  $\varepsilon = \frac{n}{m}$ ,  $n, m \in \mathbf{N}^+$ ,  $m$  páratlan,  $n < m$  (tehát  $0 < \varepsilon < 1$ , pl.  $\varepsilon = 1/3$  az előző függvényeknél).

$$(x^{n+\varepsilon-1})^{(i)} = (n + \varepsilon - 1)(n + \varepsilon - 2) \dots (n + \varepsilon - i)x^{n+\varepsilon-i-1}, \quad (i < n),$$

$$(x^{n+\varepsilon-1})^{(n)} = (n + \varepsilon - 1)(n + \varepsilon - 2) \dots (1 + \varepsilon)\varepsilon x^{\varepsilon-1},$$

és ez utóbbi függvény nincs értelmezve 0-ban, míg az előző deriváltak értéke 0-ban 0.

145.  $f(-1) = f(1) = 0$ ,  $f$  folytonos  $[-1, 1]$ -en, de  $f$  nem differenciálható 0-ban, vagyis nem differenciálható a  $(-1, 1)$  intervallum minden pontjában. Tehát a tétel feltételei nem teljesülnek, és olyan  $c$  sincs, melyre a tétel konklúziója igaz lenne.

146.  $f(-1) = f(1) = 0$ ,  $f$  folytonos  $[-1, 1]$ -en, de nem differenciálható 0-ban (lásd 35. feladat). Egyébként nincs olyan  $c \in (-1, 1)$ , melyre  $f'(c) = 0$  lenne.

9. Differenciálhányados, derivált

147.  $f(0) = f(\pi) = 0$ ,  $f$  folytonos a  $[0, \pi]$ -n, és differenciálható a  $(0, \pi)$  intervallumon;  $f'(\pi/2) = 0$ .
148.  $f(0) = f(2\pi) = 0$ ,  $f$  folytonos a  $[0, 2\pi]$ -n, de nem differenciálható  $\pi$ -ben, vagyis a tétel feltételei nem teljesülnek. Ettől függetlenül van olyan pont a  $(0, 2\pi)$  intervallumban, ahol a differenciálhányados 0, nevezetesen  $f'(\pi/2) = f'(3\pi/2) = 0$ .
149.  $f$  folytonos a  $[-2, 0]$  intervallumon, differenciálható a  $(-2, 0)$  intervallumon, így van olyan  $c \in (-2, 0)$ , hogy  $f'(c) = (f(0) - f(-2))/(0 - (-2)) = -6$ .  $f'(x) = 6x$ , ezért  $c = -1$ .
150.  $f$  nem folytonos 0-ban, és olyan  $c$  sincs melyre a tétel konklúziója igaz lenne.
151. Bár  $f$  nem differenciálható 0-ban, és így a tétel feltételei nem teljesülnek, de van olyan  $c$ , melyre a tétel konklúziója igaz, nevezetesen  $c = 1$ .
152.  $f$  nem differenciálható 0-ban, és olyan  $c$  sincs, melyre a tétel konklúziója igaz lenne.
153.  $f$  és  $g$  folytonos és differenciálható mindenütt,  $g'(x) = 3x^2 - 14x + 20$ , és ennek nincs valós zérushelye, tehát a Cauchy-tétel feltételei fennállnak, így van olyan  $c \in (1, 4)$ , hogy  $\frac{f(4) - f(1)}{g(4) - g(1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ , azaz  $\frac{11 - 2}{27 - 9} = \frac{2c - 2}{3c^2 - 14c + 20}$ . Ennek megoldásai  $c_1 = 2$  és  $c_2 = 4$ , de  $4 \notin (1, 4)$ , tehát  $c = 2$  az egyetlen ilyen érték.
154.  $f$  nem differenciálható 0-ban, és olyan  $c$  sincs, melyre a tétel konklúziója igaz lenne. (A feladat lényegében megegyezik a kettővel ezelőttivel.)
155. A tétel feltételei nem teljesülnek, mivel  $g'(0) = 0$ . Olyan  $c$  sincs melyre a tétel konklúziója igaz lenne, mert  $(f(1) - f(-1))/(g(1) - g(-1)) = 0$ , és az  $f'(c)/g'(c) = 0$  egyenlet csak  $c = 0$  esetén teljesülhetne, ahol ennek az egyenletnek nincs értelme.
156. Az  $f(x) = 3x^5 + 15x - 2$  függvény folytonos, és például  $f(0) < 0$ ,  $f(1) > 0$ , így a Bolzano-tétel (T 8.22) szerint a feladatbeli egyenletnek a  $(0, 1)$  intervallumon van gyöke. Tegyük fel, hogy  $x_1 < x_2$  két különböző valós gyök. Ekkor  $f$  kielégíti a Rolle-tétel feltételeit az  $[x_1, x_2]$  intervallumon, így van olyan  $c \in (x_1, x_2)$  szám, hogy  $f'(c) = 0$ . Másrészt  $f'(x) = 15(x^4 + 1) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ . Indirekt feltevésünkből ellentmondásra jutottunk, tehát az egyenletnek nincs két valós gyöke.
157.  $f(x) = 0$ , ha  $\sin \frac{\pi}{x} = 0$ , azaz ha  $x = 1/k$ ,  $k \in \mathbf{N}^+$ . Mivel  $f$  folytonos  $[0, 1]$ -en, és differenciálható  $(0, 1)$ -en, ezért a Rolle-tétel alkalmazható az  $[\frac{1}{2}, 1]$ ,  $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ ,  $\dots$ ,  $[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$ ,  $\dots$  intervallumokra, azaz létezik olyan  $c_k$ , hogy  $\frac{1}{k+1} < c_k < \frac{1}{k}$  és  $f'(c_k) = 0$ .
158. Legyen  $f(x) = c_1x + \frac{c_2}{2}x^2 + \dots + \frac{c_n}{n}x^n$ . E függvény kielégíti a Rolle-tétel feltételeit a  $[0, 1]$  intervallumon, hisz  $f(0) = f(1) = 0$ , így van olyan  $c \in (0, 1)$ , melyre  $f'(c) = 0$ .
159. A Lagrange-tételt a  $\sin$  függvényre felírva kapjuk, hogy  $\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \cos c$ , valamely  $c \in (x, y)$  (ill.  $c \in (y, x)$ ) számra. Vegyük mindkét oldal abszolút

9. Differenciálhányados, derivált

értékét, és használjuk ki, hogy  $|\cos c| \leq 1$ . Ekkor kapjuk, hogy  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ .

160. A Lagrange tétel szerint van olyan  $c$  az  $x$  és a  $-y$  számok között, hogy  $\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}(-y)}{x - (-y)} = \frac{1}{\cos^2 c}$ . Átrendezve és felhasználva, hogy  $|\cos c| \leq 1$ , kapjuk, hogy  $|\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y| \geq |x + y|$ .

161. Tegyük fel, hogy  $0 < x < y$ , és írjuk fel a Lagrange tételt az  $[x, y]$  intervallumra és a négyzetgyök-függvényre, valamint használjuk ki azt, hogy mivel  $x < c$ , ezért  $1/\sqrt{c} < 1/\sqrt{x}$ .

$$\frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{y - x} = \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ amiből átszorzás után } \sqrt{xy} < \frac{x + y}{2}.$$

162. A Lagrange tételt felírva az  $f$  függvényre és az  $[x, x+1]$  intervallumra, kapjuk hogy van olyan  $c \in (x, x+1)$  szám, hogy  $f(x+1) - f(x) = f'(c)$ . Ez bizonyítja állításunkat.

163.  $f'(x) = 3x(x-2)$ ,  $f$  szigorúan monoton nő, ha  $x < 0$ ,  $x > 2$ , szigorúan monoton csökken, ha  $0 < x < 2$ .

164.  $f'(x) = 3(x+2)^2 \geq 0$ , továbbá  $f(x) < 0$ , ha  $x < -2$  és  $f(x) > 0$ , ha  $x > -2$ , így  $f$  mindenütt szigorúan monoton növekvő.

165.  $f'(x) = (2-x)(2+x)/(x^2+4)^2$ ,  $f$  szigorúan monoton nő, ha  $-2 < x < 2$ , szigorúan monoton csökken, ha  $x < -2$ ,  $2 < x$ .

166.  $f'(x) = 2 \sin 4x$ ,  $f$  szigorúan monoton nő, ha  $0 < x < \pi/4$ ,  $\pi/2 < x < 3\pi/4$ , szigorúan monoton csökken, ha  $\pi/4 < x < \pi/2$ ,  $3\pi/4 < x < \pi$ .

167.  $f'(x) = \frac{1}{3}(x+2)^{-2/3} > 0$ ,  $f$  szigorúan monoton nő, ha  $x < -2$ ,  $x > -2$ .

168.  $f'(x) = \frac{4}{3}x^{-2/3}(x+1)$ ,  $f$  szigorúan monoton nő, ha  $-1 < x < 0$  vagy  $0 < x$ , szigorúan monoton csökken, ha  $x < -1$ .

169. Tekintsük az  $f(x) = x - \sin x$  függvényt. Ha  $0 < x < \pi$  akkor  $f'(x) > 0$ , így  $f$  szigorúan monoton nő; ebből, mivel  $f(0) = 0$ , következik, hogy  $f(x) > 0$ , ha  $0 < x < \pi$ . Ha pedig  $x \geq \pi$ , akkor  $f(x) \geq \pi - 1 > 0$ . Tehát  $f(x) > 0$ , ha  $x > 0$ , azaz  $x - \sin x > 0$ . Ez bizonyítja az egyik egyenlőtlenséget. A másik hasonlóan adódik, csak az előző gondolatmenet kétszeri alkalmazásával:  $f(x) = \sin x - x + x^3/3 > 0$ , ha  $x > 0$ , ugyanis  $f(0) = 0$  és  $f'(x) = \cos x - 1 + x^2 > 0$ , ami azért igaz, mert  $f'(0) = 0$  és  $f''(x) = -\sin x + x > 0$ , amint azt már bizonyítottuk.

170. Az előző feladathoz hasonlóan oldható meg.

171. Legyen  $f(x) = x^\alpha - 1 - \alpha(x-1)$ . Mivel  $f(1) = 0$  és  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha > 0$ , ha  $\alpha > 1$  és  $x > 1$ , ezért  $f(x) > 0$ , ami bizonyítja az egyenlőtlenséget.

172. A  $p'$  polinomnak legfeljebb  $n-1$  valós gyöke van, ezek közül jelölje  $a$  a legkisebbiket,  $c$  a legnagyobbikat, és legyen  $b$  az  $|a|$  és  $|c|$  maximuma. Ekkor  $p'$ -nek nincs gyöke a  $(-\infty, -b)$  és a  $(b, \infty)$  intervallumokban, tehát egyikben sem vált előjelet, így  $p$  mindkettőben szigorúan monoton.

$$173. y'(x) = \frac{1 - 2xy(x) - 3y^3(x)}{x^2 + 9xy^2(x)} \quad 174. y'(x) = -\frac{y^2(x)}{x^2}.$$

9. Differenciálhányados, derivált

175. Az is megtehető, hogy az egyenletet nem rendezzük 0-ra, hanem mindkét oldalát külön-külön differenciáljuk  $x$  szerint:

$$(3xy(x))' = (((x^3 + y^2(x))^{\frac{3}{2}})')', \text{ amiből } y'(x) = \frac{\frac{3}{2}x^2\sqrt{x^3 + y^2(x)} - y(x)}{x - y(x)\sqrt{x^3 + y^2(x)}}.$$

176.  $\cos(x^2y^2(x))(2xy^2(x) + 2x^2y(x)y'(x)) = 1$ , amiből  $y'(x)$  kifejezhető.

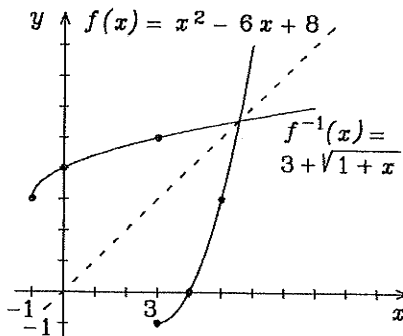
177.  $2y(x) + 2xy'(x) - 2y(x)y'(x) = 0$ , amiből  $y'(x) = \frac{y(x)}{y(x) - x}$ . Ebből

$$y''(x) = \frac{y'(x)(y(x) - x) - y(x)(y'(x) - 1)}{(y(x) - x)^2} = \frac{y^2(x) - 2xy(x)}{(y(x) - x)^3} = \frac{3}{(x - y(x))^3}.$$

178.  $y'(x) = \frac{\cos y(x)}{1 + x \sin y(x)}$ ,  $y''(x) = -\frac{\sin 2y(x) + x \cos y(x)(\sin^2 y(x) + 1)}{(1 + x \sin y(x))^3}$ .

179.  $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$ ,

180. Az inverz kiszámításához  $f(x)$  helyébe  $y$ -t írunk ( $y = x^2 - 6x + 8$ ), és az így kapott egyenletből kifejezzük  $x$ -et:  $x = 3 \pm \sqrt{1 + y}$ . Mivel a feladat szerint  $x \geq 3$ , ezért  $x = 3 + \sqrt{1 + y}$ , azaz az inverz függvénykapcsolat:  $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{1 + x}$  (itt  $x$  helyébe  $f^{-1}(x)$ -et,  $y$  helyébe  $x$ -et írtunk).  $\text{Dom } f^{-1} = [-1, \infty)$  és  $\text{Ran } f^{-1} = [3, \infty)$ , mivel  $\text{Dom } f = [3, \infty)$  és  $\text{Ran } f = [-1, \infty)$ . (lásd ábra)



181. Az  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  egyenletből kapjuk, hogy  $x = \frac{-dy+b}{cy-a}$ , azaz  $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ . Az  $ad - bc = 0$  pontosan akkor áll fenn, ha  $ax + b$  és  $cx + d$  egyike konstansszorososa a másiknak, azaz  $f$  vagy nincs értelmezve egyetlen  $x$  pontban sem, vagy  $f$  egy konstansfüggvény és akkor nem invertálható. Könnyen ellenőrizhető, hogy  $ad - bc \neq 0$  esetén a fenti egyenletből  $x$  egyértelműen kifejezhető, tehát  $f$  egész értelmezési tartományán invertálható.

182. Egy függvény inverzének grafikonja a függvény grafikonjának tükörképe az  $y = x$  egyenletű egyenesre. Így egy függvény pontosan akkor inverze önmagának, ha grafikonja szimmetrikus az  $y = x$  egyenletű egyenesre. Meg kell tehát mutatnunk, hogy  $f^{-1}(x) = f(x)$ .  $f$  inverzét megkapjuk a következő egyenletből:

$$x = \frac{af^{-1}(x) + b}{cf^{-1}(x) - a}, \text{ amiből } f^{-1}(x) = \frac{ax + b}{cx - a}.$$

183. Az előző feladat speciális esete.

184.  $f^{-1} = f$ .

185. Ha  $f$  nem monoton, akkor van négy olyan  $x_1 < x_2$ ,  $x_3 < x_4$  pont, hogy  $f(x_1) < f(x_2)$ , de  $f(x_3) > f(x_4)$ . Könnyen látható, hogy e négy pont közül mindig kiválasztható a feladat feltételeit kielégítő három.

186. Az állítás az előző feladatból és a T.8.21 tételből következik.

9. Differenciálhányados, derivált

187.  $y_0 = f(1) = -1$ ,  $f'(x) = 15x^2 + 1$ ,  $f'(1) = 16$ . Mivel  $f'(x) > 0$ , ha  $x \in \mathbf{R}$ , ezért  $f$  szigorúan monoton növő, s ezért invertálható. Inverz függvény grafikonja az eredetinek az  $y = x$  egyenesre való tükrözése által kapható, a 16 iránytangensű egyenes tükörképének iránytangense pedig  $1/16$ , tehát  $f^{-1}(-1) = 1/16$ , míg általában  $f^{-1}(y_0) = 1/(15x_0^2 + 1)$ . Ugyanezt kapjuk az inverzfüggvény tételből is, hisz

$$\left(\frac{df^{-1}}{dy}\right)_{y=-1} = \frac{1}{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=1}} = \frac{1}{(15x^2 + 1)_{x=1}} = \frac{1}{16}.$$

Az inverz függvényt leíró implicit alak:  $y = 5(f^{-1}(y))^3 + f^{-1}(y) - 7$ , vagy az  $x = f^{-1}(y)$  jelöléssel:  $y = 5x^3 + x - 7$ . Mindkét oldal  $y$  szerinti differenciálásával kapjuk, hogy  $1 = 15x^2 \frac{dx}{dy} + \frac{dx}{dy}$ . Ebből  $f^{-1}$  deriváltja:  $(f^{-1})'(y) = \frac{dx}{dy} = 1/(15x^2 + 1)$ .

188.  $y_0 = f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$ ,  $(f^{-1}(y))'_{y=1} = \frac{\cos^2 2x}{2} \Big|_{x=\pi/8} = \frac{1}{4}$ .

189.  $y_0 = f(0) = 0$ ,  $(f^{-1}(y))'_{y=0} = 1/(7 - 3 \cos 3x) \Big|_{x=0} = 1/4$ .

190.  $y_0 = f(1) = 4$ ,  $(f^{-1}(y))'_{y=4} = 1/(10x^4 + 3x^2) \Big|_{x=1} = 1/13$ .

191. Ha  $a \in A$ , akkor  $b = g(a) \in B$  és  $c = f(b) = f(g(a)) \in C$ . Mivel  $f$  és  $g$  invertálhatók, ezért  $f^{-1}(c) = b$ ,  $g^{-1}(b) = a$  és ezért  $(g^{-1} \circ f^{-1})(c) = g^{-1}(f^{-1}(c)) = g^{-1}(b) = a$ . Másrészt  $(f \circ g)(a) = c$ , ezért  $(f \circ g)^{-1}(c) = a$ , tehát  $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ .

192.  $f'(x) > 0$ , ha  $x \in (0, \infty)$ , így  $f$  a  $(0, 3)$  intervallumon is szigorúan monoton növő. Mivel  $f(1) = 3$ , ezért  $g(3) = 1$ , továbbá  $\left(\frac{dg}{dy}\right)_{y=3} = \frac{1}{f'(x)} \Big|_{x=1} = \frac{1}{4x^3 + 3x^2} \Big|_{x=1} = \frac{1}{7}$ , ahol  $y = f(x)$ .  $F'(x) = (f(2g(x)))' = f'(2g(x))2g'(x)$ , tehát  $F'(3) = (4(2g(3))^3 + 3(2g(3))^2)2g'(3) = 88/7$ .

193.  $f(\pi^2) = 0$ ,  $f'(\pi^2) = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \Big|_{x=\pi^2} = \frac{-1}{2\pi}$ ,  
érintő:  $y = -\frac{x}{2\pi} + \frac{\pi}{2}$ , normális:  $y = 2\pi x - 2\pi^3$ .

194.  $f(\pi) = 0$ ,  $f'(\pi) = \left(-\frac{\pi^2}{x^2}\right) \cos \frac{\pi^2}{x} \Big|_{x=\pi} = 1$ ,  
érintő:  $y = x - \pi$ , normális:  $y = -x + \pi$ .

195.  $f(3) = 3$ ,  $f'(3) = 3x^2 - 8 \Big|_{x=3} = 19$ ,  
érintő:  $y = 19x - 54$ , normális:  $y = -\frac{x}{19} + \frac{60}{19}$ .

196.  $y$ - $t$  függvényének tekintve és az implicit függvény differenciálási szabályát használva:  $3x^2 + 3y^2(x)y'(x) - 6y(x) - 6xy'(x) = 0$ , így az  $x = 3$ ,  $y(3) = 3$  értékek behelyettesítésével kapjuk, hogy  $y'(3) = -1$ .

Érintő:  $y = -x + 6$ , normális:  $y = x$ . (A gyakorlatban a fenti deriváltat csak  $3x^2 + 3y^2y' - 6y - 6xy' = 0$  alakban írjuk fel.)

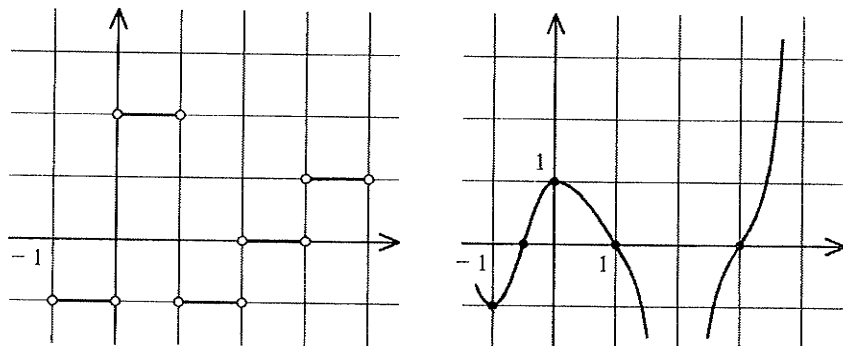
197.  $y' = (1 + y') \cos(x + y)$ ,  $y'(\pi) = -\frac{1}{2}$   
Érintő:  $y = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$ , normális:  $y = 2(x - \pi)$ .

9. Differenciálhányados, derivált

198.  $f(x) = f(x) \sin ax$ , ha  $\sin ax = 1$ , azaz ha  $ax = \pi/2 + 2k\pi$ .  
Ekkor  $(f(x) \sin ax)'|_{ax=\pi/2+2k\pi} = (f'(x) \sin ax + af(x) \cos ax)|_{ax=\pi/2+2k\pi} = f'(x)$ , tehát a deriváltak megegyeznek a közös pontban, így a görbék érintik egymást.
199.  $2x - 4 + 2yy' = 0$ , amiből  $y' = (2 - x)/y$ . Az egyenes egyenlete  $y = mx$ . Az  $(x_0, y_0)$  érintési pontra és az érintő  $m$  iránytangensére az alábbi egyenletek állnak fenn:  $x_0^2 - 4x_0 + y_0^2 + 3 = 0$ ,  $(2 - x_0)/y_0 = m$ ,  $y_0 = mx_0$ . Ezekből  $m = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ , tehát két ilyen egyenes van, és ezek egyenlete:  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ,  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ .
200.  $b^2 - 4ac = 0$ .
201. Vízszintes az érintő ott, ahol  $y'(x) = 0$ , azaz  $3x^2 + p = 0$ , tehát  $x = \pm \sqrt{-p/3}$ .  
Ha e pontokban  $y(x) = 0$ , akkor az érintő az  $x$ -tengely lesz. A behelyettesítést elvégezve, rövid számolás után megkapjuk a kívánt összefüggést.
202.  $f(0) = g(0) = 0$ ,  $f'(0) = g'(0) = 1$ ,  $f''(0) = g''(0) = 0$ ,  $f'''(0) = g'''(0) = -1$ ,  
 $f^{(4)}(0) = g^{(4)}(0) = 0$ ,  $f^{(5)}(0) = 1 \neq g^{(5)}(0) = 0$ .
203.  $f^{(i)}(0) = g^{(i)}(0)$ , ha  $0 \leq i \leq 5$ , de  $f^{(6)}(0) = -1 \neq g^{(6)}(0) = 0$ .
206. A T 9.26 tétel szerint legalább másodrendben, valójában harmadrendben.
207. A T 9.26 tétel szerint legalább elsőrendben, a deriváltakat kiszámolva látható, hogy pontosan elsőrendben érintik egymást.
208. A metszéspontok  $P_1(2, 2)$  és  $P_2(2, -2)$ .  $P_1$ -ben a két iránytangens 0 és  $-1$ , tehát a hajlásszög  $\pi/4$ .  $P_2$ -ben a két iránytangens 0 és 1, a hajlásszög itt is  $\pi/4$ .
209. A metszéspontok  $P_1(2\sqrt{2}, 2)$ ,  $P_2(-2\sqrt{2}, 2)$ ,  $P_3(2\sqrt{2}, -2)$ ,  $P_4(-2\sqrt{2}, -2)$ . Az ellipszis érintőjének iránytangense  $m_1 = -2x/y$ , a hiperboláé  $m_2 = x/(4y)$ .  
Ha  $x$  és  $y$  helyébe bármelyik metszéspont koordinátáit helyettesítjük,  $m_1 m_2 = -1$  adódik, tehát a két görbe merőlegesen metszi egymást mind a négy pontban.
210. A metszéspontok  $P_1(3, 4)$ ,  $P_2(4, 3)$ ,  $P_3(-3, -4)$ ,  $P_4(-4, -3)$ . A hiperbola érintőjének iránytangense  $m_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = -y/x$ , a köré  $m_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = -x/y$ . Az érintők hajlásszögének tangense:
- $$\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \pm \frac{7}{24},$$
- azaz a hajlásszög mind a négy pontban  $|\alpha_1 - \alpha_2| = \operatorname{arctg} \frac{7}{24}$ .
211. A sugár  $r(2) = 1/2$ , a középpont  $(2, -5/2)$ .
212. Mivel a  $P(0, 0)$  pontban az érintő függőleges, ezért  $x$  és  $y$  szerepének felcserélésével áttérünk az inverz függvényre:  $2py = x^2$ ,  $y' = x/p$ ,  $y'' = 1/p$ . A képletbe való behelyettesítéssel kapjuk, hogy a sugár  $p(1 + x^2/p^2)^{3/2}$ , a középpont  $(-x^3/p^2, \frac{3}{2}x^2/p + p)$ . E képleteket a  $2py = x^2$  behelyettesítésével átírjuk  $y$  függvényévé: a sugár  $p(1 + \frac{2y}{p})^{3/2}$ , a középpont  $(-(2y)^{3/2}/\sqrt{p}, 3y + p)$ . Visszatérve az inverz függvényről az eredetire, azaz visszacsereélve az  $x$  és  $y$  változókat kapjuk, hogy a sugár  $p(1 + \frac{2x}{p})^{3/2}$ , a középpont  $(-(2x)^{3/2}/\sqrt{p}, 3x + p)$ .
213. A sugár  $a^2/b$ , a középpont  $(0, (b^2 - a^2)/b)$ .

9. Differenciálhányados, derivált

214. Térjünk át  $x$  és  $y$  szerepének felcserélésével az inverz függvénykapcsolatra, és vizsgáljuk a  $-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$  egyenletű görbe simuló körét a  $(0, a)$  pontban, majd cseréljük vissza  $x$ -et és  $y$ -t. A sugár  $b^2/a$ , a középpont  $((a^2 + b^2)/a, 0)$ .
- 215.



216. Ha  $f$  differenciálható  $x_0$ -ban, akkor folytonos is ott, tehát bal oldali és jobb oldali határértékei megegyeznek.

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = ax_0 + b, \quad \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = x_0^2, \quad \text{így } x_0^2 = ax_0 + b.$$

Ha  $f$  differenciálható, akkor a differenciálhányados bal oldali és jobb oldali határértékei ugyancsak megegyeznek.

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a, \quad \lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2x_0,$$

azaz  $2x_0 = a$ . A két egyenletből pedig kapjuk, hogy  $a = 2x_0$  és  $b = -x_0^2$ .

$$217. \quad \lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

a jobb oldali és bal oldali határérték megegyezik, így  $g$  differenciálható az  $x_0$  pontban és  $g'(x_0) = f'(x_0)$ .  $g$  grafikonja  $x > x_0$  esetén megegyezik az  $f$  függvény  $x_0$ -beli érintőjével.

$$218. a = -\frac{m^2}{2c^3}, \quad b = \frac{3m^2}{2c}.$$

$$219. a = \frac{1}{2}f''(x_0), \quad b = f'(x_0), \quad c = f(x_0).$$

220. a) Igaz, b) nem igaz. 221. Egyik sem igaz.

222. Egyik sem igaz.

$$223. F''(x) = g'^2(x)f''(g(x)) + g''(x)f'(g(x)),$$

$$F'''(x) = g'^3(x)f'''(g(x)) + 3g'(x)g''(x)f''(g(x)) + g'''(x)f'(g(x)).$$



## 10. Egyváltozós valós elemi függvények (megoldások)

1. A maradékos osztást az alábbiak szerint végezzük: leírjuk egymás után az osztandót és az osztót; elosztjuk a legmagasabb kitevőjű tagokat, azaz  $2x^3$ -öt  $x^2$ -tel ( $2x^3 : x^2 = 2x$ ), és a  $2x$ -et leírjuk az eredményhez; az osztót visszaszorozzuk  $2x$ -szel és a szorzatot ( $2x^3 + 6x^2 + 2x$ ) az osztandó alá írjuk, majd kivonjuk az osztandóból; az így kapott polinommal megismételjük az előbbi eljárást, és ezt addig folytatjuk, míg az osztónál kisebb fokú maradékot nem kapunk.

$$\begin{array}{r} (2x^3 + 2x^2 - 4x - 2) : (x^2 + 3x + 1) = 2x - 4 \\ \underline{-2x^3 \quad \pm 6x^2 \quad \pm 2x} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -4x^2 - 6x - 2 \\ \underline{\mp 4x^2 \quad \mp 12x \quad \mp 4} \end{array}$$

$$\underline{\quad \quad \quad +6x \quad +2}$$

Tehát a hányados  $q(x) = 2x - 4$ , a maradék  $r(x) = 6x + 2$ . Eredményünket az  $f = qg + r$  alakba írva:  $2x^3 + 2x^2 - 4x - 2 = (x^2 + 3x + 1)(2x - 4) + (6x + 2)$ .

2.  $q(x) = x - 1$ ,  $r(x) = 0$ .                      3.  $q(x) = x^3$ ,  $r(x) = x^2 + 2x + 3$ .
4.  $q(x) = x^2 + 2x$ ,  $r(x) = -3x^2 + 2x + 3$ .
5.  $q(z) = z^2 + iz + 4$ ,  $r(z) = 2i$ .                      6.  $q(z) = z - i$ ,  $r(z) = 0$ .
7.  $q(x) = x^{3k-3} + x^{3k-6} + \dots + x^3 + 1$ ,  $r(x) = 0$ .
8.  $q(x) = x^{3k-2} - x^{3k-3} + x^{3k-5} - x^{3k-6} + \dots + x^4 - x^3 + x - 1$ ,  $r(x) = 1$ .
9. a) b) c)  $f(x) = (x + 1)^2(x - \frac{1}{2})$ , d)  $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ .
10. a) b) c)  $f(x) = (x - 1)(x + 2)^2(x + 1)$ , d)  $f(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4$ .
11. a) b) c)  $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ , d)  $f(x) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc$ .
12. a)  $f(x) = (x - 1)(x - i)(x + i)$ , b) c)  $f(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$ , d)  $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ .
13. a)  $f(x) = (x - 1)(x - i)^2(x + i)^2$ , b)  $f(x) = (x - 1)(x^2 + 1)^2$ , c)  $f(x) = (x - 1)(x^4 + 2x^2 + 1)$ , d)  $f(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1$ .
14. a)  $f(x) = (x - 1)(x - 1 - i)^2(x - 1 + i)^2$ , b)  $f(x) = (x - 1)(x^2 - 2x + 2)^2$ ,  
c)  $f(x) = (x - 1)(x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4)$ ,  
d)  $f(x) = x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 16x^2 + 12x - 4$ .
15. a)  $f(x) = (x + 1)(x - i)(x + i)(x - 1 - i)(x - 1 + i)$ , b)  $f(x) = (x + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2)$ , c)  $f(x) = (x + 1)(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2)$ , d)  $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 + x^2 + 2$ .
16. a)  $f(x) = (x - i)^2(x + i)$ , b) c) ilyen alakok nincsenek, mivel az egymásnak konjugált komplex zérushelyek nem ugyanannyiszoros zérushelyek ( $k_1 \neq k_2$ ), és ezért a **T 10.4** miatt  $f$  együtthatói nem lehetnek mind valósak,  
d)  $f(x) = x^3 - ix^2 + x - i$ .

## 10. Egyváltozós valós elemi függvények

17. a)  $f(x) = (x-i)^2(x+i)^3$ , b) c) az előző feladatban leírtak szerint ilyen alakok nincsenek, d)  $f(x) = x^5 + ix^4 + 2x^3 + 2ix^2 + x + i$ .
18. a)  $f(x) = (x-i)(x-2-i)(x-2+i)$ , b) c) ilyen alakok nincsenek, mivel az egymásnak konjugált komplex zérushelyek nem ugyanannyiszoros zérushelyek, hisz  $i$  egyszeres zérushely,  $-i$  nem zérushely, tehát a T 10.4 miatt  $f$  együtthatói nem lehetnek mind valósak, d)  $f(x) = x^3 - (4+i)x^2 + (5+4i)x - 5i$ .
19. Legyen  $f(x) = (x^2 - 1)^n$ .  $f$ -nek  $-1$  és  $1$  is  $n$ -szeres zérushelye. Az  $f'$  függvénynek  $-1$  és  $1$  is  $(n-1)$ -szeres zérushelye, és a Rolle-féle középértéktétel szerint van még egy zérushelye a  $(-1, 1)$  intervallumban. Az  $f''$  függvénynek  $-1$  és  $1$  is  $(n-2)$ -szeres zérushelye és megint csak a Rolle-féle középértéktétel szerint van még két zérushelye a  $(-1, 1)$  intervallumban, melyeket elválaszt egymástól  $f'$  egy zérushelye. A gondolatmenetet hasonlóképpen folytatva azt kapjuk, hogy az  $f^{(n)}$  függvénynek a  $(-1, 1)$  intervallumban  $n$  zérushelye van, melyeket elválaszt egymástól az  $f^{(n-1)}$  függvény  $(n-1)$  zérushelye, azaz e zérushelyek különbözőek.
20. Írjuk  $f$  együtthatóit az első sorba. Vigyázzunk,  $x^5$  és  $x^2$  együtthatója 0.
- |    |   |    |   |    |   |     |
|----|---|----|---|----|---|-----|
| 1  | 0 | -1 | 2 | 0  | 1 | -1  |
| -2 | 1 | -2 | 3 | -4 | 8 | -15 |
| 29 |   |    |   |    |   |     |
- Tehát,  $f(-2) = 29$ .
21. A Horner-séma komplex számokkal is ugyanúgy működik:
- |                      |    |         |        |   |    |   |
|----------------------|----|---------|--------|---|----|---|
| 3                    | -4 | 13 + 8i | 1 - 2i | 0 | 4  | 0 |
| 2i                   | 3  | -4 + 6i | 1      | 1 | 2i | 0 |
| Tehát, $f(2i) = 0$ . |    |         |        |   |    |   |
22.  $f(-4) = -5079$ .      23.  $f(1,39) = 10,80418$ .      24.  $f(\cos 1) = 0,808$ .
25. Írjuk fel a Horner-sémát a  $c = 1$  értékkel.
- |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
- tehát a hányados  $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ , a maradék 5, azaz  $\frac{f(x)}{x-1} = x^3 + 2x^2 + 3x + 4 + \frac{5}{x-1}$ .
26.  $f(x)/g(x) = x^8 - x^7 + x^4 - x^3 + 1 - 1/(x+1)$ .
27.  $f(x)/g(x) = 3,11x^4 + 4,20x^3 + 13,96x^2 + 24,28x + 32,78 + 34,27/(x-1,35)$ .
28.  $f(x)/g(x) = 0,45x^2 + 1,02x + 0,56 - 0,20/(x - \operatorname{tg} 0,5)$ .
29.  $f(x)/g(x) = x^4 + ix^3 - x^2 + (2-i)x + 2i$ , mivel a maradék 0.
30.  $f(x)/g(x) = x^4 + (-1+i)x^3 + (3-i)x^2 - x + 2 + i + 1/(x+2+i)$ .
31.  $f(x) = a(x+1)^4 + b(x+1)^3 + c(x+1)^2 + d(x+1) + e$  alakú előállításat kerünk.  $e$  éppen maradéka az  $f(x)$  polinom  $(x+1)$ -gyel való maradékos osztásának, a hányados  $(x+1)$ -gyel való osztásának maradéka pedig  $d$ . Hasonlóan folytatva kapjuk a  $c$ ,  $b$ ,  $a$  értékeket. A maradékos osztásokat egyetlen táblázatban ábrázoltuk, a keresett együtthatókat vastag számokkal jelöltük.

10. Egyváltozós valós elemi függvények

	1	2	-3	-4	1
-1	1	1	-4	0	1
-1	1	0	-4	4	
-1	1	-1	-3		
-1	1	-2			
-1	1				

tehát  $f(x) = (x + 1)^4 - 2(x + 1)^3 - 3(x + 1)^2 + 4(x + 1) + 1$ .

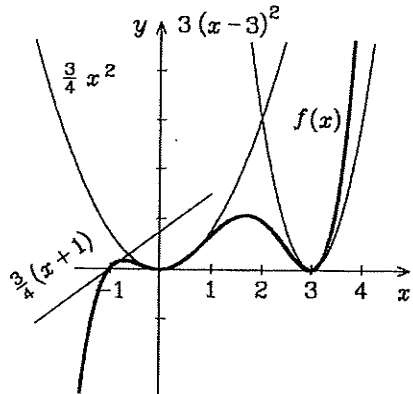
32.  $f(x) = (x + 1)^4 - 3(x + 1)^2$ .
33.  $f(x) = (x - 1)^5 + 5(x - 1)^4 + 10(x - 1)^3 + 10(x - 1)^2 + 5(x - 1) + 1$ . Ezt az eredményt a Horner-módszernél sokkal gyorsabban megkapjuk a binomiális tételből, ha kifejtjük az alábbi kifejezést:  $x^5 = [(x - 1) + 1]^5$ .
34. A T 10.3 szerint a maradék  $f(a)$ , azaz  $(p - 3)a^4$ . Ez pontosan akkor 0, ha  $p = 3$  (és  $a$  tetszőleges), vagy  $a = 0$  (és  $p$  tetszőleges).
35. Az egyenletet először egész együtthatóssá alakítjuk:  $2x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x - 2 = 0$ . Ennek racionális, nem egyszerűsíthető  $p/q$  alakú gyökei lehetnek azok, amelyekre  $p \mid -2$ , tehát  $p = \pm 1, \pm 2$ , és  $q \mid 2$ , tehát  $q = \pm 1, \pm 2$ . Ebből  $p/q$  lehetséges értékei:  $\pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2$ . A Horner-módszerrel azt kapjuk, hogy  $\frac{1}{2}$  és  $-1$  az egyenlet gyökei. Osztva az  $(x - \frac{1}{2})$  és az  $(x + 1)$  polinomokkal kapjuk,

hogyan

	2	1	3	2	-2
-1	2	-1	4	-2	0
$\frac{1}{2}$	2	0	4	0	

tehát  $2x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x - 2 = (x - \frac{1}{2})(x + 1)(2x^2 + 4)$ , azaz 2-vel való osztás után  $x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x - 1 = (x - \frac{1}{2})(x + 1)(x^2 + 2)$ .

36. A racionális gyökök:  $1, -\frac{1}{2}, -3$ , a szorzatalak:  $(x - 1)(x + \frac{1}{2})(x + 3)$ .
37. Az egyenletnek nincs racionális gyöke. (Egyébként a valós szorzatalak:  $x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 3 = (x^2 + x + 1)(x^2 - 3)$ .)
38. A racionális gyökök:  $-1, -2, -3, -4$ , a szorzatalak:  $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$ .
39. A zérushelyek:  $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 3$ . Az  $f(x)$  grafikonját az  $x_1 = 0$  helyen legalább másodrendben érinti az  $f_1(x) = \frac{1}{12}x^2(0 + 1)(0 - 3)^2 = \frac{3}{4}x^2$  polinom grafikonja, az  $x_2 = -1$  helyen legalább elsőrendben érinti az  $f_2(x) = \frac{1}{12}(-1)^2(x + 1)(-1 - 3)^2 = \frac{3}{4}(x + 1)$  polinom grafikonja, és az  $x_3 = 3$  helyen legalább másodrendben érinti az  $f_3(x) = \frac{1}{12}(3)^2(3 + 1)(x - 3)^2 = 3(x + 3)^2$  polinom grafikonja.



40.  $x = 0: -\frac{4}{9}x, x = -2: 6(x + 2)^2, x = 1: (x - 1)^3$ .
41.  $x = 0: \frac{36}{25}x, x = -3: 3(x + 3)^2, x = 2: 2(x - 2)^2$ .

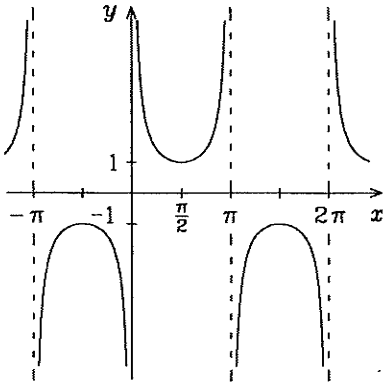


10. Egyváltozós valós elemi függvények

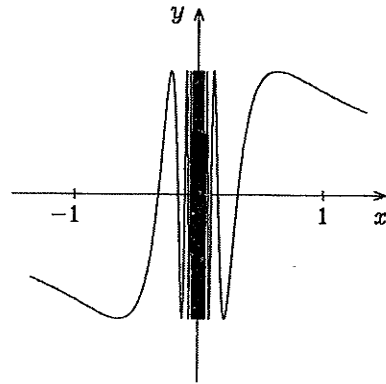
$f + g$  is periodikus  $p$  szerint, ha nem konstans. A többi műveletre a bizonyítás hasonló.

78. Függvénytranszformációkkal az alábbi lépéseken át:  $\sin x$ ,  $\sin 2x$ ,  $3 \sin 2x$ ,  $3 \sin 2x + 1$ .
79. Az alábbi lépéseken át:  $\sin x$ ,  $\sin 2x$ ,  $3 \sin 2x$ ,  $3 \sin 2(x - \frac{\pi}{6})$ ,  $3 \sin 2(x - \frac{\pi}{6}) - 2$ .
80. A  $\cos$  függvény grafikonját  $k$ -szorosára zsugorítjuk az  $x$ -tengely mentén.
81. A  $\sin$  függvény grafikonját  $k$ -szorosára nyújtjuk az  $x$ -tengely mentén.
82.  $\operatorname{ctg} x$ ,  $\operatorname{ctg}(x + \pi/2)$ ,  $-2 \operatorname{ctg}(x + \pi/2)$ , vagy felhasználva, hogy  $-2 \operatorname{ctg}(x + \pi/2) = 2 \operatorname{tg} x$ .
83.  $a \sin(bx + c) = a \sin b(x + c/b)$ :  $b$ -szeres zsugorítás az  $x$ -tengely irányában,  $a$ -szoros nyújtás az  $y$ -tengely irányában,  $-c/b$ -vel való eltolás az  $x$ -tengely irányában.

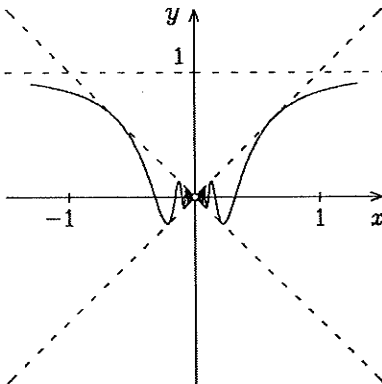
84.



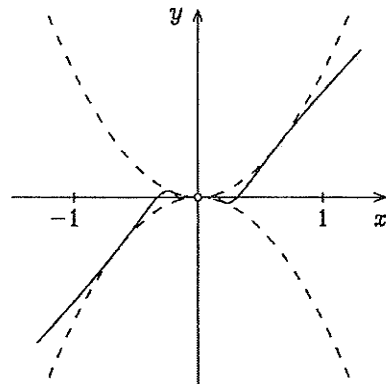
85.



86.



87.



91.  $\cos x \sin x(1 - 2 \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x$ .

92.  $\sin x + \cos x = \sqrt{2}(\sin x \cos(\pi/4) + \cos x \sin(\pi/4)) = \sqrt{2} \sin(x + \pi/4)$ .

10. Egyváltozós valós elemi függvények

93.  $\sqrt{3} \sin x + 2 \cos x = \sqrt{7} \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \sin x + \frac{2}{\sqrt{7}} \cos x \right) = \sqrt{7} \sin(x + \varphi)$ , ahol  $\cos \varphi = \sqrt{3}/\sqrt{7}$  és  $\sin \varphi = 2/\sqrt{7}$ .
94.  $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$ , ahol  $\cos \varphi = a/\sqrt{a^2 + b^2}$  és  $\sin \varphi = b/\sqrt{a^2 + b^2}$ .  
 Eszerint  $a \sin x + b \cos x$  grafikonját a  $\sin x$  grafikonjából egy  $y$ -tengely irányú  $\sqrt{a^2 + b^2}$ -szeres nagyítással, és egy  $x$ -tengely irányú  $\varphi$ -vel való eltolással kaphatjuk meg.
95.  $\sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right) + \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = 2 \sin x \cos \frac{\pi}{3} = \sin x$ .
96.  $\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg}(\pi/4) + \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}(\pi/4) - \operatorname{tg}(\pi/4) \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + x \right)$ .
98.  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg}(\pi - (\alpha + \beta)) = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta - \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = -\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = -\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$ .
99.  $\frac{-2 \sin \frac{1}{3x}}{3x^2 \cos^3 \frac{1}{3x}}$ .
100.  $\frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ .
101.  $\frac{3 \sin^2 x (\cos 2x \cos x + 2 \sin 2x \sin x)}{\cos^4 2x}$ .
102.  $-2x \sin x^2 \cos(\cos x^2)$ .
103.  $x \cos x^2 / \sqrt{\sin x^2}$ .
104.  $-\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{3} / \sin^2 \frac{x}{3}$ .
105. 1,82348.
106. 0,005.
107.  $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$ , így  $\operatorname{arcctg} 10 = 0,09967$ .
108.  $\pi/4$ .
109.  $\pi/6$ .
110.  $\pi/6$ .
111.  $3\pi/4$ .
112.  $2\pi < 7 < 2\pi + \pi/2$ , így  $\arccos \cos 7 = 7 - 2\pi$ .
113.  $1,6 - \pi$ .
114.  $3\pi - 10$ .
115.  $13 - 4\pi$ .
116.  $4\pi - 13$ .
117.  $\frac{1}{\sqrt{x - x^2}}$ ,  $x \in (0, 1)$ ,
118.  $\frac{-2x}{2 - 2x^2 + x^4}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,
119.  $-\frac{1}{x^2}$ , mivel  $\operatorname{ctg} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} \operatorname{arctg} x} = \frac{1}{x}$ .
120.  $\frac{2(1 - x^2)}{|1 - x^2|(1 + x^2)} = \begin{cases} 2/(1 + x^2), & \text{ha } |x| < 1 \\ -2/(1 + x^2), & \text{ha } |x| > 1 \end{cases}$ . Az  $|x| = 1$  helyeken a függvény nem differenciálható.
121.  $-\frac{\sin x}{|\sin x|} = \begin{cases} -1, & \text{ha } 2k\pi < x < (2k + 1)\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ 1, & \text{ha } (2k + 1)\pi < x < (2k + 2)\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$ . Az  $x = k\pi$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ) helyeken a függvény nem differenciálható, bár folytonos.
122.  $\frac{-x}{|x|\sqrt{1 - x^2}}$ ,  $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ .
123. A függvények értelmezési tartományának közös része  $(0, 1)$ , és itt mindegyikük differenciálható. Mivel mindegyikük deriváltja  $1/\sqrt{x - x^2}$ , ezért a T

10. Egyváltozós valós elemi függvények

9.18 tétel szerint a függvények csak egy konstansban különböznek. A konstansok meghatározhatók, ha egyetlen  $x_0$  értéket behelyettesítünk mindegyik függvénybe. Például az  $x_0 = 0$  értéket behelyettesítve, illetve amelyik függvény nincs értelmezve 0-ban, ott a függvény 0-beli határértékét tekintve azt kapjuk, hogy:  $\arcsin(2x - 1) + \frac{\pi}{2} = 2 \arcsin \sqrt{x} = -2 \arcsin \sqrt{1-x} + \pi = 2 \arccos \sqrt{1-x} = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{1-x}} = -2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{x}} + \pi = 4 \operatorname{arctg} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} - \pi = -4 \operatorname{arctg} \frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} + 2\pi$ .

124. (1. megoldás) A  $\operatorname{tg} \arcsin x = (\sin \arcsin x) / (\cos \arcsin x) = x / \sqrt{1-x^2}$ , és az  $\arcsin x + \arccos x = \pi/2 \approx 1,5707963$  képletekből adódik helyességük.

(2. megoldás) Az első képlet esetében mindkét oldal deriváltja  $1/\sqrt{1-x^2}$ , ezért a 9.18 tétel szerint a két oldal különbsége konstans, tehát  $\arcsin x = \operatorname{arctg}(x/\sqrt{1-x^2}) + c$ , de  $\arcsin 0 = \operatorname{arctg}(0/\sqrt{1-0})$ , így  $c = 0$ .

125. A második ábrán jelölje  $\alpha$  az  $x$ -szel szemközti szöveget. Ekkor  $\sin \alpha = x$ , azaz  $\arcsin x = \alpha$ , másrészt  $\cos \alpha = \sqrt{1-x^2}$ , azaz  $\cos \arcsin x = \sqrt{1-x^2}$ . Felhasználva a  $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$  összefüggést kapjuk, hogy  $\cos \arcsin x = \pm \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \pm \sqrt{1-x^2}$ . Itt azonban mindig a pozitív előjel érvényes, mivel a  $\cos$  függvény az arcsin értékkészletén mindig pozitív. A  $\sin \arccos$  függvényre vonatkozó összefüggés hasonlóan bizonyítható.

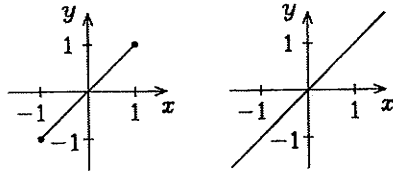
126.  $\operatorname{tg} \operatorname{arccotg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} \operatorname{arccotg} x} = \frac{1}{x}$ . Az első ábráról leolvasható.

127.  $\operatorname{tg} \operatorname{arccos} x = \frac{\sin \operatorname{arccos} x}{\cos \operatorname{arccos} x} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ . A harmadik ábráról leolvasható.

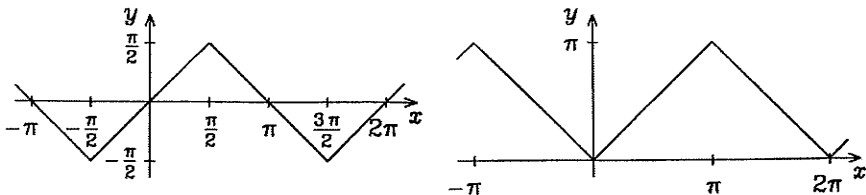
128. Az előző feladat megoldásához hasonlóan. Lásd még a 124. feladatot.

131. Ha  $\arcsin \sin x = y$ , akkor  $\sin x = \sin y$ , ahol  $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Ennek megoldásai:  $y = x + 2k\pi$ , ha valamely egész  $k$ -ra  $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ , vagy  $y = \pi - x + 2k\pi$ , ha valamely egész  $k$ -ra  $(2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$ .

135.  $\sin \arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]; x \mapsto x$ ,  
 $\cos \operatorname{arccos} : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]; x \mapsto x$ ,  
 $\operatorname{tg} \operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x$ ,  
 $\operatorname{ctg} \operatorname{arccotg} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x$ ,

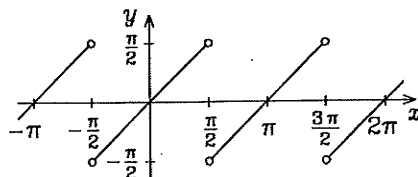


$\arcsin \sin : \mathbb{R} \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\operatorname{arccos} \cos : \mathbb{R} \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,

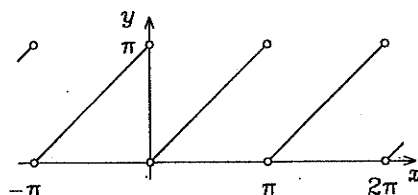


10. Egyváltozós valós elemi függvények

$$\operatorname{arctg} \operatorname{tg} : \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbf{Z} \right\} \rightarrow \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right),$$



$$\operatorname{arcc} \operatorname{ctg} : \mathbf{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbf{Z}\} \rightarrow (0, \pi).$$



136.  $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$  felhasználásával:  $1 - 2 \sin^2(\arcsin(-\frac{2}{3})) = 1 - 2(-\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{9}$ .

137.  $3/4$ .

138.  $56/65$ .

139.  $(\cos \arccos \frac{3}{5})(\cos \arcsin \frac{12}{13}) - (\sin \arccos \frac{3}{5})(\sin \arcsin \frac{12}{13}) = -33/65$ .

140. Vegyük mindkét oldal szinuszát:  $x = \sqrt{1 - x^2}$ , amiből  $x = 1/\sqrt{2}$ .

141. Vegyük mindkét oldal tangensét:  $\sqrt{1 - x^2}/x = x$ , amiből  $x = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}$ .

142. Vegyük mindkét oldal koszinuszát:  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$  miatt kapjuk, hogy  $1 - 2 \sin^2 \arcsin x = \cos \arccos 2x$ , azaz  $1 - 2x^2 = 2x$ , amiből  $x = (-1 \pm \sqrt{3})/2$ .  
A negatív gyök hamis, mivel abszolút értéke 1-nél nagyobb, így a megoldás:  $x = (\sqrt{3} - 1)/2$ .

143. Vegyük mindkét oldal tangensét:  $\frac{(x-1)-(x-2)}{1+(x-1)(x-2)} = 1$ , amiből  $x_1 = 1, x_2 = 2$ .

144. Vegyük mindkét oldal szinuszát. A megoldás  $x = 1/2$ .

145. A  $t = \arcsin ax$  helyettesítéssel, amikor is  $x = \frac{1}{a} \sin t$ , kapjuk hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin ax}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{at}{\sin t} = a.$$

146. 1. ( $t = \arctg x$  helyettesítéssel, az előző megoldáshoz hasonlóan.)

$$147. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin ax}{\arcsin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin ax}{x} / \frac{\arcsin bx}{x} = a/b.$$

148. Az előző feladatok gondolatmenetét és eredményeit felhasználva:  $a/b$ .

149.  $\operatorname{sgn} a \operatorname{sgn} b, b \neq 0$ .

150. Nem létezik, mivel a jobboldali határérték  $\pi/2$ , a baloldali  $-\pi/2$ .

151. A feladatbeli feltétel fennállása esetén az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a bal és a jobb oldalán álló kifejezés tangense is egyenlő. Azok pedig egyenlők:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) = \frac{\operatorname{tg} \operatorname{arctg} x + \operatorname{tg} \operatorname{arctg} y}{1 - \operatorname{tg} \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{tg} \operatorname{arctg} y} = \frac{x + y}{1 - xy} = \operatorname{tg} \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}.$$



10. Egyváltozós valós elemi függvények

152.  $0 < \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < \frac{\pi}{4}$ , tehát az előző feladatbeli feltétel fennáll, így az ottani képlet alkalmazható:

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

153.  $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$ ,  $\operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$ .

154.  $\operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{1}{4} = \operatorname{arctg} \frac{8}{15}$ ,  $\operatorname{arctg} \frac{8}{15} + \operatorname{arctg} \frac{1}{4} = \operatorname{arctg} \frac{47}{52}$ .

155.  $4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \operatorname{arctg} \frac{120}{119}$ .

156. Az egyenlőség ekvivalens a következővel:  $\arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{4}{5}$ . Ennek mindkét oldala 0 és  $\pi/2$  közé esik (a bal oldal például azért, mert  $\arcsin x < \frac{\pi}{2}x$ , ha  $x < 0$ , és így  $\arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65} < \frac{\pi}{2}(\frac{5}{13} + \frac{16}{65}) < \frac{\pi}{2}$ ), így ekvivalens átalakítás az, ha mindkét oldal koszinuszát vesszük. Egyrészt  $\cos(\arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65}) = \frac{4}{5}$ , másrészt  $\cos(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{4}{5}) = \sin \arcsin \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$ , vagyis a két oldal koszinusza egyenlő, tehát a két oldal is.

157. Mindkét oldal deriváltja  $\frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}}$ , ezért a két oldal legfeljebb egy additív konstansban térhet el egymástól. A két oldal  $x = 0$  helyen vett helyettesítési értéke megegyezik, így a konstans 0, vagyis a két oldal valóban megegyezik.

158. 1. megoldás. A 151. feladat eredményét felhasználva kapjuk, hogy

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1} = \operatorname{arctg} \frac{1/x - 1/(x+1)}{1 + 1/(x^2+x)} = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2+x+1}.$$

2. megoldás. Az előző feladat megoldásához hasonlóan: mindkét oldal deriváltja  $-(2x+1)/(x^4+2x^3+3x^2+2x+2)$ .

159. Az ábráról leolvasható, hogy az egy csúcsban összefutó három szög nagysága rendre  $\operatorname{arctg} 1$ ,  $\operatorname{arctg} 2$ ,  $\operatorname{arctg} 3$ , összegük pedig  $\pi$ .

160. a) 3, 5; b) 5; c) 3; d) 2; e) 1/9; f) 3; g) 27.

161. a)  $\frac{2}{3}$ ; b)  $\frac{3}{2}$ ; c)  $\frac{2}{3}$ ; d)  $\frac{9}{5}$ ; e) -2; f) -2; g) 5; h)  $-\frac{2}{3}$ ; i)  $\frac{1}{\pi}$ .

162.  $\operatorname{Dom} f = (0, 1) \cup (1, \infty)$ ,  $\operatorname{Ran} f = \mathbf{R}$ .

163.  $\operatorname{Dom} f = (0, 1) \cup (1, \infty)$ ,  $\operatorname{Ran} f = \{1\}$ .

164.  $\operatorname{Dom} f = \mathbf{R} \setminus \{\emptyset\}$ ,  $\operatorname{Ran} f = \mathbf{R}$ .

165.  $\operatorname{Dom} f = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (2k\pi, (2k+1)\pi)$ ,  $\operatorname{Ran} f = (-\infty, 0]$ .

166.  $\operatorname{Dom} f = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ ,  $\operatorname{Ran} f = (-\infty, 0]$ .

167.  $\operatorname{Dom} f = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left(k\pi, \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$ ,  $\operatorname{Ran} f = \mathbf{R}$ .

168.  $\operatorname{Dom} f = (0, 1]$ ,  $\operatorname{Ran} f = (-\infty, \ln \frac{\pi}{2}]$ .

169.  $\operatorname{Dom} f = [-1, 1)$ ,  $\operatorname{Ran} f = (-\infty, \ln \pi]$ .

170.  $\operatorname{Dom} f = [\frac{1}{e}, e]$ ,  $\operatorname{Ran} f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

171. Az  $x = \log_a b$ ,  $y = \log_c b$ ,  $z = \log_c a$  jelöléseket használva, a logaritmus definíciója alapján:  $a^x = b$ ,  $c^y = b$ ,  $c^z = a$ . Az utóbbi kettőt az előzőbe

## 10. Egyváltozós valós elemi függvények

helyettesítve kapjuk, hogy  $c^{xz} = c^y$ , amiből  $x = \frac{y}{z}$ , és ez  $x$ ,  $y$ ,  $z$  értékek visszahelyettesítése után a feladatbeli összefüggést adja. E formula egy másik könnyen megjegyezhető alakja:  $\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b$ .

172.1. megoldás. Az előző feladatból  $c = b$  helyettesítéssel.

2. megoldás. Az  $x = \log_a b$  jelöléssel, a logaritmus definíciója alapján  $a^x = b$ . Ebből, mindkét oldal  $b$  alapú logaritmusát véve, a logaritmus ismert azonosságai alapján  $x \log_b a = 1$ . Ez  $x$  értékének visszahelyettesítése után a feladatbeli összefüggést adja. E formula egy másik könnyen megjegyezhető alakja:  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ .

173. 10-es alapú logaritmusra áttérve:

$$\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \dots \cdot \log_{a_n} a_1 = \frac{\lg a_1 \lg a_2 \dots \lg a_n}{\lg a_2 \lg a_3 \dots \lg a_1} = 1.$$

174.1. megoldás.  $\log_{a^n} b = \frac{\lg b}{\lg a^n} = \frac{\lg b}{n \lg a} = \frac{1}{n} \log_a b$ .

2. megoldás. Az  $x = \log_{a^n} b$  jelöléssel  $a^{nx} = b$ , amiből  $\log_a b = nx$ .

175.  $\log_{a^n} b^n = \frac{\lg b^n}{\lg a^n} = \frac{n \lg b}{n \lg a} = \log_a b$ .

176.  $-\log_{1/a} b = \frac{\lg b}{-\lg(1/a)} = \frac{\lg b}{\lg a} = \log_a b$ .

177.  $\log_{ab} c = \frac{1}{\log_c ab} = \frac{1}{\log_c a + \log_c b} = \frac{1}{1/\log_a c + 1/\log_b c} = \frac{\log_a c}{1 + \log_a c/\log_b c} = \frac{1}{1 + \log_a b}$ .

178. Az előzőhöz hasonlóan.

179.  $\log_{a_1 \dots a_n} c = \frac{1}{\log_c a_1 \dots a_n} = \frac{1}{\log_c a_1 + \dots + \log_c a_n} = \frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} c} + \dots + \frac{1}{\log_{a_n} c}}$ .

180. 0,6931; 0,3010; 2,3026; 0,4343; 1,1447.

181. 1,5850; 0,6309; 0,8736; 3,3219; 0,8097.

182. 2, 1, 1 (l. 177-179). 183. 1/2, 2, 1 (l. 173, 175).

184.  $\lg 8 = \lg 2^3 = 3 \lg 2 \approx 0,903$ ;  $\lg 5 = \lg 10/2 = 1 - \lg 2 \approx 0,699$ ;  $\lg 72/100 = \lg 18/25 = 2 \lg 3 + \lg 2 - 2(1 - \lg 2) = 2 \lg 3 + 3 \lg 2 - 2 \approx -0,1427$ ;  $\lg \sqrt[7]{7,5} = \frac{1}{7}(1 + \lg 3 - 2 \lg 2) \approx 0,125$ .

185. Az első esetben az  $\ln \frac{x}{k}$  grafikonját, a másodikban az  $\ln x + c$  grafikonját kapjuk. Azonban  $\ln \frac{x}{k} = \ln x - \ln k$ , így  $c = -\ln k$  esetén a két függvény, s így a két grafikon is egybeesik.

186.  $\log_2 x = \ln x / \ln 2$ , tehát  $y$  irányú  $1/\ln 2$ -szörös nyújtással.

187.  $\log_3 \frac{x^{3/2}}{9} = \frac{3}{2 \ln 3} \ln x - 2$ , tehát egy  $y$  irányú  $\frac{3}{2 \ln 3}$ -szeresre való nyújtással és egy  $y$  irányú  $-2$ -vel való eltolással.

188.  $\ln \sqrt[3]{1-x} = \frac{1}{3} \ln(1-x)$ , tehát egy  $y$  tengelyre való tükrözéssel, egy  $x$  irányban  $1$ -gyel való eltolással és egy  $y$  irányú harmadára való zsugorítással.

189.  $(x+2)^2 = 3x^2 + 14x + 13$ , így  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -5$ , ez utóbbi hamis gyök.

190.  $2 \ln |x| + 8 \ln |x| = 10$ , amiből  $|x| = e$ , azaz  $x_1 = e$ ,  $x_2 = -e$ .

10. Egyváltozós valós elemi függvények

191.  $\log_{32} 2x = \frac{1}{5} \log_2 2x = \frac{1}{5}(1 + \log_2 x)$ ,  $\log_8 4x = \frac{1}{3} \log_2 4x = \frac{1}{3}(2 + \log_2 x)$   
behelyettesítése után  $\log_2 x = 4$ , azaz  $x = 16$ .

192.  $\frac{\log_2 8}{\log_2 x} - \frac{\log_2 64}{\log_2 4x} = \frac{\log_2 4}{\log_2 2x}$ , amiből  $\frac{3}{\log_2 x} - \frac{6}{2 + \log_2 x} = \frac{2}{1 + \log_2 x}$ , így  
 $\log_2 x = 1$  ill.  $\log_2 x = -6/5$ , azaz  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 1/\sqrt[5]{64}$ .

193.  $\frac{5}{5x+1}$ .      194.  $\frac{1}{x} \lg e$ .      195.  $-\frac{1}{x}$ .      196.  $\frac{-4 \ln(1-2x)}{1-2x}$ .  
197.  $\text{ctg } x$ .      198.  $-\text{tg } x \cdot \lg e$ .      199.  $\frac{2x \log_3 e}{x^2-1}$ .      200.  $-\frac{\log_5 c}{x \log_5^2 x}$ .

201.  $x^{n-1}(n \ln x + 1)$ .

202.  $(\ln x)' = x^{-1}$ ,  $(\ln x)'' = -x^{-2}$ ,  $(\ln x)''' = 2x^{-3}$ , ...,  $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$ .

203.  $y' = \frac{\cos x}{\sin x}$ ,  $y'' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ,  $-\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = -1$ .

204.  $y' = \frac{1}{x}(c_1 \cos \ln x - c_2 \sin \ln x)$ ,  $y'' = \frac{1}{x^2}((c_2 - c_1) \sin \ln x - (c_1 + c_2) \cos \ln x)$ .

205. A Lagrange-féle középértéktételt használjuk az  $\ln$  függvényre:  $\frac{\ln b - \ln a}{b-a} =$   
 $(\ln x)'|_{x=c} = \frac{1}{c}$ , ahol  $a < c < b$ . Így  $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$ , és ezt akartuk bizonyítani.

206. Az  $f(x) = 2(\sqrt{x} - 1) - \ln x$  függvény deriváltja  $f'(x) = 1/\sqrt{x} - 1/x$ , ami  
 $x > 1$  esetén pozitív, így  $f$  szigorúan monoton nő, másrészt  $f(1) = 0$ , tehát  
 $f(x) > 0$ , ha  $x > 1$ .

207. A prímszámtétel szerint  $\pi(x)$  közelítőleg  $\frac{x}{\ln x}$ , ha  $x$  'elég nagy'. Így  $\pi(10^7) \approx$   
 $\frac{10^7}{\ln 10^7} \approx 620421$ . (Valójában  $\pi(10^7) = 664579$ .)

208. A kissetekundnak megfelelő hányadost jelölje  $k$ . Egy oktáv 12 kissetekund, így  
 $k^{12} = 2$ , azaz  $k = \sqrt[12]{2}$ .  $n$  kissetekundnak a  $2^{n/12}$  hányados felel meg. Mivel  
 $\frac{x}{y} = 2^{n/12}$ , ezért az  $x$  és  $y$  közti hangköz  $n = 12 \log_2 \frac{x}{y}$  kissetekundból áll.

209.  $\left( \ln \frac{(x^2+2)(x+9)^{1/2}}{x-1} \right)' = \left( \ln(x^2+2) + \frac{1}{2} \ln(x+9) - \ln(x-1) \right)' =$   
 $\frac{2x}{x^2+2} + \frac{1}{2x+18} - \frac{1}{x-1}$ , így az  $f' = f(\ln f)'$  képletet használva:

$$\left( \frac{(x^2+2)(x+9)^{1/2}}{x-1} \right)' = \frac{(x^2+2)(x+9)^{1/2}}{x-1} \left( \frac{2x}{x^2+2} + \frac{1}{2x+18} - \frac{1}{x-1} \right).$$

A fenti megoldás csak  $x > 1$  esetén érvényes, mivel csak ekkor vehetjük  
mindegyik tényező logaritmusát. Előjelcserével (az  $x-1$  helyébe  $1-x$ -et  
írva) az  $x < 1$  esetben is használható a módszer, de a  $-(-f)' = f'$  összefüggés  
miatt ugyanezt az eredményt kapjuk.

210.  $(x+1)(x+2)(x+3) \left( \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} \right) = 3x^2 + 12x + 11$ .

211.  $2(2x+1)(x^2+1)x^{4/5} \left( \frac{1}{2x+1} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{2}{5x} \right) = \frac{2}{5}x^{-1/5}(19x^3 + 7x^2 + 9x + 2)$ .

212.  $\frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{x(x-1)}{x^2+2}} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2+1} \right)$ .

10. Egyváltozós valós elemi függvények

$$213. \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{x^2(x+1)}{(x-2)(x^2+2)}} \left( \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2+2} \right).$$

$$214. \frac{\sqrt{x+11}}{(x-7)\sqrt[3]{2x+1}} \left( \frac{1}{2x+22} - \frac{1}{x-7} - \frac{1}{6x+3} \right).$$

$$215. (\ln(1+x)^{1-x})' = ((1-x)\ln(1+x))' = -\ln(1+x) + \frac{1-x}{1+x}, \text{ így} \\ ((1+x)^{1-x})' = ((1+x)^{1-x}) \left[ \frac{1-x}{1+x} - \ln(1+x) \right].$$

$$216. (1-3x)^{\ln x} (\ln(1-3x)/x - 3 \ln x/(1-3x)).$$

$$217. \sqrt[3]{3x^2-6x+7} \left[ -\frac{\ln(3x^2-6x+7)}{x^2} + \frac{6x-6}{x(3x^2-6x+7)} \right].$$

218.  $2^x = e^{x \ln 2}$ , tehát  $x$ -tengely irányú  $\ln 2$ -szeres zsugorítással.

219.  $5^{x+1} = e^{(x+1) \ln 5}$ , tehát  $x$ -tengely irányú  $\ln 5$ -szörös zsugorítással, majd egy  $x$  irányú  $-1$ -gyel való eltolással, vagy az  $5^{x+1} = 5e^{x \ln 5}$  átalakítás alapján egy  $x$ -tengely irányú  $\ln 5$ -szörös zsugorítással, majd egy  $y$  irányú  $5$ -szörös nyújtással.

220.  $(3^{x/2-1})^3 = \exp \frac{3}{2}(x-2) \ln 3$ , tehát  $x$ -tengely irányú  $\frac{3}{2} \ln 3$ -szoros zsugorítással, majd egy  $x$  irányú  $2$ -vel való eltolással, vagy az  $(3^{x/2-1})^3 = \frac{1}{27} \exp \frac{3}{2} x \ln 3$  átalakítás alapján egy  $x$ -tengely irányú  $\frac{3}{2} \ln 3$ -szoros zsugorítással, majd egy  $y$  irányú  $27$ -edére való zsugorítással.

221. Azokra az  $x$  racionális számokra, melyek egyszerűsített  $p/q$  alakjában (azaz, ahol  $p$  és  $q$  relatív prímek)  $q$  páratlan.

222. Azok, amelyekre

a)  $g(x_0) = h(x_0)$  és az  $f(x_0)^{g(x_0)}$  hatvány értelmezve van, vagy

b)  $f(x_0) = 1$  és  $g(x_0)$ ,  $h(x_0)$  értelmezve vannak, vagy

c)  $f(x_0) = 0$ ,  $g(x_0) > 0$ ,  $h(x_0) > 0$ , vagy

d)  $f(x_0) = -1$ , és a  $(-1)^{g(x_0)}$ ,  $(-1)^{h(x_0)}$  hatványok értelmezve vannak, és egyenlőek.

223. Vagy  $x-3 = 5-3x$ , azaz  $x = 2$ , vagy  $2x+1 = 1$ , azaz  $x = 0$ , vagy  $2x+1 = -1$ , azaz  $x = -1$ . A  $2x+1 = 0$  eset nem vezet megoldáshoz, mert a bal oldali hatványnak az  $x = -1/2$  helyen nincs értelme.

224. Vagy  $9/x = x$ , amiből megoldásként  $x = 3$  és  $x = -3$  adódik, vagy  $x-3 = 1$ , azaz  $x = 4$ , vagy  $x-3 = 0$ , azaz  $x = 3$ . A  $x-3 = -1$  eset nem vezet megoldáshoz, mert a bal oldali hatványnak az  $x = 2$  helyen nincs értelme.

225. Az  $(x+1)^{2x+1} = ((x+1)^2)^{x+1/2}$  átalakítás után a megoldások:  $x = -1/2$  és  $x = 0$ .

$$226. \pi x^{\pi-1}.$$

$$227. \pi^\pi \ln \pi.$$

$$228. 2^x \ln 2.$$

$$229. -2^{-x} \ln 2.$$

$$230. (2^{\lg x} \ln 2) / \cos^2 x.$$

$$231. (-5^{1/x} x^{-2} - 5^{-x}) \ln 5.$$

$$232. \frac{1}{2} x^{-1/2} \exp \sqrt{x} + \frac{1}{2} (\exp x)^{-1/2} \exp x = (\exp \sqrt{x} + \sqrt{x \exp x}) / (2\sqrt{x}).$$

$$233. \frac{d}{dx} (e^{xy} - y) = \frac{d}{dx} (3), \quad e^{xy} \left( x \frac{dy}{dx} + y \right) - \frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} (1 - x e^{xy}) = y e^{xy}, \\ \frac{dy}{dx} = \frac{y e^{xy}}{1 - x e^{xy}} = \frac{y(3+y)}{1-x(3+y)}, \text{ mivel } e^{xy} = 3+y.$$

10. Egyváltozós valós elemi függvények

234.  $e^{y \ln x} (y' \ln x + \frac{y'}{x}) + \frac{y'}{y} = 0$ ,  $y' = \frac{-e^{y \ln x} y/x}{e^{y \ln x} \ln x + 1/y} = \frac{y \ln y}{x/y - x \ln x \ln y}$ , mivel  $e^{y \ln x} = -\ln y$ .

235.  $((x \ln x)^x)' = (e^{x \ln(x \ln x)})' = (x \ln x)^x (\ln(x \ln x) + 1 + 1/\ln x)$ .

236.  $x^{\sin x} (\cos x \ln x + \frac{1}{x} \sin x)$ .      237.  $x^{\frac{1}{2}-2} (1 - \ln x)$ .

238.  $2x \sqrt{3x} \sqrt{\frac{3}{x} (\frac{\ln x}{2} + 1)}$ .      239.  $(1-x)^{x^2} (2x \ln(1-x) - \frac{x^2}{1-x})$ .

240.  $(\sin x)^{\lg x} ((\ln \sin x)/(\cos^2 x) + 1)$ .

241.  $(f(x)^{g(x)})' = (e^{g(x) \ln f(x)})' = e^{g(x) \ln f(x)} (g'(x) \ln f(x) + g(x) f'(x)/f(x)) = f(x)^{g(x)} g'(x) \ln f(x) + g(x) f(x)^{g(x)-1} f'(x)$ .

242. Teljes indukcióval bizonyítunk.  $n = 0$  esetén az állítás igaz. Ha  $n$ -re igaz, akkor a képlet mindkét oldalát differenciálva azt kapjuk, hogy  $(xe^x)^{(n+1)} = [(x+n)e^x]' = (x+n+1)e^x$ , azaz az összefüggés igaz.

243. Teljes indukcióval bizonyítunk. Az áttekinthetőség kedvéért a továbbiakban  $H_n(x)$  helyett csak  $H_n$ -et írunk.  $(e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}$ ,  $(e^{-x^2})'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$ , azaz  $H_0 = 1$ ,  $H_1 = -2x$ ,  $H_2 = 4x^2 - 2$ , és ezek kielégítik a  $H_2 + 2xH_1 + 2H_0 = 0$  egyenletet. Az  $(e^{-x^2})^{(n)}$  függvényt differenciálva kapjuk, hogy  $((e^{-x^2})^{(n)})' = e^{-x^2} H_n' - 2xe^{-x^2} H_n$ ; másrészt  $(e^{-x^2})^{(n+1)} = e^{-x^2} H_{n+1}$ , amiből  $H_n' = H_{n+1} + 2xH_n$ . Tegyük fel, hogy valamely  $n$  értékre igaz a feladatbeli összefüggés. Differenciálva, majd behelyettesítve,  $H_{n+1}' + 2xH_{n+1}' + 2H_n + 2nH_{n-1}' = H_{n+2} + 2xH_{n+1} + (2n+2)H_n + 2x(H_{n+1} + 2xH_n + 2nH_{n-1}) = 0$ , azaz  $H_{n+2} + 2xH_{n+1} + (2n+2)H_n = 0$ , vagyis az összefüggés  $(n+1)$ -re is igaz.

244. Mivel az  $\exp$  függvény monoton növekvő, ezért ha  $\Theta_n$  helyébe  $0$ -t írunk, akkor alsó, ha  $1$ -et, akkor felső becslést kapunk  $n!$ -ra. Eszerint az  $R = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$  jelölést használva  $R < n! < R \exp \frac{1}{12n}$ .

245. A becslés:  $475687486 < 12! < 479002369$ , a pontos érték:  $12! = 479001600$ ; illetve a becslés:  $8,3094383 \cdot 10^{81} < 60! < 8,3209872 \cdot 10^{81}$ , a pontos érték tíz értékes jeggyel:  $60! \approx 8,320987112 \cdot 10^{81}$ .

246.  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!} = \sqrt{2} \left(\frac{2n}{e}\right)^n \exp \frac{\Theta_{2n} - 2\Theta_n}{24n}$ , ahonnan  $\sqrt{2} \left(\frac{2n}{e}\right)^n \exp \frac{1}{12n} < 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 99 < \sqrt{2} \left(\frac{2n}{e}\right)^n \exp \frac{1}{24n}$ .  
 $n = 50$  esetén:  $2,72312 \cdot 10^{78} < 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 99 < 2,729938 \cdot 10^{78}$ .

247.  $e^{m(x+y)} = e^{mx} e^{my}$  miatt nyilvánvaló. Megmutatható, hogy az egész számegegyenesen folytonos függvények között más megoldása e függvényegyenletnek nincs.

248.  $f'(x) = \frac{4 \exp(2x)}{(\exp(2x) + 1)^2} = 1 - \left(\frac{\exp(2x) - 1}{\exp(2x) + 1}\right)^2$ .

249.  $y' = c_1 a e^{ax} + c_2 b e^{bx}$ ,  $y'' = c_1 a^2 e^{ax} + c_2 b^2 e^{bx}$  behelyettesítésével adódik.

250. Ha  $f(x) = ce^{kx}$ , akkor  $f'(x) = cke^{kx}$  és ezek kielégítik az egyenletet. Tegyük fel, hogy  $f(x)$  egy megoldása az egyenletnek, és legyen  $g(x) = f(x)e^{-kx}$ . Ekkor  $g'(x) = f'(x)e^{-kx} - kf(x)e^{-kx}$ . De, mivel  $f(x)$  kielégíti az egyenletet, tehát

10. Egyváltozós valós elemi függvények

$f'(x) = kf(x)$ , ezért minden  $x$ -re  $g'(x) = 0$ . Emiatt minden  $x$ -re  $g(x) = c$  ( $c$  konstans), így  $f(x) = g(x)e^{kx} = ce^{kx}$ .

251. a)  $10000 \cdot 1,15 = 11500$ ; b)  $10000 \cdot (1 + \frac{0,15}{12})^{12} \approx 11607,55$ ;

c)  $10000 \cdot (1 + \frac{0,15}{365})^{365} \approx 11617,98$ ;

d)  $10000 \cdot (1 + \frac{0,15}{n})^n \rightarrow 10000e^{0,15} \approx 11618,34$ .

252. a)  $A(1 + \frac{K}{100})^E$ ; b)  $A(1 + \frac{K}{12 \cdot 100})^{12E}$ ; c)  $A(1 + \frac{K}{365 \cdot 100})^{365E}$ ; d)  $A(1 + \frac{K}{n \cdot 100})^{nE} \rightarrow Ae^{KE/100}$ . A folyamatos kamatozást leíró utóbbi képletet megérthetjük abból, hogy az  $f(E) = Ae^{KE/100}$  függvény kielégíti az  $f'(E) = \frac{K}{100}f(E)$  egyenletet és az  $f(0) = A$  feltételt. Ez ugyanis azt jelenti, hogy ha  $f(E)$  jelöli a pénz mennyiségét az  $E$  időpillanatban, akkor a növekmény pillanatnyi mértéke mindig a pillanatnyi pénzösszeg  $K\%$ -ával egyenlő, az  $f(0) = A$  feltétel pedig azt jelenti, hogy a kezdő pénzösszeg  $A$ .

253. Ha csak kamatot számítunk, akkor persze  $s\%$ -kal növekszik a pénzösszeg. A pénz mennyisége  $t$  idő elteltével legyen  $f(t)$ , induláskor  $f(0) = c$ . Mivel a pénzmennyiség változásának sebessége a folyamatosan számított kamatok miatt mindig arányos a pénz pillanatnyi mennyiségével, azaz  $f'(t) = kf(t)$ , ezért  $f(t) = ce^{kt}$ ; a  $k$  értéke  $\frac{s}{100}$ , hisz  $f'(t_0)$  azt jelenti, mennyivel növekedne a pénzmennyiség egy év alatt, ha a növekedés sebessége megőrizné pillanatnyi értékét, ebből pedig  $f'(t_0) = cke^{kt_0} = \frac{s}{100}ce^{kt_0}$ , azaz  $\frac{s}{100}$ . Egy év elteltével a pénzmennyiség  $f(1)$ , a növekedés százalékában kifejezve  $100(f(1) - f(0))/f(0) = 100(e^{s/100} - 1)$ .

254. Legyen  $m(t)$  a radioaktív anyag tömege a  $t$  időpillanatban. A tömeg változásának sebessége  $\frac{dm(t)}{dt}$ , ami bomláskor negatív. Mivel a sebesség arányos a tömeggel, ezért  $m(t)$  kielégíti az  $m'(t) = km(t)$  egyenletet. Ennek összes megoldása  $m(t) = ce^{kt}$  alakú. Legyen  $m(0) = m_0$  az anyag kiindulási tömege. Az előző egyenlethől  $m_0 = ce^{k \cdot 0}$ , azaz  $c = m_0$ ,  $m(t) = m_0e^{kt}$ . Az az idő, amely alatt  $m(t)$  a felére csökken, kielégíti az  $m(t) = m_0e^{kt} = m_0/2$  egyenletet. Ebből  $t = -\ln 2/k$ , ami valóban független  $m_0$ -tól.

255. A megfigyelés kezdetétől számított  $t$  év múlva a szén tömege  $m(t) = 3e^{kt}$  gramm. Az előző feladat alapján:  $3e^{5730k} = 3/2$ , azaz  $k = -\ln 2/5730$ . Így 1000 év elteltével a tömeg  $m(1000) = 3e^{-1000 \cdot \ln 2/5730} \approx 2,658$ . Tehát 2,658 gramm marad a szénből.

256.  $k = -\ln 2/5730$ ,  $t$  idő elteltével a szénizotóp mennyisége  $m_0e^{kt} = 0,4m_0$ , amiből  $t = -5730 \cdot \ln 0,4 / \ln 2 \approx 7574,65$ , tehát kb. 7575 éve halt meg a haj viselője.

257. Legyen  $f(t)$  a lakosok száma, ekkor  $f'(t)$  a lélekszám változásának sebessége. A feltételekből adódóan  $f'(t) = kf(t)$ , amiből  $f(t) = ce^{kt}$ , ahol  $c = f(0)$  a falu lélekszáma a megfigyelés kezdetén,  $k$  pedig meghatározható abból a feltételből, hogy egy év alatt a lakosság  $2\%$ -kal növekszik, azaz  $f(1) = ce^k = 1,02c$ , tehát  $k = \ln 1,02 \approx 0,0198$ . Ha a lakosság a  $t_0$  időpillanatra megduplázódik, akkor  $f(t_0) = 2f(0)$ , amiből a megduplázódási idő  $t_0 = \ln 2 / \ln 1,02 \approx 35$  év. 30 hónap, azaz 2,5 év eltelte után a lélekszám  $f(2,5) = 1000e^{2,5k} \approx 1051$ . (Az  $f$  függvény értékét egész  $t$  helyeken könnyen meghatározhatjuk, hisz ha

## 10. Egyváltozós valós elemi függvények

egy év alatt a lélekszám 1,02-szorosára nő, akkor  $t$  év alatt 1,02 <sup>$t$</sup> -szeresére, azaz  $f(t) = c1,02^t = ce^{t \ln 1,02}$ . Nem magától értetődő azonban a nem egész  $t$  esete.)

258. 1,1752; -1,1752;  $\text{sh } 1 + \text{ch } 1 = e$  (miért?); 0,7616; 1,3130.

259.  $\frac{2^{-1/2}}{2} = \frac{3}{4}; \frac{5}{4}; 4, e^5$ .

264.  $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = 1$ .

$\text{th}^2 x + 1/\text{ch}^2 x = \text{sh}^2 x/\text{ch}^2 x + 1/\text{ch}^2 x = (\text{sh}^2 x + 1)/\text{ch}^2 x = 1$ .

265.  $\text{ch } 2x = \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x = 1 + 2\text{sh}^2 x$ , amiből  $\text{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\text{ch } 2x - 1)$ .

266.  $e^x = \text{ch } x + \text{sh } x$ ,  $e^{-x} = \text{ch } x + (-\text{sh } x)$ .

267.  $(\text{sh } x + \text{ch } x)^v = (e^x)^v = e^{vx} = \text{sh } vx + \text{ch } vx$ .

268.  $\text{sh } x = \frac{\text{th } x}{\sqrt{1 - \text{th}^2 x}}$ ,  $\text{ch } x = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{th}^2 x}}$ .

E képletek megkaphatók a  $\text{th}^2 x = \text{sh}^2 x/\text{ch}^2 x = \text{sh}^2 x/(1 + \text{sh}^2 x)$ , illetve a  $\text{th}^2 x = (\text{ch}^2 x - 1)/\text{ch}^2 x$  összefüggésekből egyszerű átrendezéssel, vagy az alábbi módon:

$$\text{sh } x = \frac{\text{sh } x}{1} = \frac{\text{sh } x}{\sqrt{\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x}} = \frac{\text{th } x}{\sqrt{1 - \text{th}^2 x}}$$

269.  $\text{sh } x = \text{sh } 2 \frac{x}{2} = 2 \text{sh } \frac{x}{2} \text{ch } \frac{x}{2} = \frac{2 \text{sh } \frac{x}{2} \text{ch } \frac{x}{2}}{1} = \frac{2 \text{sh } \frac{x}{2} \text{ch } \frac{x}{2}}{\text{ch}^2 \frac{x}{2} - \text{sh}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \text{th } \frac{x}{2}}{1 - \text{th}^2 \frac{x}{2}}$ . Ha-

sonlóképpen  $\text{ch } x = \frac{1 + \text{th}^2 \frac{x}{2}}{1 - \text{th}^2 \frac{x}{2}}$ .

270.  $(6x + 1) \text{sh}(3x^2 - x + 1)$ .

271.  $(\sqrt{1 + \text{sh}^2 4x})' = (\text{ch } 4x)' = 4 \text{sh } 4x$ .

272.  $3e^{3x} \text{ch}(e^{3x})$ .

273.  $e^{2x}$ .

274.  $-\sin x \text{ch}(\cos x)$ .

275.  $5 \text{sh } 3x \text{sh } 5x + 3 \text{ch } 3x \text{ch } 5x$ .

276.  $y'(x) = \text{sh } \frac{x}{a}$ ,  $y''(x) = \frac{1}{a} \text{ch } \frac{x}{a}$ . Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ezek kielégítik az egyenletet.

277.  $\frac{dv}{dt} = g \text{ch}^{-2}(\sqrt{gk/mt})$ . Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy  $v$  kielégíti az egyenletet.  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \sqrt{mg/k}$ .

278. Az inverz függvény definíciójából (D 9.20) azonnal adódik.

279.  $\text{ch arsh } x = \sqrt{1 + \text{sh}^2 \text{arsh } x} = \sqrt{1 + x^2}$ , a többi hasonlóan bizonyítható.

280.  $\text{th arsh } x = \text{sh arsh } x/\text{ch arsh } x = \text{sh arsh } x/\sqrt{1 + \text{sh}^2 \text{arsh } x} = x/\sqrt{1 + x^2}$ ,  
 $\text{sh arth } x = \text{th arth } x/\sqrt{1 - \text{th}^2 \text{arth } x} = x/\sqrt{1 - x^2}$ . A többi hasonlóan bizonyítható.

281. (1. megoldás) Mivel az  $\text{sh}$  és  $\text{ch}$  függvények grafikonjai nem metszik egymást, hisz  $\text{ch } x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \text{sh } x$ , ezért inverzeik grafikonjai sem fogják:  $\text{arsh } x > \text{arch } x$ .

(2. megoldás) Véve mindkét oldal  $\text{sh}$ -át  $x = \text{sh arch } x$ , ebből  $x = \sqrt{x^2 - 1}$ , ami lehetetlen.

10. Egyváltozós valós elemi függvények

282. Véve mindkét oldal sh-át  $x = \text{sh arth } x$ , ebből  $x = x/\sqrt{1-x^2}$ , aminek  $x = 0$  az egyetlen gyöke. Az  $x = 0$  az eredeti egyenletet is kielégíti.

283.  $x = \text{sh}(\text{arsh } a + \text{arsh } b) = \text{sh arsh } a \text{ ch arsh } b + \text{ch arsh } a \text{ sh arsh } b = a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2}$ .

284. Ha  $a < 1$  vagy  $b < 1$ , akkor az egyenlet jobb oldala nincs értelmezve. Ha  $a \geq 1$  és  $b \geq 1$ , akkor  $x = ab + \sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}$ ; ez gyöke az egyenletnek, mert  $ab \geq 1$ , így  $x \geq 1$ .

285. Ha  $|a|, |b| < 1$ :  $x = (a+b)/(1+ab)$ , ( $x \in \text{Dom arth}$ ).

286. Ha  $|a| < 1$  és  $b > 1$ :  $x = (ab + \sqrt{1+b^2})/\sqrt{1-a^2}$ .

287.  $3x^2/\sqrt{1+x^6}$ .

288.  $(1-x^2)^{-1}$ .

289.  $3 \cos 3x/\sqrt{\sin^2 3x + 1}$ .

290.  $6 \text{ arth } 3x/(1-9x^2)$ .

291. A T 10.22 miatt  $\exp \text{ arch } x = x + \sqrt{x^2-1}$ , tehát  $(\exp \text{ arch } x)^y = (x + \sqrt{x^2-1})/\sqrt{x^2-1}$ .

292.  $\text{ch } x/\sqrt{4 + \text{sh}^2 x}$ .

294. A második egyenlőségénél felhasználva, hogy  $\text{arctg } x + \text{arctg } \frac{1}{x} = \pi/2$ , ha  $x > 0$ , kapjuk, hogy

$$2 \text{ arctg } e^{-u} - \pi/2 =$$

$$2 \text{ arctg}(1/e^u) - \pi/2 =$$

$$2(\pi/2 - \text{arctg } e^u) - \pi/2 =$$

$$-(2 \text{ arctg } e^u - \pi/2),$$

tehát a függvény páratlan.

295.  $\frac{d\varphi}{du} = 2e^u/(1+e^{2u}) > 0$ , tehát a függvény szigorúan monoton nő, így invertálható is.

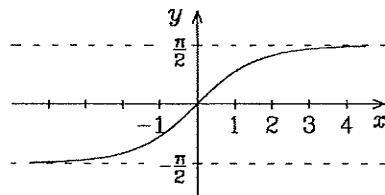
296. Mivel  $0 < \text{arctg } e^u < \pi/2$ , ezért  $-\pi/2 < \varphi = 2 \text{ arctg } e^u - \pi/2 < \pi/2$ , tehát  $\varphi = \text{arctg}(\text{tg } \varphi)$ , másrészt  $\text{tg } \varphi = \text{tg}(2 \text{ arctg } e^u - \pi/2) = -\text{ctg}(2 \text{ arctg } e^u) = -(1 - \text{tg}^2(\text{arctg } e^u))/(2 \text{ tg arctg } e^u) = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) = \text{sh } u$ , azaz  $\varphi = \text{arctg sh } u$ . Az  $\text{arctg } x = \arcsin(x/\sqrt{1+x^2})$  képlet (1. 129. feladat) felhasználásával kapjuk,

$$\text{hogy } \varphi = \text{arctg sh } u = \arcsin(\text{sh } u/\sqrt{1+\text{sh}^2 u}) = \arcsin \text{ th } u.$$

297. Az előző feladatból azonnal adódik, hogy  $\text{sh } u = \text{tg } \varphi$ , és  $\text{th } u = \sin \varphi$ . Ha  $u \neq 0$ ,  $\varphi \neq 0$ , akkor e két egyenlet elosztásával kapjuk, hogy  $\text{ch } u = \frac{1}{\cos \varphi}$ , ami viszont  $u = \varphi = 0$  esetén is igaz.

$$298. u = \text{arth } \sin \varphi = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}} = \ln \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi}.$$

299. Legyen a két végpont koordinátája  $(-1, 0)$  és  $(1, 0)$ , a rajtuk áthaladó görbe egyenlete  $y(x) = a \text{ ch } \frac{x}{a} + C$ . Az  $y(1) = 0$  és az  $y'(1) = \text{tg } 10^\circ$  egyenletből  $a = 1/\text{arsh } \text{tg } 10^\circ \approx 5,7004$ ;  $C = -a \text{ ch}(1/a) = -5,788$ . A kötélen belógása  $-y(0) \approx 0,0879$  m.





**11. Egyváltozós valós függvények menetének vizsgálata (megoldások)**

1.  $f'(x) = \frac{1}{3}x(7x+12)(x+2)^{-2/3}$ ,  $f'$  zérushelyei:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -12/7$ ,  $f$  nem differenciálható:  $x_3 = -2$ .

	$(-\infty, -2)$	$-2$	$(-2, -12/7)$	$-12/7$	$(-12/7, 0)$	$0$	$(0, \infty)$
$f'$	+	n.ért.	+	0	-	0	+
$f$	↗	nincs sz.	↗	MAX	↘	MIN	↗

2.  $f(x) = \begin{cases} 2-3x, & \text{ha } x \leq -1/2; \\ x+4, & \text{ha } -1/2 \leq x \leq 3; \\ 3x-2, & \text{ha } 3 \leq x. \end{cases}$   $f'(x) = \begin{cases} -3, & \text{ha } x < -1/2; \\ 1, & \text{ha } -1/2 < x < 3; \\ 3, & \text{ha } 3 < x. \end{cases}$

$f'$ -nek nincs zérushelye,  $f$  nem differenciálható:  $x_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $x_2 = 3$ .

	$(-\infty, -1/2)$	$-1/2$	$(-1/2, 3)$	$3$	$(3, \infty)$
$f'$	-	n.ért.	+	n.ért.	+
$f$	↘	MIN	↗	nincs sz.	↗

3.  $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, & \text{ha } x \in (-\infty, -2] \cup [1, \infty); \\ -x^2 - x + 2, & \text{ha } x \in [-2, 1]. \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{ha } x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty); \\ -2x-1, & \text{ha } x \in (-2, 1). \end{cases}$

$f'$  zérushelye:  $x_1 = -1/2$ ,  $f$  nem differenciálható:  $x_2 = -2$ ,  $x_3 = 1$ .

	$(-\infty, -2)$	$-2$	$(-2, -1/2)$	$-1/2$	$(-1/2, 1)$	$1$	$(1, \infty)$
$f'$	-	n.ért.	+	0	-	n.ért.	+
$f$	↘	MIN	↗	MAX	↘	MIN	↗

4. A  $2|x| = |1+x|$  egyenlet megoldásai:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -\frac{1}{3}$ . Így

$f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{ha } x \leq -1/3; \\ x+1, & \text{ha } -1/3 \leq x \leq 1; \\ 2x, & \text{ha } 1 \leq x. \end{cases}$   $f'(x) = \begin{cases} -2, & \text{ha } x < -1/3; \\ 1, & \text{ha } -1/3 < x < 1; \\ 2, & \text{ha } 1 < x. \end{cases}$

$f'$ -nek nincs zérushelye,  $f$  nem differenciálható az  $x_1$  és  $x_2$  helyen.

	$(-\infty, -1/3)$	$-1/3$	$(-1/3, 1)$	$1$	$(1, \infty)$
$f'$	-	n.ért.	+	n.ért.	+
$f$	↘	MIN	↗	nincs sz.	↗

5.  $f'(x) = \cos x(2\sin x - \sqrt{3})$ ,  $f'$  zérushelyei:  $x_1 = \pi/3$ ,  $x_2 = \pi/2$ ,  $x_3 = 2\pi/3$ .

	$(0, \pi/3)$	$\pi/3$	$(\pi/3, \pi/2)$	$\pi/2$	$(\pi/2, 2\pi/3)$	$2\pi/3$	$(2\pi/3, \pi)$
$f'$	-	0	+	0	-	0	+
$f$	↘	MIN	↗	MAX	↘	MIN	↗

6. A függvény  $2\pi$  szerint periodikus, így elég a vizsgálatot csak a  $[0, 2\pi)$  intervallumon elvégezni.  $f'(x) = -2\sin x \cos x(1+2\cos x)$ ,  $f'$  zérushelyei:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \pi/2$ ,  $x_3 = 2\pi/3$ ,  $x_4 = \pi$ ,  $x_5 = 4\pi/3$ ,  $x_6 = 3\pi/2$ .  $f'$  előjelének megállapításában segíthet a  $\sin$ , a  $\cos$  és az  $1+2\cos$  függvények grafikonjának

### 11. Függvényvizsgálat

ábrázolása. (A következő táblázatban N ill. X jelentése MIN ill. MAX.)

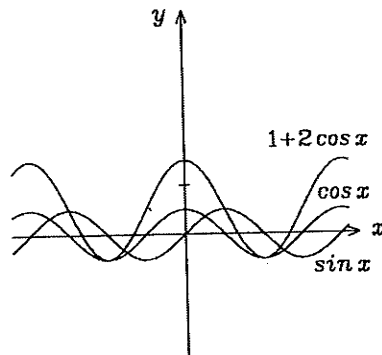
	0	$(0, \frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$	$\frac{2\pi}{3}$	$(\frac{2\pi}{3}, \pi)$	$\pi$	$(\pi, \frac{4\pi}{3})$	$\frac{4\pi}{3}$	$(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2})$	$\frac{3\pi}{2}$	$(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$
$f'$	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+
$f$	X	↘	N	↗	X	↘	N	↗	X	↘	N	↗

7.  $f(x) = x^{x^x} = e^{x \ln x}$ ,  $x > 0$ .  
 $f'(x) = x^x (\ln x + 1)$ ,  $f'(\frac{1}{e}) = 0$ .

	$(0, 1/e)$	$1/e$	$(1/e, \infty)$
$f'$	-	0	+
$f$	↘	MIN	↗

8.  $f(x) = e^{-x^2 \ln x}$ ,  $x > 0$ .  
 $f'(x) = -x^{1-x^2} (2 \ln x + 1)$ ,  $f'(\frac{1}{\sqrt{e}}) = 0$ .

	$(0, 1/\sqrt{e})$	$1/\sqrt{e}$	$(1/\sqrt{e}, \infty)$
$f'$	+	0	-
$f$	↗	MAX	↘



9.  $f(1) = \frac{1}{x} \Big|_1 = 1$ ,  $f'(1) = -\frac{1}{x^2} \Big|_1 = -1$ ,  $f''(1) = \frac{2}{x^3} \Big|_1 = 2$ ,  
 $f'''(1) = -\frac{6}{x^4} \Big|_1 = -6$ ,  $f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$ . A Taylor-polinom  $1 - (x - 1) + (x - 1)^2 - (x - 1)^3$ . A maradéktag  $R_3(x) = \frac{(x - 1)^4}{\xi^5}$ , ahol  $\xi$  az 1 és  $x$  közé esik.  
 Így  $\frac{1}{x} = 1 - (x - 1) + (x - 1)^2 - (x - 1)^3 + \frac{(x - 1)^4}{\xi^5}$ .

10.  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{e^\xi x^4}{24}$ , ahol  $\xi$  az 1 és  $x$  közé esik.

11.  $e^x = e + e(x - 1) + \frac{e}{2}(x - 1)^2 + \frac{e}{6}(x - 1)^3 + \frac{e^\xi}{24}(x - 1)^4$ , ahol  $\xi$  az 1 és  $x$  közé esik.

12.  $\sin x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{4}(x - \frac{\pi}{6})^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}(x - \frac{\pi}{6})^3 + \frac{\sin \xi}{24}(x - \frac{\pi}{6})^4$ .

13.  $ax^3 + bx^2 + cx + d$ .

14.  $(a + b + c + d) + (3a + 2b + c)(x - 1) + (3a + b)(x - 1)^2 + a(x - 1)^3$ ,  
 a maradéktag 0.

15. Írjuk fel a  $P$  polinom  $x_0 = 1$  ponthoz tartozó ötödfokú Taylor-formuláját. Mivel  $P$  hatodik deriváltja 0, ezért a maradéktag is 0.  $P$  deriváltjainak értéke az  $x_0 = 1$  pontban:  $P(1) = 0$ ,  $P'(1) = 0$ ,  $P''(1) = 0$ ,  $P'''(1) = -6$ ,  $P^{(4)}(1) = 24$ ,  $P^{(5)}(1) = 120$ ; a Taylor-polinom:  $-\frac{6}{3!}(x - 1)^3 + \frac{24}{4!}(x - 1)^4 + \frac{120}{5!}(x - 1)^5$ , azaz  $P(x) = -(x - 1)^3 + (x - 1)^4 + (x - 1)^5$ .

16.  $P(x) = 1 - 2(x + 1) + 4(x + 1)^2 - 3(x + 1)^3 + (x + 1)^4$ .

17.  $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi x^{n+1}}{(n + 1)!}$ ,  $0 < \xi < x$  vagy  $x < \xi < 0$ .



## 11. Függvényvizsgálat

$\cos 62^\circ \approx 0,4694654$ , ahol a hiba legfeljebb  $0,0000071$ .

33.  $\sin 43^\circ \approx 0,68199832$ , a hiba legfeljebb  $0,000000438$ .

34. Mivel  $\sqrt[3]{29} = \sqrt[3]{27+2} = 3(1 + \frac{2}{27})^{1/3}$ , ezért használhatjuk az alábbi Taylor-formulát:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + R_n(x),$$

ahol  $R_n(x) = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\xi)^{m-n-1}$ , és  $0 < \xi < x$  vagy  $x < \xi < 0$ . Ha  $x = \frac{2}{27}$ ,  $m = \frac{1}{3}$ , akkor  $\sqrt[3]{29} \approx 3(1 + \frac{2}{81} - \frac{4}{81^2} + \dots + R_n(x))$ . A maradéktagot megbecsülve  $3|R_1(x)| < 3 \cdot 2 \cdot 2/81^2 < 0,002$ ,  $3|R_2(x)| < 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5/81^3 < 0,0003$ . Ez utóbbi már megfelelő pontosságot biztosít, így  $\sqrt[3]{29} \approx 3(1 + \frac{2}{81} - \frac{4}{81^2}) \approx 3,072$ .

35.  $f'(x) = -\sin x - 4x$ ,  $f''(x) = -\cos x - 4$ , tehát  $f'(0) = 0$ ,  $f''(0) = -5 < 0$ . Mivel az első nemnulla értékű derivált másodrendű és negatív értékű, ezért a függvénynek 0-ban maximuma van.

36. minimum

37. minimum

38. Mivel az első nemnulla értékű derivált harmadrendű, ezért a függvénynek 0-ban nincs szélsőértéke, inflexiós pontja van.

39. inflexiós pont

40.  $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ ,  $f^{(4)}(0) = \operatorname{ch} 0 + \cos 0 = 2 > 0$ . Mivel az első nemnulla értékű derivált negyedrendű és pozitív értékű, ezért a függvénynek 0-ban minimuma van.

41. Mivel az első nemnulla értékű derivált negyedrendű és negatív értékű, ezért a függvénynek 0-ban maximuma van.

42. Mivel az első nemnulla értékű derivált ötödrendű, ezért a függvénynek 0-ban nincs szélsőértéke, inflexiós pontja van.

43.  $f'(x) = 3x^2 + 12x - 15$ , zérushelyei  $x_1 = -5$ ,  $x_2 = 1$ . Tehát szélsőérték lehet az  $x_0 = -6$ ,  $x_1 = -5$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 6$  pontokban.  $f(-6) = 93$ ,  $f(-5) = 103$ ,  $f(1) = -5$ ,  $f(6) = 345$ , és  $f'$  negatív a  $(-5, 1)$  intervallumon. Tehát maximum az  $x_1 = -5$  és  $x_3 = 6$ , minimum az  $x_0 = -6$ ,  $x_2 = 1$  pontokban van, abszolút maximum van az  $x_3 = 6$ , abszolút minimum az  $x_2 = 1$  pontban.

44. Az előző feladat szerint  $f$  maximuma az  $x = -5$ , minimuma az  $x = 1$  pontban van (ez abszolút minimum is). Abszolút maximum nincs, hisz a függvény értékkészletének szuprémuma  $345$ , és ezt sehol sem veszi fel értékként.

45.  $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ ,  $x \neq 0$ ,  $f$  nem differenciálható:  $x_1 = 0$ ,  $f'$  sehol nem 0; végpontok:  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = 8$ .  $f(-1) = 1$ ,  $f(0) = 0$  MIN,  $f(8) = 4$  MAX.

46.  $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{2x}{3}$ ,  $x \neq 0$ ,  $f$  nem differenciálható:  $x_1 = 0$ ,  $f'$  zérushelyei:  $x_2 = -1$ ;  $x_3 = 1$ ; végpontok:  $x_4 = -1$ ,  $x_5 = \sqrt{2}$ .  $f(-1) = \frac{2}{3}$  MAX,  $f(0) = 0$  MIN,  $f(1) = \frac{2}{3}$  MAX,  $f(\sqrt{2}) = \sqrt[3]{2} - \frac{2}{3} < \frac{2}{3}$ .

47.  $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{2x}{3}$ ,  $x \neq 0$ ;  $f$  nem differenciálható:  $x_1 = 0$ ;  $f'$  zérushelyei:  $x_2 = -1$ ;  $x_3 = 1$ ; végpontok:  $x_4 = -1$ ,  $x_5 = \sqrt{8}$ .  $f'$  előjelváltásait is figyelembe

## 11. Függvényvizsgálat

- véve:  $f(-1) = \frac{2}{3}$ ,  $f(0) = 0$  (lokális) MIN,  $f(1) = \frac{2}{3}$  (abszolút) MAX,  $f(\sqrt{8}) = \frac{2}{3}$ , tehát abszolút MIN nincs.
48.  $f'(x) = e^{-x}(1-x)$ .  $f'$  zérushelye  $x = 1$ , ahol  $f'$  előjelet vált.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ,  $f(0,5) > 0$ , tehát maximuma van  $f$ -nek az  $x = 1$  pontban, minimuma nincs.
49.  $f(1) = 0$  MIN;  $f(e) = e^2$  MAX.    50.  $f(0) = 1$  MAX,  $f(2) = 1/e^2$  MIN.
51.  $f(-2) = 5$  MAX,  $f(-1) = f(3) = 2$  (abszolút) MIN,  $f(1) = 6$  MAX, abszolút maximum nincs, mert  $\lim_{x \rightarrow -8-0} f(x) = 7$ .
52.  $f(-1) = 1/e$ ,  $f(1) = e$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$ .  $f$ -nek se minimuma, se maximuma nincs.
53.  $f'(x) = x^{m-1}(1-x)^{n-1}(m - (n+m)x)$ .  $f'$  zérushelyei:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = \frac{m}{m+n}$ . Az  $x_3 = \frac{m}{m+n}$  helyen maximum van, és  $f(x_3) = m^m n^n / (m+n)^{m+n}$ .  $x_1 = 0$  minimumhely, ha  $m$  páros, nem szélsőérték hely, ha páratlan.  $x_2 = 1$  minimumhely, ha  $n$  páros, nem szélsőérték hely, ha páratlan.
54. Tegyük fel, hogy  $g$ -nek  $x_0$ -ban minimuma van. Ekkor van  $x_0$ -nak olyan  $K$  környezete, hogy  $x \in K$  esetén  $g(x) \geq g(x_0)$ . Ha  $f$  monoton nő, akkor  $f(g(x)) \geq f(g(x_0))$ , vagyis  $x_0$  minimuma az  $f \circ g$  függvénynek is. Maximumra, és monoton csökkenő függvényre a bizonyítás hasonló.
55. Az  $f$  függvény helyett elég megvizsgálni a  $g(x) = 3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 56$  függvényt, hisz  $g$ -nek ott van maximuma, ahol  $f$ -nek minimuma, és fordítva, hisz a reciprokfüggvény monoton csökkenő. Mivel  $g'(x) = 12x(x^2 + 2x - 3)$ ,  $g''(x) = 12(3x^2 + 4x - 3)$ ,  $g'$  zérushelyei:  $-3, 0, 1$ , és e pontokban  $g''(-3) > 0$ ,  $g''(0) < 0$ ,  $g''(1) > 0$ , ezért az  $x = -3$  és  $x = 1$  pontokban ( $g$ -nek minimuma)  $f$ -nek maximuma van, az  $x = 0$  pontban ( $g$ -nek maximuma)  $f$ -nek minimuma van.
56. Az  $f$  függvénynek ott van minimuma, ahol a  $g: x \mapsto 4 - \sqrt{e - e^{x^2}}$  függvénynek, hisz az arctg függvény monoton növf.  $g$ -nek ott van minimuma, ahol a  $h: x \mapsto e - e^{x^2}$  függvénynek maximuma, hisz az  $y \mapsto 4 - \sqrt{y}$  függvény monoton csökkenő.  $h$ -nak maximuma van az  $x = 0$  pontban, így ott  $f$ -nek minimuma van, míg az  $x = 1, x = -1$  pontokban  $h$ -nak minimuma, így  $f$ -nek maximuma van.
57.  $x = 0$  maximum. (az arctg értékkészletén a cos függvény monoton csökken.)
58.  $x = -\frac{1}{2}$  maximum.
59. Az  $f(x) = 3x - x^3$  ( $-2 \leq x \leq 2$ ) függvény szélsőérték helyei: abszolút maximum van az  $x = -2, x = 1$  pontokban, ahol  $f(x) = 2$ , míg abszolút minimum van az  $x = -1, x = 2$  pontokban, ahol  $f(x) = -2$ . Ebből következik, hogy  $|f(x)| \leq 2$ .
60. 1. megoldás: Ahol az  $f(x) = |a \sin x + b \cos x|$  függvény nem differenciálható, ott értéke 0, azaz minimuma van. Ebből következik, hogy maximuma csak ott lehet, ahol  $(a \sin x + b \cos x)' = 0$ , azaz ahol  $\operatorname{tg} x = a/b$ . Mivel  $\sin x = \operatorname{tg} x / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} = a / \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\cos x = 1 / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} = b / \sqrt{a^2 + b^2}$ , ezért  $|a \sin x + b \cos x| \leq |a^2 / \sqrt{a^2 + b^2} + b^2 / \sqrt{a^2 + b^2}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .
2. megoldás: Tekintsük az  $(a, b)$  és a  $(\sin x, \cos x)$  vektorokat. Mivel az utóbbi

## 11. Függvényvizsgálat

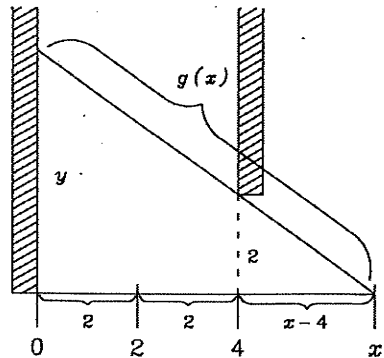
vektor egységvektor, ezért  $|(a; b)(\sin x; \cos x)| = |a \sin x + b \cos x|$  nem más, mint az  $(a; b)$  vektornak a  $(\sin x; \cos x)$  vektor egyenesére eső merőleges vetületének hossza, ami kisebb vagy egyenlő az  $(a; b)$  vektor hosszánál, azaz  $\sqrt{a^2 + b^2}$ -nél.

3. megoldás: Lásd a 1.?? feladatot.

61.  $f(x) = x^m(1-x)^n$ ,  $f'(x) = x^{m-1}(1-x)^{n-1}(m - (n+m)x)$ .  $f'$  zérushelyei  $0, 1, \frac{m}{m+n}$ . Az  $\frac{m}{m+n}$  helyen maximuma van  $f$ -nek, és  $f(\frac{m}{m+n}) = m^m n^n / (m+n)^{m+n}$ , ami bizonyítja az egyenlőtlenséget.
62. A törtefüggvényt  $f$ -fel jelölve  $f'(x) = (x^2 - 1)/(x^2 + x + 1)^2$ , amiből látható, hogy  $f$  a  $(-\infty; -1)$  és az  $(1; \infty)$  intervallumon nő, a  $(-1; 1)$  intervallumon csökken,  $x = -1$ -ben  $f$ -nek maximuma,  $x = 1$ -ben minimuma van, és  $f(-1) = 2$ ,  $f(1) = \frac{2}{3}$ . Mivel  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ , ezért e szélsőértékek egyúttal abszolút szélsőértékek is.
63. Tekintsük az  $f(x) = x^2/(x^3 + 100)$  függvényt a  $[0; \infty)$  intervallumon.  $f'(x) = x(200 - x^3)/(x^3 + 100)^2$ , amiből kapjuk, hogy  $f$  monoton növekvő a  $(0, \sqrt[3]{200})$  intervallumon és monoton csökkenő a  $(\sqrt[3]{200}, \infty)$  intervallumon. Az  $5 < \sqrt[3]{200} < 6$  egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy  $a_5$  vagy  $a_6$  a legnagyobb.  $a_5 = 1/9$ ,  $a_6 = 9/79$ , tehát  $a_6$  a legnagyobb.
64.  $a_{14}$ . 65.  $a_{272}$ .
66. (a)  $f(x) = x^3 + px + q = 0$ ,  $f'(x) = 3x^2 + p$ .  $f$ -nek szélsőértéke lehet az  $x_1 = \sqrt{-p/3}$  és az  $x_2 = -\sqrt{-p/3}$  pontokban (ha  $p < 0$ ).  $f$ -nek egy valós gyöke van, ha  $f$  monoton növekvő  $(-\infty, \infty)$ -en, (azaz, ha  $p \geq 0$ ), vagy ha  $f$  nem vált előjelet a minimum- és maximumhelyek között, azaz  $f(x_1)f(x_2) > 0$ . Ebből  $f(x_1)f(x_2) = q^2 - \left( \left( \sqrt{-p/3} \right)^3 + p\sqrt{-p/3} \right)^2$  miatt  $p^3/27 + q^2/4 > 0$  adódik.
- (b) Hasonlóan számolva:  $p^3/27 + q^2/4 < 0$ .
67.  $f$  lokális maximumhelye:  $x = 1$ , és  $f(1) = \frac{1}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(0) = \frac{1}{3}$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , tehát  $\sup_{(0, \infty)} f(x) = \max_{(0, \infty)} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$ ,  $\inf_{(0, \infty)} f(x) = 0$ .
68.  $f'(x) = 4x/(3 + x^2)^2 > 0$ , ha  $x \in (0, \infty)$ , tehát  $f$  az adott intervallumon szigorúan monoton nő.  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(0) = \frac{1}{3}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ , tehát  
 $\sup_{(0, \infty)} f(x) = 1$ ,  $\inf_{(0, \infty)} f(x) = \frac{1}{3}$ .
69.  $|x^2 - x^3| = x^2 - x^3$ , ha  $x \in [0, 1]$ . Mivel az  $x \mapsto x^2 - x^3$  függvény folytonos, ezért Weierstrass tétele miatt elég e függvény maximumát megkeresni. A maximumhely  $x = \frac{2}{3}$ , ahol  $f - g$  értéke  $\frac{4}{27}$ , tehát  $\rho(f, g) = \frac{4}{27}$ .
70. Hasonlóan az előző feladathoz: az  $x \mapsto |\sin x - \cos x|$  függvény maximumhelye  $x = 3\pi/4$ , ahol  $f - g$  értéke  $\sqrt{2}$ , tehát  $\rho(f, g) = \sqrt{2}$ .
71. Legyen  $F(x) = |x^2 - (2x + c)|$ .  $F'(x) = 2x - 2$ , ha  $x^2 - 2x - c > 0$ , illetve  $F'(x) = -2x + 2$ , ha  $x^2 - 2x - c < 0$ ,  $F'(x) = 0$ , ha  $x = 1$ . Ahol  $F$  nem differenciálható, ott  $F$ -nek minimuma van, mivel  $F$  értéke  $0$ .  $F$ -nek maximuma lehet az  $x = 0$ ,

### 11. Függvényvizsgálat

- $x = 1$  vagy  $x = 2$  helyeken.  $F(0) = F(2) = |c|$ ,  $F(1) = |c + 1|$ , és e három érték maximuma akkor a legkisebb, ha  $c = -1/2$ , és ekkor  $\rho(x^2, 2x - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ .
72. Az egyik szám  $x$ , a másik  $b - x$ , a maximálandó függvény  $f(x) = x(b - x)$ , melynek maximuma  $b/2$ -ben van, tehát mindkét szám  $b/2$ .
73. Az egyenlőszárú derékszögű háromszögnek. (Az átfogót  $c$ -vel, az egyik befogót  $a$ -val, a vele szemközti szöveget  $\alpha$ -val, a háromszög területét  $T$ -vel jelölve  $2T = a\sqrt{c^2 - a^2}$  vagy  $2T = c^2 \sin \alpha \cos \alpha$ .)
74. Melynek magassága és az alaplajjának átmérője megegyezik.
75. 1; 3.
76.  $x = a/\sqrt{2}$ ,  $y = b/\sqrt{2}$ ,  $T = ab$ .
77. Az összeg felülről nem korlátos, minimuma  $4f$ .
78.  $x = a/6$ .
79.  $\frac{dH}{dk} = 2k \sum_{i=1}^4 x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^4 x_i y_i \frac{d^2 H}{dk^2} = 2 \sum_{i=1}^4 x_i^2 > 0$ , tehát  $H$  konvex, így minimuma van, ha  $\frac{dH}{dk} = 0$ , azaz ha  $k = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i y_i}{\sum_{i=1}^4 x_i^2} = 3,9$ . (Az általános eset leírása megtalálható a tankönyvben.)
80. A szükséges idő:  $t(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v_2}$ , így ez a függvény minimalizálandó.  $t'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{v_1}{v_2 \sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = \frac{\sin \alpha_1}{v_1} - \frac{\sin \alpha_2}{v_2}$ .
81. A minimalizálandó függvény:  $t(x) = \sqrt{x^2 + (1/4)^2} + k\sqrt{(1 - x)^2 + (3/4)^2}$ , ahol a)  $k = 1$ , b)  $k = 3$ . A szélsőérték helyek: a)  $x = 1/4$ , b)  $x = 3/4$ . A b) esetben a gyök meghatározása nehézségekkel járhat.
82. Az  $I(\alpha) = k \frac{\sin \alpha \cos^2 \alpha}{r^2}$ , ( $k$  konstans) szélsőérték helye:  $\alpha = \arctg(1/\sqrt{2})$  vagy  $\alpha = \arcsin(1/\sqrt{3})$ , azaz  $\alpha \approx 35,264^\circ$ , ahonnan  $m = r/\sqrt{2}$ .
83. Ha a gerenda alsó vége  $x$  távolságra van az ajtóval szemközti faltól, felső végpontja  $y$  távolságra a földtől, akkor a gerenda  $L$  hossza nem lehet nagyobb a  $\sqrt{x^2 + y^2}$  értéknél, tehát  $L \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ . Mivel  $2/y = (x - 4)/x$ , ezért  $L \leq \sqrt{x^2 + (2x/(x - 4))^2}$ . Keressük tehát a  $g(x) = \sqrt{x^2 + (2x/(x - 4))^2}$  függvény minimumát. E minimum az  $x_0 = 4 + \sqrt[3]{16}$  pontban van, tehát a gerenda legfeljebb  $g(x_0) = 2\sqrt{5 + 3\sqrt[3]{4}} + 6\sqrt[3]{2}$  m hosszú lehet.



## 11. Függvényvizsgálat

84. Először tegyük fel, hogy  $f'(x_0) > 0$ . Ekkor  $f' > 0$  az  $x_0$  egy teljes környezetének minden pontjában, így  $f$  invertálható. Inverzét jelölje  $g$ , és legyen  $y_0 = f(x_0)$ . Az inverz függvény differenciálási szabálya szerint  $g'(y_0) = 1/f'(x_0)$ . Így ha  $f$  konvex, azaz  $f'$  monoton növekvő, akkor  $1/f'$  monoton csökkenő, azaz  $g$  konkáv. A többi eset hasonlóan vizsgálható.

85.  $f''(x) > 0$ , ha  $x > 0$ ,  $f''(x) < 0$ , ha  $x < 0$ , így

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f''$	-	0	+
$f$	∩	INFL	∪

86. Mivel az  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  függvény a  $g(x) = x^3$  függvény inverze, és  $g$ -nek a  $(0, 0)$  pont inflexiós pontja, ezért az  $f$  függvénynek is  $(0, 0)$  lesz az inflexiós pontja. A kettővel ezelőtti feladat alapján  $f$  konvex a  $(-\infty, 0)$  és konkáv a  $(0, \infty)$  intervallumon.

87.  $f'(x) = 1 + \frac{5}{3}x^{2/3}$ ,  $f''(x) = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f''$	-	n.ért.	+
$f$	∩	INFL	∪

Az  $f''$  függvénynek nincs zérushelye, de nincs értelmezve az  $x_0 = 0$  pontban. Mivel  $x_0$ -ban  $f$  differenciálható, azaz  $f$  grafikonjának van érintője, és ott  $f$  konkávból konvexbe vált, ezért  $f$ -nek  $0$ -ban inflexiós pontja van.

88. Konkáv, ha  $x < 5$ , konvex, ha  $x > 5$ , az  $x_0 = 5$  pontban inflexiós pontja van.

89.  $f''(x) = \frac{1}{x}(\cos(\ln x) - \sin(\ln x)) = \frac{\sqrt{2}}{x} \sin(\frac{\pi}{4} - \ln x)$ ,  $f''(x) = 0$ , ha  $x = \exp(\frac{\pi}{4} + k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Az  $f''$  függvény e pontokban előjelet vált, így e pontok mind inflexiós pontok.  $f$  konvex, ha  $x \in (\exp(-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi), \exp(\frac{1}{4}\pi + 2k\pi))$ , és  $f$  konkáv, ha  $x \in (\exp(\frac{1}{4}\pi + 2k\pi), \exp(\frac{5}{4}\pi + 2k\pi))$ .

90.  $f'(x) = \begin{cases} -5x^4, & \text{ha } x > 1 \\ 5x^4, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$   $f''(x) = \begin{cases} -20x^3, & \text{ha } x > 1 \\ 20x^3, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$

Az  $x = 1$  pontban a függvény nem differenciálható, mert  $\lim_{x \rightarrow 1+0} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x)$ , így ott nincs inflexiós pontja. (Azt mondjuk, hogy  $x_0$  töréspontja az  $f$  függvénynek, ha  $x_0$  folytonossági hely,  $\lim_{x \rightarrow 1+0} f'(x)$  és  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x)$  létezik, de különbözők.)

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f''$	-	0	+	n.ért.	-
$f$	∩	INFL	∪	töréspont	∩

91.  $f''(0) = 0$ ,  $f'''(0) = 6 \neq 0$ , az  $x = 0$  pont inflexiós pont.

92.  $f''(0) = f'''(0) = \dots = f^{(2n)}(0) = 0$ , de  $f^{(2n+1)}(0) = (2n+1)! \neq 0$ , vagyis az első nem-nulla derivált rendje páratlan, így  $f$ -nek  $x = 0$ -ban inflexiós pontja van.

93.  $f''(0) = f'''(0) = \dots = f^{(2n-1)}(0) = 0$ , de  $f^{(2n)}(0) = (2n)! \neq 0$ , vagyis az első nem-nulla derivált rendje páros, így  $f$ -nek  $x = 0$ -ban nincs inflexiós pontja, minimuma van.



### 11. Függvényvizsgálat

94.  $f''(x) = 0$ , ha  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . E pontok mindegyike inflexiós pont, mivel  $f'''$  e pontok egyikében sem 0.
95.  $f''(x) = \operatorname{sh} x - \sin x = 0$ , ha  $x = 0$ . Az  $f''$ -nek más zérushelye nincs, mert  $x > 0$  esetén  $\operatorname{sh} x > x$ ,  $\sin x < x$ , míg  $x < 0$  esetén  $\operatorname{sh} x < x$ ,  $\sin x > x$ .  $f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0$ ,  $f^{(5)}(0) = 2 \neq 0$ , tehát az első nem-nulla derivált rendje páratlan, így  $f$ -nek  $x = 0$ -ban inflexiós pontja van.

96. ld. az előző feladatot.

97.  $f''(x) = \frac{2(x^3 + 3x^2 - 3x - 1)}{(x^2 + 1)^3}$ .  $f''$  zérushelyei:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -2 + \sqrt{3}$ ,  $x_3 = -2 - \sqrt{3}$ .

	$(-\infty, -2 - \sqrt{3})$	$(-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3})$	$(-2 + \sqrt{3}, 1)$	$(1, \infty)$
$f''$	-	+	-	+
$f$	∩	∪	∩	∪

Tehát  $f$ -nek mindhárom helyen inflexiós pontja van. Az inflexiós pontok koordinátái:  $(-2 - \sqrt{3}, \frac{1 - \sqrt{3}}{4})$ ,  $(-2 + \sqrt{3}, \frac{1 + \sqrt{3}}{4})$ ,  $(1, 1)$ . Könnyen ellenőrizhető, hogy e pontok bármelyikéből a másik kettőbe mutató vektorok egyező állásúak, vagyis a pontok egy egyenesen vannak. Ennek az egyenesnek az egyenlete:  $x - 4y + 3 = 0$ .

98. Az  $f''(x) = 6(2x^2 + cx + 1) \geq 0$  egyenlőtlenség akkor áll fenn minden  $x$  valós számra, ha  $c^2 - 8 \leq 0$ , azaz ha  $|c| \leq 2\sqrt{2}$ .
99.  $f$ -nek inflexiós pontja van az  $x_0$  pontban, ha  $f''(x_0) = 0$  és  $f''$  ott előjelet vált. Ez akkor történik meg, ha az  $f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b = 0$  egyenletnek van két különböző valós gyöke, vagyis ha diszkriminánsa pozitív, tehát, ha  $3a^2 - 8b > 0$ .

100.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$ , mivel  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . (Valaki persze kiszámíthatja a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  határértéket a L'Hospital szabállyal is, azt azonban ne felejtsük el, hogy a  $\sin$  függvény differenciálásához szükségünk volt a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  határérték ismeretére.)

101.  $\frac{a}{b}$ .

102.1.

103.1.

104.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{\ln(1+x)} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^{ax} + ae^{-ax}}{1/(1+x)} = 2a$ .

105.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt{2+x} + x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2/(3\sqrt[3]{(1+2x)^2})}{1/(2\sqrt{2+x}) + 1} = \frac{4}{9}$ .

106.  $-\frac{1}{2}$ .

107.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{x/2}}{e^x + x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x/2}(1+x/2)}{e^x + 1} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x/2}(1+x/4)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x/4)}{e^{x/2}} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/2}{e^{x/2}} = 0$ .

108.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^2}{\sqrt{x}} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2/x}{1/(2\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{x}} = 0$ .

11. Függvényvizsgálat

$$109. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x \ln x}{e^x + x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x \ln x + e^x/x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + 1/x}{1 + e^{-x}} = \infty.$$

$$110. \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{e^x - e^a}{(x-a)e^x} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{1 - e^a e^{-x}}{(x-a)} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{e^a e^{-x}}{1} = 1.$$

$$111. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{1 + \ln \sin x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x \cos x} = 1.$$

$$112. \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-\pi(1-x)}{2 \cos^2 \frac{\pi x}{2}} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\pi}{-2\pi \cos \frac{\pi x}{2} \sin \frac{\pi x}{2}} = -\infty.$$

113. Legyen  $f$  és  $g$  két olyan egyváltozós valós függvény, hogy  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ . Ha  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = c > 1$ , akkor a határérték definíciója szerint van olyan  $x_0$  szám, hogy  $x > x_0$  esetén  $f(x)/g(x) > 1$ , azaz  $f(x) > g(x)$ . Hasonlóképpen, ha  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = c < 1$ , akkor van olyan  $x_0$  szám, hogy  $x > x_0$  esetén  $f(x) < g(x)$ . Számítsuk a megadott három függvény hányadosainak határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a x}{x^k} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a e}{k x^{k-1}} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{a^x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k x^{k-1}}{a^x \ln a} \stackrel{L}{=} \dots \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k!}{a^x (\ln a)^k} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a x}{a^x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a e}{x a^x \ln a} = 0.$$

Így a reciprokokra:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{\log_a x} = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^k} = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{\log_a x} = \infty$ . Tehát,

van olyan  $x_0$ , hogy  $x > x_0$  esetén  $\log_a x < x^k < a^x$ .

$$114. \lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0.$$

$$115. \lim_{x \rightarrow +0} x \ln \sin x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin x}{1/x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \left( -x \cos x \frac{x}{\sin x} \right) = 0.$$

$$116.0. \quad 117. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = 0. \quad 118.0. \quad 119.1.$$

$$120. \frac{1}{\pi}.$$

$$121. \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left( 1 + \frac{v}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{v}{x} \right) / \frac{1}{x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{vx}{x+v} = v.$$

122. Ha  $\varepsilon \leq 0$ , akkor a határérték nyilvánvalóan 0. Egyébként pedig használjuk a

L'Hospital szabályt.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\varepsilon}{e^x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon x^{\varepsilon-1}}{e^x}$ . Ha  $\varepsilon - 1 \leq 0$ , akkor a határérték 0, ha nem, még egyszer alkalmazzuk a L'Hospital szabályt.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon x^{\varepsilon-1}}{e^x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)x^{\varepsilon-2}}{e^x}$ . Ha  $\varepsilon - 2 \leq 0$ , akkor a határérték 0, ha nem, hasonlóképpen folytatjuk az eljárást, míg végül  $\varepsilon - k \leq 0$  nem teljesül. A határérték 0.

$$123. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^2 x)}{\operatorname{tg} \ln^2(1+x)} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} / \frac{2 \ln(1+x)}{(1+x) \cos^2 \ln^2(1+x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) \cos x \cos^2 \ln^2(1+x)}{1 + \sin^2 x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\ln(1+x)} \stackrel{L}{=} 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1/(1+x)} = 1.$$

11. Függvényvizsgálat

124.  $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{\exp x}$  egy  $\frac{\infty}{\infty}$  típusú határérték, melynek értéke 0. Ezt a L'Hospital szabály  $n$ -szeri alkalmazásával kapjuk meg, ahol  $n$  a  $p$  polinom foka. Ha  $r(x) = p(x)/q(x)$ , ahol  $p$  és  $q$  két polinom, és  $x_0$  egy olyan szám, melyre  $x > x_0$  esetén  $|q(x)| > 1$  (bizonyítsuk be, hogy ilyen szám mindig van), akkor  $|r(x)| = |p(x)|/|q(x)| < |p(x)|$ , ha  $x > x_0$ . Így  $-|p(x)| < r(x) < |p(x)|$ , vagyis  $-|p(x)|e^{-x} < r(x)e^{-x} < |p(x)|e^{-x}$ , és akkor a csendőrel alkalmazásával kapjuk, hogy  $\lim_{x \rightarrow \infty} r(x)e^{-x} = 0$ .

$$125. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin x - x}{x \sin x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{\sin x + x \cos x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 2x}{2 \cos x - x \sin x} = 0.$$

$$126. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left( x \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{2 \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2x \sin x - \pi}{2 \cos x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2 \sin x + 2x \cos x}{-2 \sin x} = -1.$$

$$127. 0. \qquad 128. \frac{1}{2}. \qquad 129. \frac{1}{2}.$$

130. Ha  $p \neq q$  és  $p \neq 1, q \neq 1$ , akkor:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{p(1-x^q) - q(1-x^p)}{(1-x^p)(1-x^q)} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{p-1} - x^{q-1})pq}{-px^{p-1} - qx^{q-1} + (p+q)x^{p+q-1}} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{((p-1)x^{p-2} - (q-1)x^{q-2})pq}{-p(p-1)x^{p-2} - q(q-1)x^{q-2} + (p+q)(p+q-1)x^{p+q-2}} = \frac{p-q}{2}.$$

Ugyanez adódik (nyilvánvalóan) a  $p = q$  esetben, valamint (lényegileg ugyanígy) a  $p = 1, q = 1$  esetben.

131. A határérték  $\infty^0$  típusú.  $\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = e^{\sin x \ln \frac{1}{x}}$ , ahol a kitevő  $0 \cdot \infty$  típusú.

A  $\sin x \ln \frac{1}{x} = \frac{\ln(1/x)}{1/\sin x}$  átalakítás után L'Hospital szabállyal kapjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln \frac{1}{x} = 0, \text{ tehát } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = e^{\sin x \ln \frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

132. A határérték  $0^0$  típusú.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln \sin x} = 1$ .

133. A határérték  $\infty^0$  típusú.  $(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} = e^{\operatorname{ctg} x \ln \operatorname{tg} x}$ , és  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{ctg} x \ln \operatorname{tg} x =$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{y=\operatorname{tg} x} \frac{\ln y}{y} \stackrel{L}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} = 0, \text{ ezért } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} = e^0 = 1.$$

134. A határérték  $1^\infty$  (pontosan  $1^{-\infty}$ ) típusú.  $\lim_{x \rightarrow +0} (1+x)^{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\ln x \ln(1+x)} = 1$ .

135.  $e^0$ .

136.  $\infty$ .

137. A határérték létezik, és 0, ugyanis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

A deriváltak hányadosának azonban nem létezik határértéke, mert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\cos \frac{1}{x} \right),$$

## 11. Függvényvizsgálat

így a L'Hospital szabály nem alkalmazható. (Ez nem mond ellent a T 11.12 tételnek.)

138.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1$ , tehát a határérték létezik. Másrészt az  $\frac{x - \sin x}{x + \sin x}$  tört számlálóját és nevezőjét is deriválva a kapott  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$  határérték nem létezik, hisz minden egész  $k$ -ra az  $x = (2k + 1)\pi$  helyen nevező 0, és így e pont környezetében a függvény nem korlátos, az  $x = k\pi$  helyen pedig a függvény értéke 0.

139.  $f$ -nek lokális maximuma van az  $x = e$  helyen, és  $f(e) = \frac{1}{e}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , tehát  $\sup_{(1, \infty)} f(x) = \max_{(1, \infty)} f(x) = f(1) = \frac{1}{e}$ ,  $\inf_{(1, \infty)} f(x) = 0$ .

140.  $f'(x) = -\frac{x^n}{n!} e^{-x} < 0$ , ha  $x \in (0, \infty)$ , azaz  $f$  szigorúan monoton csökkenő ezen az intervallumon.

$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , tehát  $\sup_{(0, \infty)} f(x) = 1$ ,  $\inf_{(0, \infty)} f(x) = 0$ .

141. A L'Hospital szabály többszöri alkalmazásával:

$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{x^2} - 3 = -3$ , és

$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{x} = 0$ .  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln^2 x}{x} - 3x \right) = \infty$ .

Aszimptoták:  $y = -3x$  és  $x = 0$ .

142.  $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x e^{\frac{1}{x}} = \pm\infty$ , így ferde aszimptota nincs. A L'Hospital szabály többszöri alkalmazásával:  $\lim_{x \rightarrow +0} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \infty$ , és  $\lim_{x \rightarrow -0} x^2 e^{\frac{1}{x}} = 0$ . Tehát az egyetlen aszimptota:  $x = 0$ .

143. (1)  $\text{Dom } f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

(3)  $f$  folytonos az értelmezési tartományán.

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ , tehát az  $x = 0$  egyenletű egyenes függőleges aszimptota.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ .

$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x = 1$ ,

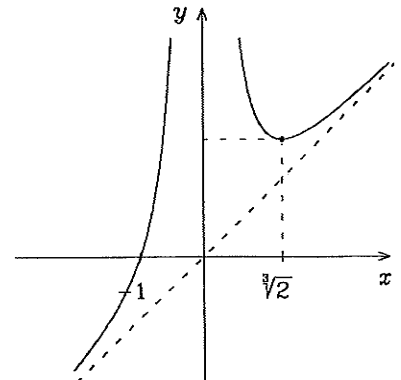
$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = 0$ ,

tehát a ferde aszimptota egyenlete  $y = x$ .

(5)  $f(-1) = 0$

(6)  $f'(x) = 1 - 2/x^3$ ,  $f''(x) = 6/x^4$ ,  $f'$  zérushelye  $x = \sqrt[3]{2}$ , tehát

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2}, \infty)$
$f'$	+	n.ért.	-	0	+
$f$	↗	pólus	↘	MIN	↗



11. Függvényvizsgálat

(7)  $f''(x) > 0$ , ha  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , így  $f$  mindenütt konvex, inflexiós pontja nincs.

(8)  $f(\sqrt[3]{2}) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{2}$ .

144. (1)  $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

(3)  $f$  mindenütt folytonos.

(4) Függőleges aszimptota nincs.

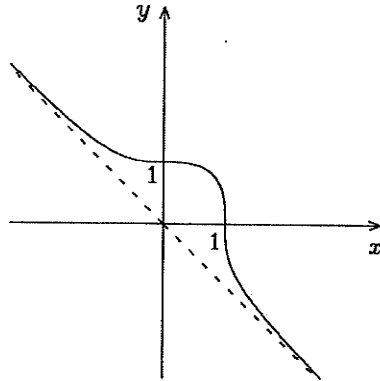
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \mp\infty$ .

$a = -1, b = 0$ , tehát a ferde aszimptota egyenlete  $y = -x$ .

(5)  $f(0) = 1, f(1) = 0$

(6)  $f'(x) = -x^2 / \sqrt[3]{(1-x^3)^2}, f''(x) = -2x / \sqrt[3]{(1-x^3)^5}, f'$  zérushelye  $x = 0$ , minden  $x$ -re  $f'(x) \leq 0$ .  $f$  nem differenciálható, ha  $x = 1$ , és  $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \infty$ .

(7)  $f''(x) = 0$ , ha  $x = 0$ .  $f''$  nincs értelmezve az  $x = 1$  pontban, de itt inflexiós pont van függőleges érintővel.



	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f''$	+	0	-	$\infty$	+
$f'$	-	0	-	$\infty$	-
$f$	$\searrow \cup$	INFL	$\searrow \cup$	INFL	$\searrow \cup$

145. (1)  $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

(2)  $f$  páros függvény, így elég csak a  $[0, \infty)$  intervallumon vizsgálni.

(3)  $f$  mindenütt folytonos.

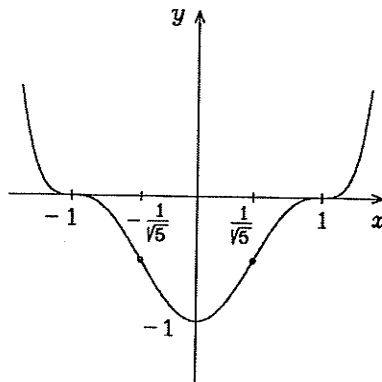
(4)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$ .

Mivel  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x = \pm\infty$ , ezért aszimptoták nincsenek.

(5)  $f(0) = -1, f$  zérushelyei  $-1$  és  $1$ , mivel  $f(x) = (x^2 - 1)^3$ .

(6-7)  $f'(x) = 6x(x^2 - 1)^2, f''(x) = 6(5x^2 - 1)(x^2 - 1)$ .  $f'$  zérushelyei  $0, 1, -1, f''$  zérushelyei  $\pm 1/\sqrt{5}, \pm 1$ .  $x \geq 0$  esetén  $f'(x) \geq 0, x \leq 0$  esetén  $f'(x) \leq 0. f''(x) > 0$ , ha

$x \in (-\infty, -1) \cup (-1/\sqrt{5}, 0) \cup (0, 1/\sqrt{5}) \cup (1, \infty)$ .



	0	$(0, 1/\sqrt{5})$	$1/\sqrt{5}$	$(1/\sqrt{5}, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f''$	+	+	0	-	0	+
$f'$	0	+	+	+	0	+
$f$	MIN	$\nearrow \cup$	INFL	$\nearrow \cup$	INFL	$\nearrow \cup$

(8)  $f(1/\sqrt{5}) = f(-1/\sqrt{5}) = -\frac{64}{125} = -0,512$ .

11. Függvényvizsgálat

146. (1) Dom  $f = \mathbf{R}$

(3)  $f$  mindenütt folytonos.

(4)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ . Így az  $y = 0$  egyenletű egyenes a függvény egyetlen aszimptotája.

(5)  $f(0) = -1$ . A függvénynek zérushelye nincs, mivel minden valós  $x$ -re  $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{x+1}$ , azaz  $f(x) < 0$ .

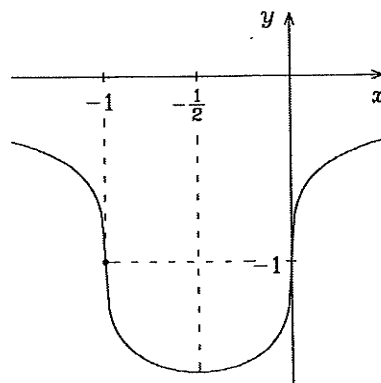
$$(6-7) f'(x) = \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}},$$

$$f''(x) = -\frac{2\sqrt[3]{(x+1)^5} - \sqrt[3]{x^5}}{9\sqrt[3]{x^5(x+1)^5}}.$$

$f'(x) = 0$ , ha  $x = -\frac{1}{2}$ .  $f'$  nincs értelmezve az  $x = -1$  ill.  $x = 0$  pontokban, ahol  $f'$  határértéke  $-\infty$  ill.  $\infty$ .

E két helyen tehát inflexióspontja van a függvénynek függőleges érintővel.  $f''$

értéke sehol sem zérus, és nincs értelmezve az  $x = -1$  és  $x = 0$  pontokban.



		-1		-1/2		0	
$f''$	-	n.ért.	+	+	+	n.ért.	-
$f'$	-	lim : $-\infty$	-	0	+	lim : $\infty$	+
$f$	$\searrow \curvearrowright$	INFL	$\searrow \curvearrowright$	MIN	$\nearrow \curvearrowleft$	INFL	$\nearrow \curvearrowleft$

(8)  $f(-1) = -1$ ,  $f(-1/2) = -\sqrt[3]{4}$ .

147. (1) Dom  $f = \mathbf{R}$ , mivel  $|1-x^2|/|1+x^2| \leq 1$ .

(3)  $f$  mindenütt folytonos.

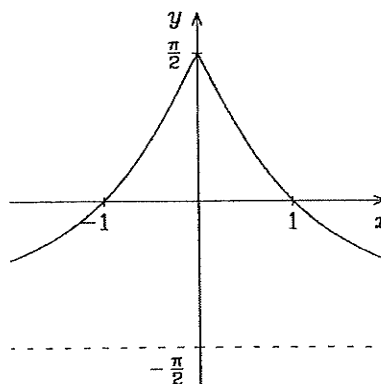
(4)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{-\pi}{2}$ . Így az  $y = \frac{-\pi}{2}$  egyenletű egyenes a függvény egyetlen aszimptotája.

(5)  $f(0) = -\pi/2$ .  $f(x) = 0$ , ha  $x = -1$  vagy  $x = 1$ .

$$(6-7) f'(x) = \frac{-2x}{|x|(1+x^2)},$$

$$f''(x) = \frac{4|x|}{(1+x^2)^2}.$$

$f$  csökkenő, ha  $x > 0$ , növekvő, ha  $x < 0$ .  $f'$  nincs értelmezve az  $x = 0$  pontban, ahol bal oldali határértéke 2, jobb oldali határértéke  $-2$ . E pontban  $f$ -nek maximuma van.  $f''(x) > 0$ , ha  $x \neq 0$ , így  $f$  konvex az  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$  halmazon.



11. Függvényvizsgálat

148. (1)  $\text{Dom } f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

(3)  $f$  folytonos az értelmezési tartományán.

$$(4) \lim_{x \rightarrow +0} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{y \rightarrow \infty \\ y=1/x}} \frac{e^y}{y^2} \stackrel{L}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{2y} \stackrel{L}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{2} = \infty, \text{ tehát az } x = 0 \text{ egyenletű}$$

egyenes függőleges aszimptota.

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty,$$

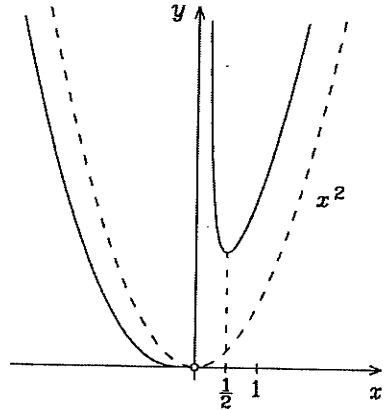
$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x = \pm\infty$ , így más aszimptota nincs.

(5)  $f$ -nek nincs zérushelye.

(6)  $f'(x) = 2e^{1/x}(x - \frac{1}{2})$ .  $f'(x) = 0$ , ha  $x = \frac{1}{2}$ .  $f$  monoton nő, ha  $x > \frac{1}{2}$ , monoton csökken, ha  $x < \frac{1}{2}$ ,  $f$ -nek  $x = \frac{1}{2}$ -ben minimuma van.

$$(7) f''(x) = e^{1/x}(2x^2 - 2x + 1)/x^2.$$

$f''(x) > 0$ , így  $f$  konvex, és inflexiós pontja nincs.



149. (1)  $\text{Dom } f = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$

(3)  $f$  folytonos az értelmezési tartományán.

(4)  $\lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} f(x) = -1 \pm \pi$ , tehát függőleges aszimptota az  $x = -1$  pontban nincs.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ .

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x = 1,$$

$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = -\pi/2$ , tehát a ferde aszimptota egyenlete  $y = x - \pi/2$ .

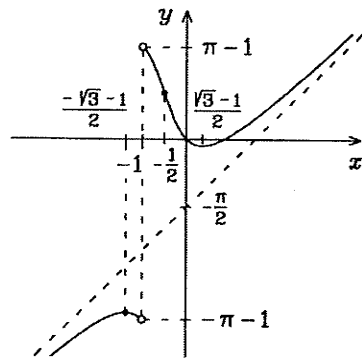
(5)  $f(0) = 0$ ,  $f$  többi zérushelye elemi úton nem határozható meg (még egy zérushely van, és arról könnyen látható, hogy pozitív, és pedig  $\approx 0,87$ ).

$$(6-7) f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2 + (x+1)^2},$$

$$f''(x) = \frac{4(2x+1)}{(2x^2 + 2x + 1)^2}.$$

$$f'(x) = 0, \text{ ha } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2},$$

$$f''(x) = 0, \text{ ha } x = -1/2.$$



		$\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$		-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$	
$f''$	-	-	-	n.ért.	-	0	+	+	+
$f'$	+	0	-	n.ért.	-	-	-	0	+
$f$	$\nearrow \curvearrowright$	MAX	$\searrow \curvearrowleft$	n.ért.	$\searrow \curvearrowleft$	INFL	$\searrow \curvearrowleft$	MIN	$\nearrow \curvearrowright$

11. Függvényvizsgálat

150. (1)  $\text{Dom } f = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$

(2)  $f$  páratlan függvény, így elég csak a  $[0, \infty)$  intervallumon vizsgálni.

(3)  $f$  folytonos az értelmezési tartományán.

(4)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} f(x) = \pm\infty$ .

$a = 0$ ,  $b = \pm\infty$ , tehát ferde aszimptota nincs, a két függőleges aszimptota egyenlete  $x = -1$  és  $x = 1$ .

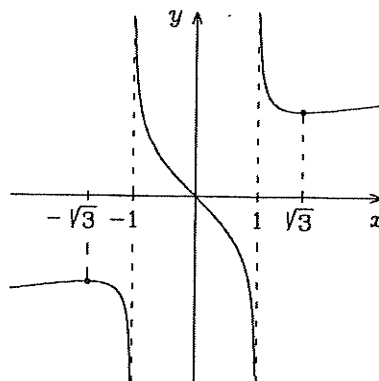
(5)  $f(0) = 0$ .

(6-7)  $f'(x) = \frac{x^2 - 3}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}$ ,

$f''(x) = \frac{2x(9 - x^2)}{9\sqrt[3]{(x^2 - 1)^7}}$ .

$f'(x) = 0$ , ha  $x = \pm\sqrt{3}$ .  $f''(x) = 0$ , ha  $x = 0$ ,  $x = \pm 3$ .

	0		1		$\sqrt{3}$		3	
$f''$	0	+	n.ért.	+	+	+	0	-
$f'$	-	-	n.ért.	-	0	+	+	+
$f$	INFL	$\searrow \smile$	n.ért.	$\searrow \smile$	MIN	$\nearrow \smile$	INFL	$\nearrow \smile$



151. (1)  $\text{Dom } f = \mathbf{R}^+$

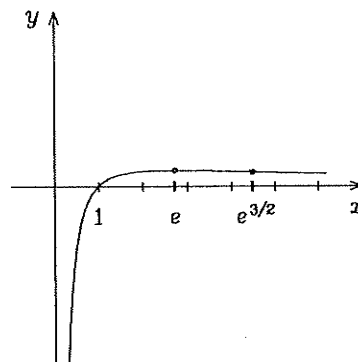
(3)  $f$  folytonos az értelmezési tartományán.

(4)  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , tehát az  $x = 0$  egyenletű egyenes függőleges aszimptota, az  $y = 0$  egyenletű egyenes ferde aszimptota.

(5)  $f(x) = 0$ , ha  $x = 1$ .

(6)  $f'(x) = (1 - \ln x)/x^2$ .  $f'(x) = 0$ , ha  $x = e$ .  $f$  monoton nő, ha  $0 < x < e$ , monoton csökken, ha  $x > e$ ,  $f$ -nek  $x = e$ -ben maximuma van.

(7)  $f''(x) = (2 \ln x - 3)/x^3$ .  $f''(x) = 0$ , ha  $x = e^{3/2}$ .  $f$  konkáv, ha  $0 < x < e^{3/2}$ , konvex, ha  $x > e^{3/2}$ ,  $f$ -nek  $x = e^{3/2}$ -ben inflexiós pontja van.

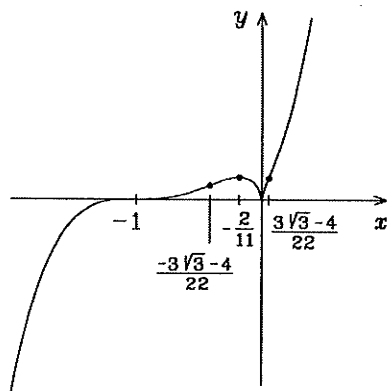


152.  $\text{Dom } f = \mathbf{R}^+$ , minimum:  $x = 1/e$ , háttárértéke  $+0$ -ban 1, konvex.

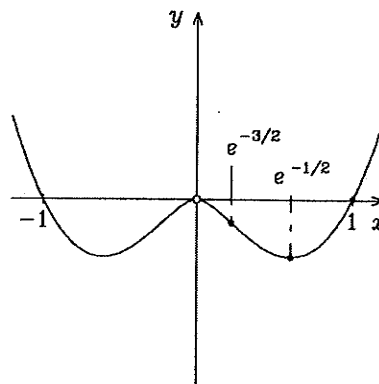


11. Függvényvizsgálat

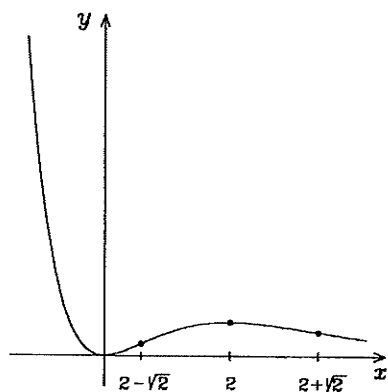
153.



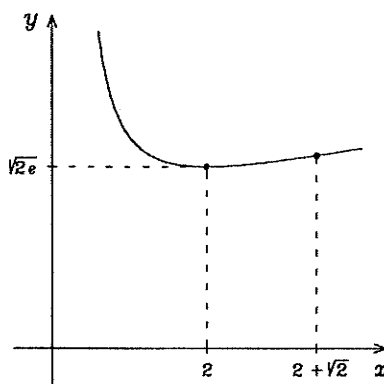
154.



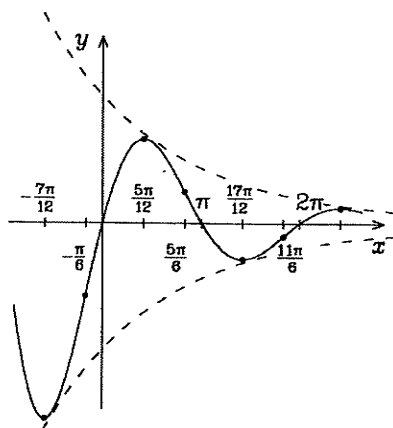
155.



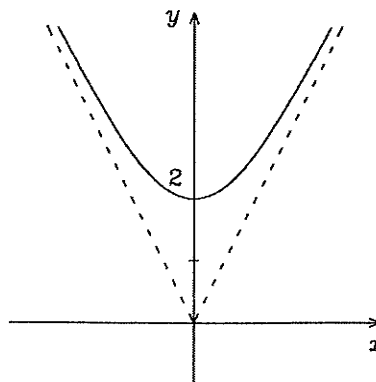
156.



157.



158.



159. A definíció 3. feltétele nem teljesül a  $t_0 = 0$  pontban, tehát a görbe síma görbéiv lesz, ha  $0 \notin (t_1, t_2)$ , azaz ha  $(t_1, t_2) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

### 11. Függvényvizsgálat

160. A definíció 1. feltétele nem teljesül a  $t_0 = 0$  pontban, tehát a görbe síma görbeív lesz, ha  $0 \notin (t_1, t_2)$ , azaz ha  $(t_1, t_2) \subset \mathbf{R} \setminus \{0\}$ .

161. A definíció 2. feltétele nem teljesül, ha  $t_1 = 0$ , vagy  $t_2 = 0$ . Az 1. feltétel nem teljesül, ha  $0 \in (t_1, t_2)$ . Tehát a görbe síma görbeív lesz, ha  $0 < t_1 < t_2$ , vagy ha  $t_1 < t_2 < 0$ . (Itt nem elég, hogy  $(t_1, t_2) \subset \mathbf{R} \setminus \{0\}$ .)

162.  $t \neq 0$   $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{6t^2}{6t} = t$ .  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{1}{6t}$ . A másik képlettel is

$$\text{kiszámítva: } \ddot{x} = 6, \ddot{y} = 12t, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\ddot{y}x - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} = \frac{1}{6t}.$$

163.  $\frac{dy}{dx} = \frac{t}{4}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{48t}$ ,  $t \neq 0$ .

164.  $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{e^t(\cos t - \sin t)^3}$ ,  $t \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

165.  $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{5 \sin t}{3}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{5 \cos^3 t}{9}$ .

166.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 3t^2}{2t^3}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3(1 + t^2)^3}{8t^5}$ ,  $t \neq 0$ .

167.  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = \frac{2}{3}$ , az egyenes egyenlete:  $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$ .

168. (a)  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \frac{3}{2}$ , az egyenes egyenlete:  $y = \frac{3}{2}x$ .

(b) A görbe nem síma a  $t_0 = 1$  paraméterű pontban, mert  $\dot{y}(1) = \dot{x}(1) = 0$ , de létezik a  $\lim_{t \rightarrow 1} \dot{y}/\dot{x} = 3$  határérték, így az érintő is. Egyenlete  $y = 3x - 1$ .

169.  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t_0} = \frac{2t^2 - 3}{2t^2 + 3} \Big|_{t_0} = -\frac{1}{2}$ ,  $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t_0} = \frac{24t^3}{(2t^2 + 3)^3} \Big|_{t_0} = \frac{3\sqrt{2}}{32}$ .

$$\left(x - \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{32\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{1000}{9}.$$

170.  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t_0} = \sqrt{3}$ ,  $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t_0} = -4$ .

$$\left(x - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 4.$$

171. Ha  $t \geq 0$ , akkor  $x = 3t$ ,  $y = 9t^2$ , azaz  $y = x^2$ . Ha  $t \leq 0$ , akkor  $x = t$ ,  $y = t^2$ , azaz ismét  $y = x^2$ . E függvény pedig differenciálható az  $x(0) = 0$  pontban, és  $y'(0) = 0$ .

## 12. Határozatlan integrál (megoldások)

1.  $\frac{7}{5}x^5 + C.$
2.  $\int \sqrt[5]{x} dx = \int x^{1/5} dx = \frac{5}{6}x^{6/5} + C.$
3.  $\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 5t + C.$
4.  $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + C.$
5.  $\int x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{8}} dx = \int x^{\frac{7}{8}} dx = \frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}} + C.$
6.  $2e^x + 5 \ln|x| + \operatorname{tg} x + C.$
7.  $\int \frac{x^2 - 3x + 4}{x} dx = \int \left(x - 3 + \frac{4}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 4 \ln|x| + C.$
8.  $\int \frac{x^3}{x+5} dx = \int \left(x^2 - 5x + 25 - \frac{125}{x+5}\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 25x - 125 \ln|x+5| + C.$
9.  $\int \frac{x^2}{1-x^2} dx = \int \left(-1 + \frac{1}{1-x^2}\right) dx = -x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$
10.  $\frac{x^2}{2} - \sqrt{2}x + C.$
11.  $\frac{x^3}{3} - a^2x + a^3 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C. (\text{P } 12.7)$
12.  $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}a^3 \ln|x^3 - a^3| + C.$
13.  $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + C.$
14.  $\frac{1}{202}(2x-3)^{101} + C.$
15.  $-\frac{1}{4(2+3x^2)^2} + C.$
16.  $-\frac{1}{2(1+x^2)} + C.$
17.  $\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27} + C.$
18.  $\int \sqrt[3]{1-3x} dx = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(1-3x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = -\frac{1}{4}\sqrt[3]{(1-3x)^4} + C.$
19.  $\frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + C, \text{ ha } b \neq 0, n \neq -1; \frac{\ln|a+bx|}{b} + C, \text{ ha } b \neq 0, n = -1; a^n x + c, \text{ ha } b = 0.$
20.  $\frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{(1+r^3)^4} + C.$
21.  $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^4+1)^2} + C.$
22.  $-\sqrt{1-x^2} + C.$
23.  $\frac{1}{4}\sin^4 x + C.$
24.  $\cos^3 x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$
25.  $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$
26.  $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$
27.  $\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$
28.  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^4 x} \cdot (-\sin x) dx = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$

12. Határozatlan integrál

29.  $\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx = \int \frac{\sin x(1 - \cos^2 x)}{1 - \cos x} dx = \int \frac{\sin x(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} dx = \int (\sin x + \sin x \cos x) dx = -\cos x + \frac{\sin^2 x}{2} + C.$
30.  $\frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C.$
31.  $\frac{3}{2}(\sin x - \cos x)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{1 - \sin 2x} + C.$
32.  $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x \cos^4 x}} = \int (\operatorname{tg} x)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$  átalakítással az eredmény:  $2 \cdot \sqrt{\operatorname{tg} x} + C.$
33.  $\frac{1}{3} \ln^3 x + C.$
34.  $\frac{3}{2} \sqrt[3]{\ln^2 x} + C.$
35.  $\frac{1}{5} \operatorname{sh}^5 x + \frac{1}{3} \operatorname{sh}^3 x + C.$
36.  $\frac{1}{3} \operatorname{sh}^3 x + \operatorname{sh} x + C.$
37.  $\int \sqrt{\operatorname{ch} x + 1} dx = \sqrt{2} \int \operatorname{ch} \frac{x}{2} dx = 2\sqrt{2} \operatorname{sh} \frac{x}{2} + C.$
38.  $\frac{7}{4} \ln |4x - 1| + C.$
39.  $\ln(4x^2 - 7x + 11) + C.$
40.  $\ln(x^2 + 3x - 10) + C.$
41.  $-\ln |2x^2 - 3x + 1| + C.$
42.  $\ln \sqrt{x^2 + a^2} + C.$
43.  $\ln(a^3 + x^3) + C.$
44. Az  $\frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ , vagy az  $\frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$  azonosság alkalmazásával az eredmény:  $\ln |\operatorname{tg} x| + C.$
45. Az előző feladat eredményét felhasználva:  
 $\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$
46.  $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x} = \ln |\operatorname{th} x| + C.$
47.  $\int \frac{1}{\operatorname{sh} x} dx = \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| + C.$
48.  $\ln \sqrt{1 + e^{2x}} + C.$
49.  $\frac{1}{\ln a} \ln(a^x + 1) + C.$
50.  $\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}} x + C.$
51.  $\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}}(x + 1) + C.$
52.  $\begin{cases} -\frac{1}{2} \operatorname{arth} \frac{1}{2}(3x - 1) + C, & \text{ha } -\frac{1}{3} < x < 1 \\ -\frac{1}{2} \operatorname{arch} \frac{1}{2}(3x - 1) + C, & \text{ha } x < -\frac{1}{3}, \text{ vagy } x > 1 \end{cases} = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{3x - 1}{x - 1} \right| + C$
53.  $\begin{cases} -\frac{1}{2} \operatorname{arth} \frac{1}{2}(x - 1) + C, & \text{ha } -1 < x < 3 \\ -\frac{1}{2} \operatorname{arch} \frac{1}{2}(x - 1) + C, & \text{ha } x < -1, \text{ vagy } x > 3 \end{cases} = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x + 1}{x - 3} \right| + C$
54.  $\begin{cases} -\frac{1}{5} \operatorname{arth} \frac{1}{5}(x - 3) + C, & \text{ha } -2 < x < 8 \\ -\frac{1}{5} \operatorname{arch} \frac{1}{5}(x - 3) + C, & \text{ha } x < -2, \text{ vagy } x > 8 \end{cases} = -\frac{1}{10} \ln \left| \frac{x + 2}{x - 8} \right| + C$
55.  $\int \frac{x dx}{4 + x^4} = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + (x^2/2)^2} \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)' dx = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} + C.$

12. Határozatlan integrál

56.  $\frac{1}{2a^4} \int \frac{1}{1 - (x^2/a^2)^2} \cdot 2x \, dx$  átalakítással az eredmény
- $$\begin{cases} \frac{1}{2a^2} \operatorname{arth} \frac{x^2}{a^2} + C = \frac{1}{4a^2} \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2} + C, & \text{ha } |x| < |a| \\ \frac{1}{2a^2} \operatorname{arcth} \frac{x^2}{a^2} + C = \frac{1}{4a^2} \ln \frac{x^2 + a^2}{x^2 - a^2} + C, & \text{ha } |x| > |a|. \end{cases}$$
57.  $\frac{-1}{4\sqrt{2}} \int \frac{1}{1 - \left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)^2} \cdot \frac{4x^3}{\sqrt{2}} \, dx$  átalakítással az eredmény:  $\frac{\sqrt{2}}{16} \ln \left| \frac{x^4 - \sqrt{2}}{x^4 + \sqrt{2}} \right| + C$ ,  
ill.  
 $-\frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arth} \frac{x^4}{\sqrt{2}} + C$ , ha  $|x| < \sqrt[8]{2}$ , és  
 $-\frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arcth} \frac{x^4}{\sqrt{2}} + C$ , ha  $|x| > \sqrt[8]{2}$ .
58.  $\frac{1}{3} \operatorname{arsh}(3x - 1) + C$ .
59. A  $\sqrt{9x^2 - 6x + 5} = 2\sqrt{\left(\frac{3x-1}{2}\right)^2 + 1}$  átalakítással:  
 $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 6x + 5}} = \frac{1}{3} \operatorname{arsh} \frac{3x-1}{2} + C = \frac{1}{3} \ln |\sqrt{9x^2 - 6x + 5} + 3x - 1| + C$ .
60.  $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 6x - 3}} = \frac{1}{3} \operatorname{arch} \frac{3x-1}{2} + C = \frac{1}{3} \ln |\sqrt{9x^2 - 6x - 3} + 3x - 1| + C$ .
61.  $\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 6x - 9x^2}} = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x-1}{2} + C$ .
62.  $(1/\sqrt{3}) \operatorname{arch}(\sqrt{3}x) + C$ .      63.  $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \sqrt{\frac{3}{2}}x + C$ .
64.  $\int \frac{1}{(1 + \sqrt{x^2})} \cdot (\sqrt{x})' \cdot 2 \, dx = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C$ .
65.  $2 \int e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$ .
66.  $\int \frac{1}{\sqrt{1 - (e^x)^2}} \cdot (e^x)' \, dx = \arcsin e^x + C$ .
67.  $\frac{1}{\ln a} \int \frac{1}{1 + (a^x)^2} \cdot a^x \ln a \, dx = \frac{1}{\ln a} \operatorname{arctg} a^x + C$ .
68.  $-\cos \ln x + C$ .
69.  $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}} \, dx = \int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{2 \operatorname{ch}^2 x - 1}} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2} \operatorname{ch} x)^2 - 1}} \cdot (\sqrt{2} \operatorname{ch} x)' \, dx =$   
 $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arch}(\sqrt{2} \operatorname{ch} x) + C$ .
70.  $\ln |\ln x| + C$ .      71.  $\ln |\ln \ln x| + C$ .
72.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} = \int \frac{dx}{2 \cos^2 x \left( \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 \right)} =$

12. Határozatlan integrál

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{1 + (\operatorname{tg} x / \sqrt{2})^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \cos^2 x} dx \text{ \textit{átalakítással az eredmény}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) + C.$$

73. A előző feladat megoldásához hasonlóan az eredmény

$$\begin{cases} ab \operatorname{arctg} \left( \frac{a}{b} \operatorname{tg} x \right) + C, & \text{ha } |a| \neq |b| \\ a^2 x + C, & \text{ha } |a| = |b|. \end{cases}$$

74.  $x \sin x + \cos x + C,$

75.  $-\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$

76.  $\frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}x \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$  77.  $\frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$

78.  $-\frac{1}{2}x^2 \cos 2x + \frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$

79.  $-x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C.$

80.  $x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + C.$

81.  $\frac{1}{8}(2x^2 + 2x \sin 2x + \cos 2x) + C.$

82.  $\frac{3^x}{\ln 3} \left( x - \frac{1}{\ln 3} \right) + C.$

83.  $-(x+1)e^{-x} + C.$

84.  $-\frac{1}{2}e^{-2x} \left( x^2 + x + \frac{1}{2} \right) + C.$

85.  $-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x) + C.$

86.  $\frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2 \cos x) + C.$

87.  $\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + C, (a, b \neq 0 \text{ konstans}).$

88.  $\frac{1}{26}e^{6x}(3 \cos 4x + 2 \sin 4x) + C.$

89.  $\frac{1}{10}e^x(5 - \cos 2x - 2 \sin 2x) + C.$

90.  $f'(x)$ -ként az 1 konstansfüggvényt választjuk. Az eredmény:

$$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C.$$

91.  $x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1 - x^2} \arcsin x - 2x + C.$

92.  $2\sqrt{x} - 2\sqrt{1 - x} \cdot \arcsin \sqrt{x} + C.$

93.  $x \arccos \frac{1}{x} - \operatorname{arch} x + C.$

94.  $x \operatorname{arctg} \frac{x}{3} - \frac{3}{2} \ln(x^2 + 9) + C.$

95. Legyen  $f'(x) = x, g(x) = \operatorname{arctg} x$  és  $f(x) = x^2/2$ . Ekkor

$$\int x \operatorname{arctg} x dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)} dx = \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.$$

Megjegyzés: Az  $f(x)$  megválasztásánál általában nem vagyunk tekintettel az integrációs konstansra, ügyes megválasztása azonban néha egyszerűsítheti a megoldást. Például az  $f(x) = (x^2 + 1)/2$  választással:

$$\int x \operatorname{arctg} x dx = \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1}{x^2+1} dx = \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.$$

96.  $I = \int \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} dx = x \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} - \int \frac{x}{1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} dx$

$$= x \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} - \int \frac{x dx}{x^2+1} = x \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$$

## 12. Határozatlan integrál

97.  $-\sqrt{x} + (1+x) \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C.$

98.  $\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 + C.$

99.  $\sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arsh} x + C = \sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \ln \left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C.$

100.  $\int 1 \cdot \ln x \, dx = x \ln x - x + C.$

101.  $x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + C.$

102.  $x(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6) + C.$

103.  $-\frac{1}{x}(\ln^2 x + 2 \ln x + 2) + C.$

104.  $x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C.$

105.  $x \ln \frac{8-x}{3} - x - 8 \cdot \ln|x-8| + C.$

106.  $x \lg \frac{4e}{x} + C.$

107.  $\frac{x^3+1}{3} \ln(1+x) - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} + C.$

108.  $C - \frac{1}{2x^2} \ln(x\sqrt{e}).$

109.  $\frac{x^{v+1}}{v+1} \left(\ln x - \frac{1}{v+1}\right) + C.$

110.  $\operatorname{tg} x \cdot \ln \cos x + \operatorname{tg} x - x + C.$

111.  $x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + C.$

112.  $\left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x}{9}\right) \operatorname{sh} 3x - \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2}{27}\right) \operatorname{ch} 3x + C.$

113.  $(-x^2+2x-2) \operatorname{ch} x + (2x-2) \operatorname{sh} x + C.$

114.  $\frac{1}{26}(\operatorname{sh} x \cos 5x + 5 \operatorname{ch} x \sin 5x) + C.$

115. A kiszámítandó integrált röviden  $I$ -vel jelölve

$$I = \int \cos^{n-1} x \cos x \, dx =$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + \int (n-1) \cos^{n-2} x \sin^2 x \, dx =$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) \, dx =$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx - (n-1)I.$$

$$nI = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx,$$

$$I = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx.$$

116. Hasonlóan az előző feladat megoldásához.

117.  $x = \sin t$  helyettesítéssel  $\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C.$

118.  $\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + C.$

119.  $\frac{a^2}{2} \operatorname{arsh} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2} + C.$

120.  $\frac{5}{2\sqrt{3}} \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{5}} + \frac{x}{2} \sqrt{5+3x^2} + C.$

121.  $\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + C.$

122.  $u = \sqrt{c+x}$  helyettesítéssel a megoldás:  $\frac{2}{15} \sqrt{(c+x)^3} (3x-2c) + C.$

123.  $u = \sqrt{c+x}$  helyettesítéssel  $-\frac{2}{\sqrt{c}} \operatorname{arth} \frac{\sqrt{c+x}}{c} + C = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left| \frac{\sqrt{c+x}-c}{\sqrt{c+x}+c} \right| + C.$

## 12. Határozatlan integrál

$$124. \frac{3}{8} \operatorname{arch} x + \frac{1}{8} x \sqrt{x^2 - 1} (2x^2 - 1) - \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 1} + C.$$

$$125. x = \sin t \text{ helyettesítéssel a megoldás } \operatorname{tg} \arcsin x + C = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + C.$$

$$126. x = \operatorname{sh} t \text{ helyettesítéssel } \frac{1}{2} \left( \operatorname{arsh} x + x \sqrt{1 + x^2} \right) + C.$$

$$127. x = \operatorname{sh} t \text{ helyettesítéssel } -\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} + \operatorname{arsh} x + C.$$

$$128. A \sqrt{x} = \operatorname{ch} t \text{ helyettesítéssel a megoldás: } \operatorname{arch} \sqrt{x} + \sqrt{x(x - 1)} + C.$$

Vagy:  $\sqrt{\frac{x}{x - 1}} = u$  helyettesítéssel  $\int \frac{-2u^2}{(u^2 - 1)^2} du$  adódik, ezt  $u \cdot \frac{-2u}{(u^2 - 1)^2}$  felbontással parciálisan integrálva a végeredmény:

$$\sqrt{x(x - 1)} + \operatorname{arth} \sqrt{\frac{x}{x - 1}} + C.$$

$$129. A \sqrt{x} = \sin t \text{ helyettesítéssel } \arcsin \sqrt{x} - \sqrt{x(1 - x)} + C.$$

Vagy:  $\sqrt{\frac{x}{1 - x}} = u$  helyettesítéssel  $-\sqrt{x(1 - x)} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{1 - x}} + C.$

130. A

$$\sqrt{3 - 2x - x^2} = \sqrt{4 - (x + 1)^2} = \sqrt{4 \left( 1 - \left( \frac{x + 1}{2} \right)^2 \right)}$$

átalakítás után az  $\frac{x + 1}{2} = \sin t$  helyettesítéssel a megoldás:

$$2 \arcsin \frac{x + 1}{2} + \frac{x + 1}{2} \sqrt{3 - 2x - x^2} + C.$$

$$131. \frac{5}{2\sqrt{3}} \arcsin \sqrt{\frac{3}{5}} x + \frac{x}{2} \sqrt{5 - 3x^2} + C.$$

$$132. \frac{1}{2} \operatorname{arsh}(x + 1) + \frac{x + 1}{2} \sqrt{x^2 + 2x + 2} + C.$$

$$133. A \sqrt{3x^2 - 3x + 1} = \sqrt{3 \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{(2\sqrt{3}x - \sqrt{3})^2 + 1} \text{ átalakítás}$$

után a  $2\sqrt{3}x - \sqrt{3} = \operatorname{sh} t$  helyettesítéssel a megoldás:

$$\frac{1}{8\sqrt{3}} \left[ \operatorname{arsh}(2\sqrt{3}x - \sqrt{3}) + (2\sqrt{3}x - \sqrt{3}) \sqrt{3(2x - 1)^2 + 1} \right] + C.$$

$$134. 2 \operatorname{arsh} \frac{x - 1}{2} + \frac{x - 1}{2} \sqrt{5 - 2x + x^2} + C.$$

$$135. 8 \arcsin \frac{x - 1}{4} + \frac{x - 1}{2} \sqrt{15 + 2x - x^2} + C.$$

$$136. \text{Az } \frac{x}{a} = \operatorname{sh} u \text{ helyettesítéssel } \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} + C.$$

$$137. u = \frac{a}{x} \text{ helyettesítéssel a megoldás: } -\frac{1}{a} \operatorname{arsh} \frac{a}{x} + C.$$

$$138. \frac{1}{3} \sqrt{(1 + x^2)^3} - \sqrt{1 + x^2} + C. \quad 139. \frac{1}{12} \sqrt{(1 + 2x^2)^3} - \frac{1}{4} \sqrt{1 + 2x^2} + C.$$



## 12. Határozatlan integrál

140.  $x = \frac{1}{u}$  helyettesítéssel  $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x^3}{x^3 + 1} \right| + C$ .

141. A  $x = u^4$  helyettesítéssel a megoldás:  $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4 \ln(\sqrt[4]{x} + 1) + C$ .

142. Az  $x = u^6$  helyettesítéssel a megoldás:  $6(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x}) + C$ .

143.  $x = u^2$  helyettesítéssel a megoldás:  $2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C$ .

144.  $x = u^4$  helyettesítéssel a megoldás:  $\frac{4}{3} [\sqrt[4]{x^3} - \ln(\sqrt[4]{x^3} + 1)] + C$ .

145. 
$$\begin{cases} \sqrt{2} \operatorname{arth} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{2}} + C, & 2 \operatorname{arctg}(1 - \sqrt{2}) < x < 2 \operatorname{arctg}(1 + \sqrt{2}) \\ \sqrt{2} \operatorname{arcth} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{2}} + C, & x < 2 \operatorname{arctg}(1 - \sqrt{2}), \text{ vagy } x > 2 \operatorname{arctg}(1 + \sqrt{2}) \end{cases}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \frac{(\sqrt{2} - 1) \cos x + \sin x + \sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1) \cos x - \sin x + \sqrt{2} + 1} \right| + C$$

146. A  $\sin x = t$  helyettesítéssel, vagy (6) alapján, és felhasználva, hogy  $\sqrt{1 - \cos^2 x} = \operatorname{sgn}(\sin x)$ , az eredmény:

$$- \operatorname{sgn}(\sin x) \operatorname{arsh}(\sin x) + C = - \operatorname{sgn}(\sin x) \ln(\cos x + \sqrt{1 + \cos^2 x}) + C$$

147.  $-\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} + C$ .

148.  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$ .      149.  $\ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$ .      150.  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C$ .

151.  $t = \operatorname{tg} x$  helyettesítéssel  $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg} x + 4}{3} + C$ .

152.  $\int \frac{dx}{1 - \sin^4 x} = \int \frac{dx}{(1 - \sin^2 x)(1 + \sin^2 x)}$  átalakítás után  $t = \operatorname{tg} x$  helyettesítéssel  $\frac{1}{2} \operatorname{tg} x + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C$ .

153.  $\operatorname{tg} x = t$  helyettesítéssel  $(1/2) \operatorname{tg}^2 x - (1/2) \operatorname{ctg}^2 x + 2 \ln |\operatorname{tg} x| + C$ . A számítás rövidebb, ha a  $\sin^3 x \cos^3 x = \frac{1}{8} \sin^3 2x$  átalakítással kezdjük, majd a  $\sin 2x$  helyébe (a  $\operatorname{tg} x = t$  helyettesítésnek megfelelően) a  $\frac{2t}{1+t^2}$  kifejezést írjuk.

154.  $x = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$  helyettesítéssel:  $\int \frac{3 \operatorname{tg}^2 t - 1}{(\operatorname{tg}^2 t + 1)^3 \cos^2 t} dt =$   
 $= \int (3 \sin^2 t \cos^2 t - \cos^4 t) dt = \sin t \cos^3 t = \frac{\operatorname{tg} t}{(\operatorname{tg} t + 1)^2} = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$ .

155. Az  $u = \ln x$  helyettesítéssel  $\ln x (\ln \ln x - 1) + C$ .

156.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin^4 x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(1 - \sin^2 x)(1 + \sin^2 x)}}$  átalakítás után  $t = \operatorname{tg} x$  helyettesítéssel  $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arsh}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C$ .

12. Határozatlan integrál

157. Az  $\sqrt{e^x - 1} = u$  helyettesítéssel  $2 \int \frac{u^2}{u^2 + 1} du =$   
 $= 2(\sqrt{e^x - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1}) + C.$

158.  $e^x - \ln(e^x + 1) + C.$

159.  $\ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| + C.$

160. A  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$  helyettesítéssel a kiszámítandó  $I$  integrál:  $I = \frac{2}{c+b} \int \frac{dt}{1 + \frac{c-b}{c+b}t^2}.$

Az  $c = b$  esetben  $I = \frac{1}{c} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$

Ha  $c > b$ :  $\frac{c-b}{c+b}t^2 = \left( \sqrt{\frac{c-b}{c+b}} t \right)^2$ ,  $I = \frac{2}{\sqrt{c^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{c-b}{c+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$

Az  $c < b$  esetben  $\frac{c-b}{c+b}t^2 = - \left( \sqrt{\frac{b-c}{c+b}} t \right)^2$ , és ezért

$$I = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{b^2 - c^2}} \operatorname{arth} \left( \sqrt{\frac{b-c}{b+c}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C, & \text{ha } |x| < 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{b+c}{b-c}} \\ \frac{2}{\sqrt{b^2 - c^2}} \operatorname{arcth} \left( \sqrt{\frac{b-c}{b+c}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C, & \text{ha } |x| > 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{b+c}{b-c}} \end{cases}$$

161.  $\frac{1}{x^3 - 8} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$ . A kiszámítandó határozatlan integrál:

$$\int \left( \frac{\frac{1}{12}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{12}(x+4)}{x^2+2x+4} \right) dx = \frac{1}{24} \ln \frac{(x-2)^2}{x^2+2x+4} - \frac{1}{4\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}} + K.$$

162.  $-\frac{1}{4} \ln |x+1| + \frac{1}{4} \ln |x-3| + C.$

163.  $\ln |x-2| + \ln |x+5| + C.$

164.  $\ln \left| \frac{x^3}{(x-1)(x+1)^2} \right| + C.$

165.  $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$

166.  $-\frac{1}{2} \ln |x+1| + 2 \ln |x+2| - \frac{3}{2} \ln |x+3| + C.$

167.  $\int \left( \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3} + \frac{A_4}{(x-2)^4} \right) dx =$

$$= \int \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^3} + \frac{1}{(x-2)^4} \right) dx =$$

$$= \ln |x-2| + \frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{1}{3(x-2)^3} + C.$$

168.  $\int \left( \frac{1}{4x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{4(x-2)} + \frac{1}{2(x-2)^2} \right) dx =$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x}{x-2} \right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2(x-2)} + C.$$

169.  $\frac{1}{2} \ln |x+1| - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + C.$

170.  $\frac{1}{3} \ln |x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

## 12. Határozatlan integrál

171.  $\frac{1}{6} \int \frac{6x^5}{x^6(3+5x^6)} dx$  átalakítás és  $u = x^6$  helyettesítés után elemi törtekre bontással az eredmény:  $\frac{1}{18} \ln \frac{x^6}{5x^6+3} + C$ .

172.  $\int \frac{8x^3}{x^4(7+3x^4)} dx$  átalakítás és  $u = x^4$  helyettesítés után elemi törtekre bontással az eredmény:  $\frac{7}{2} \ln \frac{x^4}{3x^4+7} + C$ .

173.  $2 \ln \left| \frac{e^x - 3}{e^x} \right| + C$ .

174. Az  $x^x = t$  helyettesítéssel  $x \ln x = \ln t$ ; mindkét oldalt  $t$  szerint differenciálva

$$\begin{aligned} (\ln x + 1) \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{t}. \text{ Emiatt} \\ \int \frac{\ln x + 1}{x^x - 1} dx &= \int \frac{\ln x + 1}{t - 1} \cdot \frac{dt}{t(\ln x + 1)} = \int \frac{dt}{t(t-1)} = \int \left( \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = \\ &= \ln \left| \frac{x^x - 1}{x^x} \right| + C. \end{aligned}$$

175.  $2(\sqrt{x} - \operatorname{arctg} \sqrt{x}) + C$ .

176. Parciális integrálással:  $xf'(x) - f(x) + C$ .

177.  $\frac{1}{2}f(2x)$ .

178. Az adott egyenletből kapjuk, hogy  $2xf'(x^2) = 2$ , aminek mindkét oldalát integráljuk:  $f(x^2) = 2x + C$ , azaz  $f(x) = 2\sqrt{x} + C$ .

179.  $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + C$ .

180. A formula igaz voltát mindkét oldal deriválásával igazolhatjuk.

181. Ha  $x \geq 0$ , akkor az integrál értéke  $\frac{1}{2}x^2 + C_1$ , ha  $x \leq 0$ , akkor az integrál értéke  $-\frac{1}{2}x^2 + C_2$ . A két konstanst úgy kell megválasztani, hogy a kapott függvény mindenütt differenciálható legyen. Így az integrál értéke:  $\frac{1}{2}x|x| + C$ .

182.  $\frac{1}{3}x^2|x| + C$ .

183.  $\frac{1}{2}((1+x)|1+x| + (1-x)|1-x|) + C$ .

184.  $e^x - 1 + C$ , ha  $x < 0$ ;  $1 - e^{-x} + C$ , ha  $x \geq 0$ .

185.  $x + C$ , ha  $|x| \leq 1$ ;  $\frac{1}{3}(x^3 + 2 \operatorname{sgn} x) + C$ , ha  $|x| > 1$ .

186.  $\int \frac{1}{x^2} \arcsin x dx = -\frac{1}{x} \arcsin x + \int \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ . A második tagban

$$x = \frac{1}{u} \text{ helyettesítéssel a végeredmény: } -\frac{1}{x} \arcsin x - \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \right| + C.$$

187.  $\int \frac{x^2 + (1+x^2)}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx + \int \frac{1}{x^2} dx = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x} + C$ .

188.  $\frac{x^2}{2} \ln(4+x^4) - x^2 + 2 \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} + C$ .

12. Határozatlan integrál

$$189. \int \frac{x^2 dx}{(x^3 - 5)^2 - 16} = -\frac{1}{3 \cdot 4^2} \int \frac{1}{1 - \left(\frac{x^3 - 5}{4}\right)^2} \cdot 3x^2 dx \text{ átalakítással}$$

$$\text{az eredmény: } \begin{cases} -\frac{1}{12} \operatorname{arth} \frac{x^3 - 5}{4} + C, & \text{ha } 1 < x < 3\sqrt{3} \\ -\frac{1}{12} \operatorname{arcth} \frac{x^3 - 5}{4} + C, & \text{ha } x < 1, \text{ vagy } x > 3\sqrt{3}. \end{cases}$$

$$190. \frac{1}{4} \ln(x^4 - x^2 + 2) + \frac{1}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{7}} + C.$$

$$191. \frac{2}{9} \ln\left(x - \frac{2}{3}\right) + \frac{5}{27} \cdot \frac{1}{x - \frac{2}{3}} + C. \quad 192. \frac{3}{2} \ln(x^2 + 4x + 8) - 4 \operatorname{arctg} \frac{x + 2}{2} + C.$$

$$193. \text{A nevezőt másodfokú tényezőkre bontjuk: } 1 + x^4 = 1 + 2x^2 + x^4 - 2x^2 = (1 + x^2)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (1 + x^2 + \sqrt{2}x)(1 + x^2 - \sqrt{2}x).$$

$$\text{Tehát } \frac{1}{1 + x^4} = \frac{Ax + B}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}, \text{ azaz}$$

$$1 = (Ax + B)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + (Cx + D)(x^2 + \sqrt{2}x + 1), \text{ amiből}$$

$$1 = (A + C)x^3 + (-\sqrt{2}A + B + \sqrt{2}C + D)x^2 + (A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D)x + B + D.$$

A megfelelő együtthatók összehasonlításából:

$$A + C = 0$$

$$-\sqrt{2}A + B + \sqrt{2}C + D = 0$$

$$A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D = 0$$

$$B + D = 1.$$

$$\text{Ezekből } B = D = \frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, A = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left( \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \left( \frac{2x + \sqrt{2} + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{2x - \sqrt{2} - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{4} \int \left( \frac{1}{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{(\sqrt{2}x + 1)^2 + 1} + \frac{1}{(\sqrt{2}x - 1)^2 + 1} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ \ln \sqrt{\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}} + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x + 1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x - 1) \right] + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \ln \sqrt{\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}x}{1 - x^2} \right) + C.$$

$$194. 2\sqrt{7} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{7}} + C.$$

## 12. Határozatlan integrál

195.  $-\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arth} \frac{x^2-1}{\sqrt{2}} + C$ , ha  $\sqrt{1-\sqrt{2}} < x < \sqrt{1+\sqrt{2}}$ , és  
 $-\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arcth} \frac{x^2-1}{\sqrt{2}} + C$ , ha  $x < -\sqrt{1-\sqrt{2}}$ , vagy  $x > \sqrt{1+\sqrt{2}}$ .
196. Az  $\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos x}$  felbontással parciális integrálást végezve, majd a még integrálandó tag számlálójában  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$  átalakítást alkalmazva a kiszámítandó  $I$  határozatlan integrálra az  $I = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - I + \int \frac{dx}{\cos x}$  egyenletet kapjuk, amiből  

$$I = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right) + C.$$
197.  $-\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$
198.  $-\frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh} x} - \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| + C.$
199.  $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\cos^2 x} dx =$   
 $= \operatorname{tg} x + \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$
200.  $-\operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + C.$
201.  $\operatorname{tg}^3 x dx = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} x dx = \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \operatorname{tg} x dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln |\cos x| + C.$
202.  $\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx = \int \frac{1}{\sin 2x} dx + \int \frac{\operatorname{tg} x}{2 \sin x \cos x} dx = \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} x| + \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + C.$
203.  $\frac{1}{2} \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} x + C.$
204.  $\operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x - x + C.$
205.  $u = \operatorname{tg} x$  helyettesítéssel  

$$\int \frac{u^3}{1+u^2} du = \int \left( u^3 - u + \frac{u}{u^2+1} \right) du = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln |\cos x| + C.$$
206.  $\operatorname{tg} x - \frac{3}{2} x + \frac{\sin 2x}{4} + C.$
207.  $\frac{1}{8} \left( \frac{5}{2} x + 2 \sin 2x + \frac{3}{8} \sin 4x - \frac{1}{6} \sin^3 2x \right) + C.$
208. Az  $u' = x$  és  $v = (\operatorname{arctg} x)^2$  választással  $\int x(\operatorname{arctg} x)^2 dx = \frac{x^2}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 -$   
 $-\int \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arctg} x dx = \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$  (Lásd a 11.103/a és /b feladatokat.)
209.  $a^x \left( \frac{x^2}{\ln a} - \frac{2x}{\ln^2 a} + \frac{2}{\ln^3 a} \right) + C.$
210.  $\operatorname{ch} x + \frac{2}{\operatorname{ch} x} - \frac{1}{3 \operatorname{ch}^3 x} + C.$

12. Határozatlan integrál

211.  $t = \operatorname{th} \frac{x}{2}$  helyettesítéssel az eredmény:  $\frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{arth} \frac{a \operatorname{th} \frac{x}{2} - b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

212. A kiszámítandó integrált  $I$ -vel jelölve

$$I = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{(a + b \operatorname{sh} x)^2} dx = -\frac{1}{b^2} \int b \operatorname{ch} x \frac{-b \operatorname{ch} x}{(a + b \operatorname{sh} x)^2} dx - \frac{1}{b^2} \int \frac{b^2 \operatorname{sh}^2 x}{(a + b \operatorname{sh} x)^2} dx.$$

Parciálisan integrálva a  $g = b \operatorname{ch} x$  és  $f' = \frac{-b \operatorname{ch} x}{(a + b \operatorname{sh} x)^2}$  választással

$$I = -\frac{1}{b^2} \left[ \frac{b \operatorname{ch} x}{a + b \operatorname{sh} x} - \int \frac{a}{a + b \operatorname{sh} x} dx \right] - \frac{a^2}{b^2} I,$$

$$I = -\frac{1}{a^2 + b^2} \left[ \frac{b \operatorname{ch} x}{a + b \operatorname{sh} x} - \int \frac{a}{a + b \operatorname{sh} x} dx \right] + C.$$

Az utóbbi integrál kiszámításához lásd az előző feladatot.

213.  $\frac{1}{2}x (\sin \ln x - \cos \ln x) + C$ .

214.  $\operatorname{arsh} x - \operatorname{arch} x + C$ .

215.  $|a| = |b|$  esetén az integrál  $\int \frac{\sin x \cos x}{|a|} dx = \frac{1}{2|a|} \sin^2 x + C$ .

$|a| \neq |b|$  esetben viszont  $(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)' = 2(a^2 - b^2) \sin x \cos x$ .

Ekkor az eredmény:  $\frac{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}{a^2 - b^2} + C$ .

216.  $\sqrt{3} \cos x = \operatorname{sh} u$ -t véve  $I = -\sqrt{3} [-\operatorname{cth} \operatorname{arsh}(\sqrt{3} \cos x) + \operatorname{arsh}(\sqrt{3} \cos x)] + C$ .

217.  $I = \int \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} \sqrt{1 + \cos^4 x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^4 x} \sqrt{1 + \cos^4 x} dx$ .

Legyen  $\cos^2 x = \operatorname{sh} u$ , ekkor  $-2 \cos x \sin x dx = \operatorname{ch} u du$ , és

$$I = \int \frac{-\operatorname{ch}^2 u}{\operatorname{sh}^2 u} du = -\int \frac{1 + \operatorname{sh}^2 u}{\operatorname{sh}^2 u} du = \operatorname{cth} u - u + C = \frac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} u} - u + C = \frac{\sqrt{1 + \cos^4 x}}{\cos^2 x} - \operatorname{arsh} \cos^2 x + C.$$

218. Átalakításokkal  $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{1}{4}(1 + 3 \cos^2 2x)$ .

$$I = \int \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \frac{1}{2} \sqrt{1 + 3 \cos^2 2x} dx. \text{ Legyen } \sqrt{3} \cos 2x = \operatorname{sh} u, \text{ akkor}$$

$$I = -\frac{1}{16\sqrt{3}} [\operatorname{arsh}(\sqrt{3} \cos 2x) + \sqrt{3} \cos 2x \sqrt{1 + 3 \cos^2 2x}].$$

219.  $I = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{(a + b \cos x)^2} dx =$

$$= \frac{1}{b^2} \int b \sin x \frac{b \sin x}{(a + b \cos x)^2} dx + \frac{1}{b^2} \int \frac{b^2 \cos^2 x}{(a + b \cos x)^2} dx.$$

Parciálisan integrálva a  $g = b \sin x$  és  $f' = \frac{b \sin x}{(a + b \cos x)^2}$  választással

$$I = \frac{1}{b^2} \frac{b \sin x}{a + b \cos x} - \frac{1}{b^2} \int \frac{a}{a + b \cos x} dx + \frac{a^2}{b^2} I.$$



### 13. Határozott integrál

22.  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b} + 1) = 1.$

23. Nem konvergens. 24.  $\frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2} \right).$

25. Nem konvergens. 26.  $-\frac{1}{2}.$

27. 1, (mert  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{e^x} = 0.$ ) 28. Nem konvergens.

29.  $\frac{1}{\ln 2}.$

30. A  $\sin x - \cos x$  korlátossága miatt  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}(\sin x - \cos x) = 0$ . Ezért az improprius integrál értéke:  $\frac{1}{2}.$

31. 2. 32.  $\frac{1}{4}.$

33.  $\int_0^b \ln x dx = \lim_{a \rightarrow +0} [x \ln x - x]_a^b = b \ln b - b - \lim_{a \rightarrow +0} (a \ln a - a).$

Mivel  $\lim_{a \rightarrow +0} a \ln a = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{\ln a}{1/a} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1/a}{-1/a^2} = 0$ , ezért  $b \ln b - b = 0$ , amiből a keresett  $b$ -re  $b = e$ .

34.  $32 \left( 1 - \frac{1}{\ln 4} \right) + \frac{15}{\ln^2 4}.$  35.  $\frac{\pi}{2}.$  36.  $\frac{\pi}{\sqrt{6}}.$

37. Nem konvergens. 38. Nem konvergens. 39. 2.

40.  $\frac{\pi}{4}.$  41. 6.

42.

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{|x-2||x-3|}} &= \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(2-x)(3-x)}} + \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(3-x)}} + \\ &+ \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-3)}} = -\ln(3-2\sqrt{2}) + \pi + \ln(2\sqrt{2}+3) = \ln(12\sqrt{2}+17) + \pi \approx \\ &\approx 6.667. \end{aligned}$$

43. Divergens, mivel a  $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx$  (és a  $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ ) integrál divergens.

44.

$$p > 1: \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^a = \frac{1}{p-1}$$

$$p < 1: \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^a = \infty$$

$$p = 1: \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} [\ln x]_1^a = \infty.$$

45. Az előző feladathoz hasonlóan.



### 13. Határozott integrál

46. A keresett  $T$  terület:  $T = \int_0^3 \frac{dx}{2x+4} = \frac{1}{2} [\ln(2x+4)]_0^3 = \ln \frac{\sqrt{10}}{2}$ .

47.  $\frac{59}{6}$ .

48. A függvény grafikonja az  $[1, \sqrt[3]{3})$  intervallumon az  $x$  tengely alatt, a  $(\sqrt[3]{3}, 2]$  intervallumon az  $x$  tengely felett halad. Ezért a keresett  $T$  terület:

$$T = - \int_1^{\sqrt[3]{3}} (x^3 - 3) dx + \int_{\sqrt[3]{3}}^2 (x^3 - 3) dx = \frac{1}{4} (18\sqrt[3]{3} - 19).$$

49. A függvény a  $[0, 1)$  intervallumon az  $x$  tengely alatt, az  $(1, 2]$  intervallumon az  $x$  tengely felett halad. Ezért a keresett  $T$  terület:

$$T = - \int_0^1 \operatorname{sh}(x-1) dx + \int_1^2 \operatorname{sh}(x-1) dx = 2(\operatorname{ch} 1 - 1).$$

50.  $\frac{163}{15}$ .

51.  $\frac{2+4\sqrt{2}}{3}$ .

52.  $\frac{\pi}{4}$ .

53.  $\frac{46}{9}$ .

54. A függvény grafikonja a  $[0, 2)$  intervallumon az  $x$  tengely felett, a  $(2, 4]$  intervallumon az  $x$  tengely alatt halad. Ezért a keresett  $T$  terület:  $T =$

$$\int_0^2 (1 - 3^{x-2}) dx - \int_2^4 (1 - 3^{x-2}) dx = \left[ x - \frac{3^{x-2}}{\ln 3} \right]_0^2 - \left[ x - \frac{3^{x-2}}{\ln 3} \right]_2^4 = \frac{64}{9 \ln 3}.$$

55. A függvény grafikonja az  $[1, 2)$  intervallumon az  $x$  tengely alatt, a  $(2, e]$  intervallumon az  $x$  tengely felett halad. A keresett  $T$  terület:

$$T = - \int_1^2 \ln \frac{x}{2} dx + \int_2^e \ln \frac{x}{2} dx = 3 - (e+1) \ln 2.$$

56.  $\frac{52}{3}$ .

57.  $\frac{8}{5}$ .

58. 20.

59.  $\frac{1}{20}$ .

60. Legyen  $1 - x = \cos^3 t$ ;  $\frac{dx}{dt} = 3 \cos^2 t \sin t$ .

$$\text{Ha } x = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3, \text{ akkor } \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}, t = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Ha } x = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3, \text{ akkor } \cos t = \frac{1}{2}, t = \frac{\pi}{3}.$$

$$T = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(1 - [1 - \cos^2 t]^{3/2}\right) 3 \cos^2 t \sin t dt = \int_{\pi/6}^{\pi/3} (1 - \sin^3 t) 3 \cos^2 t \sin t dt =$$

$$\left[ -\cos^3 t - \frac{3}{16} \left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right) + \frac{\sin^3 2t}{16} \right]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{21\sqrt{3} - 8}{64} - \frac{\pi}{32}.$$

61.  $T = \int_1^4 \lg \frac{4}{x} dx - \int_4^6 \ln \frac{4}{x} dx = \lg \frac{6^6 \cdot e}{4^7}$ .

62. 2.

63.  $\frac{1}{2} \operatorname{sh} 6$ .

64.  $\frac{(5e-1)^2}{5e(1+\ln 5)}$ .

### 13. Határozott integrál

65. Az  $y = 2x^2 - 1$  egyenletű parabola és az  $x$ -tengely metszéspontjai  $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ ,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \text{ így } T = \left| \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (2x^2 - 1) dx \right| = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

66.  $T = \int_0^{1+\sqrt{2}} \left(x + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{6}(5 + 4\sqrt{2}).$

67.  $T = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1 - 2x^2) dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$

68.  $T = \int_{1/3}^4 \left(\frac{13}{3} - x - \frac{4}{3x}\right) dx = \frac{143}{18} - \frac{4}{3} \ln 12.$

69. Szimmetria miatt (l. az ábrát)

$$T = 2 \cdot \int_1^{\sqrt{2}} (3x^2 - 2 - x^4) dx + 2 \cdot \int_0^1 (x^4 - 3x^2 + 2) dx = \frac{24 - 8\sqrt{2}}{5}.$$

70.  $T = 2 \int_0^2 \left(\frac{8}{x^2 + 4} - \frac{x^2}{4}\right) dx = 2\left(\pi - \frac{2}{3}\right).$

71.  $T = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \frac{4}{3}.$

72.  $T = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{2}\right) dx + \int_1^2 \left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{2}.$

73.  $T = \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) dx = \frac{4}{3}.$

74.  $T = \int_0^1 (1 - x - (1 - 2\sqrt{x} + x)) dx = \frac{1}{3}.$

75. Az  $y^2 = x + 3$  egyenletű parabola az  $x$  tengelyre szimmetrikus és azt a  $(-3, 0)$  pontban metszi. A feladatbeli két görbe metszéspontjai:  $(-2, -1)$  és  $(6, 3)$ . Ezért:

$$T = 2 \cdot \int_{-3}^{-2} \sqrt{x+3} dx + \int_{-2}^6 \left(\sqrt{x+3} - \frac{x}{2}\right) dx.$$

Egyszerűbb a terület kiszámítása, ha az  $x$ -t tekintjük  $y$  függvényének. Ekkor

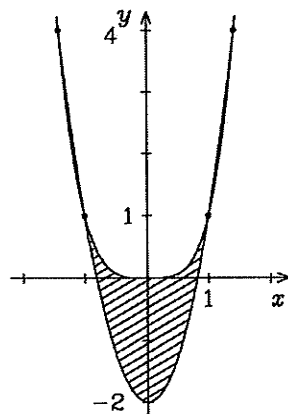
$$T = \int_{-1}^3 (2y - (y^2 - 3)) dy = \frac{32}{3}.$$

76. Egyszerűbb az  $y$  tengely és a görbék közötti területek különbségét kiszámítani:  $T = 2 \int_0^4 (2\sqrt{y} - \sqrt{y}) dy = \frac{32}{3}.$

77. Egyszerűbb a számítás, ha az  $y$  tengely és a görbék közötti területek különbségét vesszük:  $T = \int_{-2}^2 \left(\frac{3}{4}y^2 + 1 - y^2\right) dy = \frac{8}{3}.$

78. Az  $x$ -et tekintjük  $y$  függvényének. A  $\sqrt{y} = 2 - y$  egyenletből  $y = 1$ .

$$T = \int_0^1 ((2 - y) - \sqrt[3]{y}) dy = \frac{3}{4}.$$



### 13. Határozott integrál

79.  $T = \int_{-a}^a 2\sqrt{a^2 - x^2} dx = 4 \int_0^a a\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx$ . Legyen  $\frac{x}{a} = \sin t$ ; ekkor  $t_1 = 0$ ,  
 $t_2 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$  és  $T = 4 \int_{t_1}^{t_2} a\sqrt{1 - \sin^2 t} a \cos t dt = 4a^2 \int_{t_1}^{t_2} \cos^2 t dt = a^2\pi$ .

80.  $T = \int_a^a 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$ .  $\frac{x}{a} = \sin t$  helyettesítéssel  $T = 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = ab\pi$ .

81. Az integrálás közben  $\frac{x}{4} = \sin t$  helyettesítést alkalmazva

$$T = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left(-2 + \sqrt{4^2 - x^2}\right) dx = 2 \int_0^{2\sqrt{3}} \left(-2 + 4\sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}\right) dx =$$

$$2 \left[-2x + 8 \arcsin \frac{x}{4} + 2 \cdot x \sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}\right]_0^{2\sqrt{3}} = \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}.$$

82. A két kör metszéspontjainak koordinátái:  $x_1 = -\sqrt{3}$ ,  $x_2 = \sqrt{3}$ . Ezért a keresett terület  $x$ -tengely feletti része:

$$T_1 = 2 \int_0^{\sqrt{3}} (2 - \sqrt{4 - x^2}) dx + 2 \int_{\sqrt{3}}^2 \sqrt{4 - x^2} dx =$$

$$= 4 \left[ x - \arcsin \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} \right]_0^{\sqrt{3}} + 4 \left[ \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} \right]_{\sqrt{3}}^2 =$$

$$= 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}.$$

A keresett  $T$  terület az  $x$ -tengely alatti félkör területének és  $T_1$ -nek összege:

$$T = 2\pi - \frac{2\pi}{3} + 2\sqrt{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}.$$

83.  $T = \int_0^1 (3x^{1/3} - 3x^{2/3}) dx = \frac{9}{20}$ .

84.  $T = \int_0^{\pi/2} (x - \sin x) dx = \left[ \frac{x^2}{2} + \cos x \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$ .

85.  $T = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x - (4x^2 - \pi^2)) dx = 2 + \frac{2}{3}\pi^3$ .

86.  $3 - e$ . 87.  $T = \int_0^4 xe^x dx = 3e^4 + 1$ .

88.  $T = \int_0^2 (16x - x \cdot 4^x) dx = 32 \left(1 - \frac{1}{\ln 4}\right) + \frac{15}{\ln^2 4}$ .

89.  $\frac{9}{\ln 4}$ . 90.  $T = \frac{6}{\ln 4}$ .

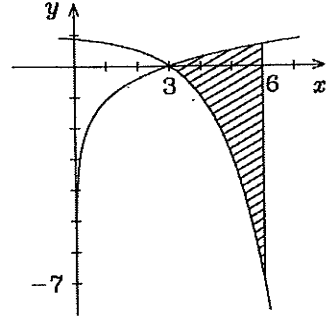
91. A görbék metszéspontja:  $x = 1$ , így:

$$T = \int_0^1 (5^{1-x} + 2 - 3^x) dx = 2 - \frac{2}{\ln 3} + \frac{4}{\ln 5}.$$

13. Határozott integrál

92. A görbék metszéspontja  $x = 3$  (l. ábra):

$$T = \int_3^6 \left( \ln \frac{x}{3} - (1 - 2^{x-3}) \right) dx = \\ = \frac{7}{\ln 2} + 6(\ln 2 - 1).$$



93.  $2(e^2 + 1)$ .

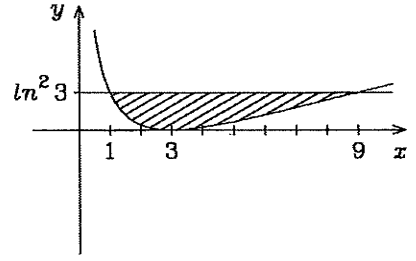
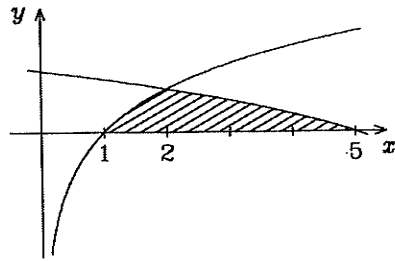
94.  $4(\ln 4 - 1)$ .

95.  $T = \int_1^3 \ln x dx + \int_3^9 \left( \ln x - 2 \ln \frac{x}{3} \right) dx = 4$ .

96.  $3 - e$ . (L. 12. 98.)

97. A metszéspontok az  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 5$  helyeknél vannak.

$$T = \int_1^2 \ln x dx + \int_2^5 \ln \frac{8-x}{3} dx = 4(\ln 4 - 1).$$



98. A metszéspontok az  $x_1 = 1, x_2 = 9$  helyeknél vannak.

$$T = \int_1^9 \left( \ln^2 3 - \ln^2 \frac{x}{3} \right) dx = 20 \ln 3 - 16. \text{ Lásd a fenti jobboldali ábrát.}$$

99.  $\dot{x} = a(1 - \cos t), T = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 dt = 3a^2\pi$ .

100.  $\frac{1}{6}$ .

101.  $a^2\pi$ .

102.  $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ .

103.  $\frac{3ab\pi}{32}$ , l. 12.24.

104.  $-a^2\pi(\pi^2 - 12)/48$ .

105.  $\dot{x} = 3 \cos^2 t \sin t, T = \int_{\pi/6}^{\pi/3} (1 - \sin^3 t) 3 \cos^2 t \sin t dt = \frac{21\sqrt{3} - 8 - 2\pi}{64}$ .

106.  $a^2(15\sqrt{3}/8 - 1 - \pi)$ .

107.  $\pi - \frac{\pi^2}{4}$ .

108.  $2a^2\pi$ .

109.  $T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 d\varphi = a^2\pi$ .

110.  $\left(\frac{r_1^2}{2a}\right)^2, (r_1 = r(\varphi_1))$ .

111.  $\frac{a(a - r_1)}{2}, (r_1 = r(\varphi_1))$ .

112.  $\frac{a^2\pi}{16}$ .

13. Határozott integrál

113.  $\frac{a^2}{4}$

114.  $\frac{\pi}{2} \left( \frac{a^2}{2} + b^2 \right)$ .

115. A 12.157. szerint  $T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left(1 + \frac{1}{2} \cos \varphi\right)^2} =$  (l. 11.157)

$$-\frac{1/2}{1^2 - (1/2)^2} \left[ \frac{\frac{1}{2} \sin \varphi}{1 + \frac{1}{2} \cos \varphi} - \frac{2}{\sqrt{1^2 - (1/2)^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}} \right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}}.$$

116.  $T = \frac{1}{2} \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{(1 + \cos \varphi)^2} d\varphi = \frac{1}{8} \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^4 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{4} \left[ \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\varphi}{2} \right]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} =$

$$\frac{1}{3}(5 + 4\sqrt{2}).$$

117.  $\frac{4a^2}{3}$ .

118.  $\frac{r_1^2 - a^2}{4b}$ , ( $r_1 = r(\varphi_1)$ ).

119.  $t = \operatorname{tg}(\varphi)$ -re  $T = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = 2ab \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi \right) \right]_0^{\pi/2} =$

$$ab\pi.$$

120.  $3a^2\pi$ .

121.  $T = \frac{1}{6}$ .

122.  $a^2\pi$ .

123.  $\dot{x} = a(1 - \cos t)$ ,  $\dot{y} = a \sin t$ ,  $x\dot{y} - \dot{x}y = a^2(t \sin t - 2 + 2 \cos t)$ , amiről kimutatható, hogy mindenütt nempozitív.  $T = 3a^2\pi$ .

124.  $\frac{2}{3}$ .

125.  $T = \frac{\sqrt{2}}{3}$ .

126. A vizsgált intervallumban  $x$ ,  $\dot{x}$  és  $y$  pozitív,  $\dot{y}$  negatív.

$$x\dot{y} - \dot{x}y = -3 \sin^2 t \cos t - 3 \cos^2 t \sin t + \frac{3}{8}(1 - \cos 4t).$$

$$T = \left| \frac{1}{2} \left[ -\sin^3 t + \cos^3 t + \frac{3}{8} \left( t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \right]_{\pi/6}^{\pi/3} \right| = \frac{21\sqrt{3} - 8 - 2\pi}{64}.$$

127.  $\frac{8}{3\sqrt{3}}$ .

128.  $T = t_1$ .

129.  $\frac{7}{6}$ .

130.  $2 \ln a$ .

131.  $\frac{3}{2} \cdot \frac{a-1}{\sqrt{a}}$ .

132.  $\frac{3}{2} \left( a - \frac{1}{a} \right)$ .

133. Ebben az esetben a szektor megegyezik az ugyanehhez a függvényhez és intervallumhoz tartozó görbevonalú trapézszal. Területe:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( x^{1/3} (1 - x^{1/3})^2 + (1 - x^{1/3})^3 \right) dx \text{ vagy } T = \int_0^1 (1 - x^{1/3})^3 dx;$$

$$t = x^{1/3} \text{ helyettesítés után: } T = \frac{1}{20}.$$

134.  $1/12$ .

135.  $\frac{e-2}{2}$ .

136.  $\frac{e}{2} + \ln 16 - 4$ .

137.  $T = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (4 \cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi) d\varphi = \frac{3\pi}{16} + \frac{3}{8}$ .

### 13. Határozott integrál

$$138. T = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \left( 4 \cos \varphi - \frac{1}{\cos \varphi} \right)^2 d\varphi = \frac{5}{2}.$$

$$139. T = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/8} \operatorname{tg}^2 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/8} \frac{1 - \cos^2 2\varphi}{\cos^2 2\varphi} d\varphi = \frac{1}{2} \left[ \frac{\operatorname{tg} 2\varphi}{2} - \varphi \right]_0^{\pi/8} = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{16}.$$

$$140. T = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (e^{2\varphi} - \varphi^2) d\varphi = \frac{1}{12} (3e^{2\pi} - 2\pi^3 - 3).$$

$$141. T = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (e^{2\varphi} - e^{\varphi}) d\varphi = \frac{1}{4} (e^{2\pi} - 2e^{\pi} + 1).$$

$$142. T = \frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left( 4^2 - \frac{4}{\cos^2 \varphi} \right) d\varphi = \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}.$$

$$143. \text{Szimmetria miatt } T = 2 \cdot \frac{1}{2} \left( \int_0^{\pi/3} \frac{4d\varphi}{\cos^2 \varphi} + \int_{\pi/3}^{\pi/2} 4^2 d\varphi \right) = 4\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}.$$

$$144. \text{A két kör metszéspontjai a } 2 = 4 \sin \varphi \text{ egyenletből: } \varphi_1 = \frac{\pi}{6}, \varphi_2 = \frac{5\pi}{6}.$$

$$T = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (16 \sin^2 \varphi - 2^2) d\varphi = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}.$$

$$145. \text{Az ívhosszúságot } s \text{-sel jelölve: } s = \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2} dx = \sqrt{2} + \operatorname{arsh} 1 = \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}).$$

$$146. s = \operatorname{arsh} 1 + \sqrt{2} = \ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}.$$

$$147. \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1). \quad 148. \frac{p}{2} \operatorname{arsh} \frac{a}{p} + \frac{a}{2} \sqrt{1 + \frac{a^2}{p^2}}.$$

$$149. \text{A } [0, a] \text{ intervallumon } x \geq 0 \text{ és } x - 3a < 0. \text{ Így a } [0, a) \text{ intervallumhoz tartozó, } x \text{ tengely alatti görbéen } y = \frac{x - 3a}{3} \sqrt{\frac{x}{a}}; \text{ ebből } s = \int_0^a \frac{x+a}{2\sqrt{ax}} dx = \frac{4}{3}a.$$

$$150. \text{Két ilyen ív van a görbén; az alábbi számítás mind a kettőre érvényes. Implicit függvényként differenciálva: } \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = 0, \text{ ebből}$$

$$y'^2 = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}. \text{ Másrészt az eredeti egyenletből: } \left(\frac{y}{x}\right)^{2/3} = \left(\frac{a}{x}\right)^{2/3} - 1, \text{ tehát}$$

$$y'^2 = \left(\frac{a}{x}\right)^{2/3} - 1. \quad s = \int_0^a \left(\frac{a}{x}\right)^{1/3} dx = \sqrt[3]{a} \int_0^a \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \sqrt[3]{a} \left[ \frac{3}{2} x^{2/3} \right]_0^a = \frac{3}{2}a.$$

$$151. s = 1 - \operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 2 = 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

$$152. s = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \ln 3.$$

$$153. \ln \sqrt{3}.$$

$$154. \ln \sqrt{3}.$$

$$155. \frac{a(a+2)}{2}.$$

156. Polárkoordinátáson:

$$(1) \quad r^2 = y^2 + x^2 = \frac{2ax^2}{2a-x},$$

### 13. Határozott integrál

amiből  $x = r \cos \varphi$  helyettesítéssel és az így kapott egyenlet megoldásával:

$$(2) \quad r = \frac{2a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi};$$

$$r^2 + \dot{r}^2 = 4a^2 \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^4 \varphi} (1 + 3 \cos^2 \varphi);$$

$\int \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\varphi = 2a \int \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi} d\varphi$ . (Ez utóbbi integrál kiszámításához lásd a 12.213. feladatot). A határok polárkoordinátáiban: Ha  $x = 0$ , akkor (1)-ből  $r = 0$ , és így (2)-ből  $\varphi = 0$ ; ha  $x = \frac{5}{3}a$ , akkor (1)-ből  $r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 5a$ ,

és így  $x = r \cos \varphi$ -ből  $\frac{5}{3}a = \sqrt{\frac{2}{3}} 5a \cos \varphi$ ,  $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}$ . Ezeket felhasználva

$$s = -2\sqrt{3}a \left[ -\operatorname{cth} \operatorname{arsh}(\sqrt{3} \cos \varphi) + \operatorname{arsh}(\sqrt{3} \cos \varphi) \right]_0^{\arccos \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}} = 2a \left( 1 + \sqrt{3} \ln \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right).$$

157.  $s = \operatorname{arsh} \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = \ln(\sqrt{3} + 2) + 2\sqrt{3}$ .

158.  $\frac{5}{2}$ . 159.  $\frac{1}{27} \left( \sqrt{(4 + 9t_1^2)^3} - 8 \right)$ .

160.  $\frac{1}{2} \left( \operatorname{arsh} t_1 + t_1 \sqrt{1 + t_1^2} \right)$ .

161.  $\dot{x} = -\sin t$ ,  $\dot{y} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cos 2t$ ,

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \sin^2 t + \frac{1}{8} \cos^2 2t = \frac{1 - \cos 2t + \frac{1}{4} \cos^2 2t}{2} = \frac{\left(1 - \frac{1}{2} \cos 2t\right)^2}{2}$$

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \cos 2t\right) dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ t - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi\sqrt{2}.$$

162.  $8a$ .

163.  $2a\pi^2$ .

164.  $\dot{x} = -5a \cos^4 t \sin t$ ,  $\dot{y} = 5a \sin^4 t \cos t$ .

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 25a^2 \sin^2 t \cos^2 t (\cos^6 t + \sin^6 t)$ . Kiszámítjuk a (zárt) görbe hosszának negyedét, vagyis a  $[0, \frac{\pi}{2}]$ -n integrálunk, és azt négyszer vesszük.

$$s = 4 \cdot 5a \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t \sqrt{\cos^6 t + \sin^6 t} dt. \quad (1. 12.215.)$$

$$s = -\frac{4 \cdot 5a}{16\sqrt{3}} \left[ \operatorname{arsh}(\sqrt{3} \cos 2t) + \sqrt{3} \cos 2t \sqrt{1 + 3 \cos^2 2t} \right]_0^{\pi/2} = \frac{5a}{2\sqrt{3}} (\operatorname{arsh} \sqrt{3} + 2\sqrt{3}) = 5a \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln(2 + \sqrt{3}) \right).$$

165.  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \cos^2 t (1 + 16 \sin^2 t)$ .  $s = \int_0^{\pi/2} \cos t \sqrt{1 + 16 \sin^2 t} dt$ . Legyen

$$4 \sin t = \operatorname{sh} u, \text{ akkor } s = \frac{1}{4} \int \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 u} \operatorname{ch} u du = \frac{1}{8} \ln(4 + \sqrt{17}) + \frac{1}{2} \sqrt{17}.$$

### 13. Határozott integrál

$$166. \sqrt{2} (e^{\pi/2} - 1).$$

$$167. a \ln \frac{a}{y_1}, \text{ ahol } y_1 = y(t_1).$$

$$168. s = \operatorname{arsh} 1 = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

$$169. s = 2 \operatorname{arth} \frac{1}{\sqrt{3}} = \ln(2 + \sqrt{3}).$$

$$170. \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \frac{9}{4} \operatorname{sh}^2 2t \operatorname{ch} 2t; s = \frac{1}{2} [(\operatorname{ch} 2t_1)^{3/2} - 1].$$

$$171. \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{ch} t\right)^2. s = \ln a + \frac{a^2 - 1}{4a}.$$

$$172. \frac{\sqrt{2}}{2} [\operatorname{arch} t_1^2 - \operatorname{arch} t_2^2]; \text{ az integrált helyettesítéssel számíthatjuk ki.}$$

$$173. \operatorname{sh}^2 t_1.$$

$$174. \dot{r} = 0, r^2 + \dot{r}^2 = a^2. s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2} d\varphi = a[\varphi]_0^{2\pi} = 2a\pi.$$

$$175. \frac{a}{2} \left( \varphi_1 \sqrt{1 + \varphi_1^2} + \operatorname{arsh} \varphi_1 \right).$$

$$176. a \left( \sqrt{2} - \frac{\sqrt{\varphi_1^2 + 1}}{\varphi_1} + \ln \frac{\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1^2 + 1}}{1 + \sqrt{2}} \right).$$

$$177. 2a.$$

$$178. 8\sqrt{3}.$$

$$179. 8.$$

$$180. r^2 + \dot{r}^2 = \frac{a^2}{\cos^6 \frac{\varphi}{2}}. \text{ Mivel } \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right| + C, \text{ (lásd a plt.}$$

$$12.193. \text{ feladatot), } s = a \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos^3 \frac{\varphi}{2}} = a \left[ \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} + \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right]_0^{\pi/4} =$$

$$a \left( \sqrt{2} + \ln \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} \right) = a(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})).$$

$$181. p \left( \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right).$$

$$182. \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}).$$

$$183. 8a \sin \frac{\varphi_1}{2}.$$

$$184. \frac{3a\pi}{2}.$$

$$185. \text{ Átalakításokkal } r^2 + \dot{r}^2 = a^2 \frac{\operatorname{ch}^2 \varphi}{(1 + \operatorname{ch} \varphi)^2}; t = \operatorname{th} \frac{\varphi}{2} \text{ helyettesítéssel} \\ s = a(2\pi - \operatorname{th} \pi).$$

$$186. a(\varphi_1 - r_1), \text{ ahol } r_1 = r(\varphi_1).$$

$$187. \frac{8a}{3}.$$

$$188. \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} (e^{a\varphi_1} - 1).$$

$$189. \frac{16}{3}\pi.$$

$$190. 12\pi.$$

$$191. \frac{3\pi^2}{8}.$$

$$192. \frac{\pi}{2} (2 + \operatorname{sh} 2).$$

$$193. \frac{\pi}{2}.$$

$$194. \pi(3 \ln^2 3 - 6 \ln 3 + 4).$$

$$195. \frac{\pi}{4}.$$

$$196. \frac{4a^3\pi}{3}.$$

$$197. \frac{4a^3\pi}{3}.$$



### 13. Határozott integrál

$$198. V = 2\pi \int_0^1 (1-x^2)^2 dx = \frac{16}{15}\pi. \quad 199. V = \pi \int_{-1}^1 (1-x^{2/3})^3 dx = \frac{32\pi}{105}.$$

$$200. \frac{4ab^2\pi}{3}.$$

$$201. \frac{\pi}{6} (\sqrt{125} - 1).$$

$$202. A \text{ kiszámítandó felszint } A\text{-val jelölve } A = 2\pi \int_0^\pi \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx.$$

$A \cos x = \operatorname{sh} u$  helyettesítéssel

$$\int \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = -\frac{1}{2} \left[ u + \frac{\operatorname{sh} 2u}{2} \right] + C; \text{ így}$$

$$A = -\pi \left[ \operatorname{arsh} \cos x + \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} \right]_0^\pi = \pi (2\sqrt{2} + 2 \ln(1 + \sqrt{2})).$$

$$203. A = 2\pi \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^4 x}} dx = \pi \left[ \frac{\sqrt{1 + \cos^4 x}}{\cos^2 x} - \operatorname{arsh} \cos^2 x \right]_0^{\pi/4} =$$

$$\pi(\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{5}}). \text{ (Az integrál kiszámításához lásd az 12.214. feladatot.)}$$

$$204. a^2\pi(2 + \operatorname{sh} 2).$$

$$205. y\sqrt{1+y'^2} = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}, \text{ (az } y' \text{ legegyszerűbben az eredeti egyenlet mindkét oldalának differenciálásával számítható ki). Legyen } x = a \cos^3 u.$$

$$A = 6\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 u \cos u du = 6a^2\pi \left[ \frac{\sin^5 u}{5} \right]_0^{\pi/2} = \frac{6a^2\pi}{5}.$$

$$206. 4a^2\pi.$$

$$207. y\sqrt{1+y'^2} = b\sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon x}{a}\right)^2}, \text{ ahol } \varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

$$A = 2b \cdot 2\pi \int_0^a \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon x}{a}\right)^2} dx. \text{ Legyen } \frac{\varepsilon x}{a} = \sin u.$$

$$A = \frac{4ab\pi}{\varepsilon} \int_{u_1}^{u_2} \cos^2 u du = \frac{2ab\pi}{\varepsilon} \left[ u + \sin u \sqrt{1 - \sin^2 u} \right]_{u_1}^{u_2} =$$

$$= \frac{2ab\pi}{\varepsilon} \left[ \arcsin \frac{\varepsilon x}{a} + \frac{\varepsilon x}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon x}{a}\right)^2} \right]_0^a = 2b\pi \left( \frac{a}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon + b \right).$$

$$208. A = 2\pi \int_{-2}^2 (\operatorname{ch} 2 - \operatorname{ch} x) \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = \pi \operatorname{sh} 4 - 4\pi.$$

$$209. A = 2\pi \int_{-1}^1 (1-x^2) \sqrt{1+(2x)^2} dx.$$

$$2x = \operatorname{sh} u \text{ helyettesítéssel } A = \frac{\pi}{16} (17 \operatorname{arsh} 2 + 14\sqrt{5}).$$

$$210. 4a^2\pi.$$

$$211. A = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t \cdot 3a \sin t \cos t dt = \frac{6a^2\pi}{5}.$$

### 13. Határozott integrál

$$212. A = 2\pi \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)\sqrt{2 - 2\cos t} dt = \frac{64a^2\pi}{3}.$$

$$213. y\sqrt{x^2 + y^2} = 4\sqrt{2}a^2(1 - \cos t)^{3/2} \sin t.$$

$$A = 2\pi \cdot 4\sqrt{2}a^2 \cdot \int_0^\pi (1 - \cos t)^{3/2} \sin t dt = \frac{128a^2\pi}{5}.$$

$$214. \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2e^{2t}, \quad A = 2\sqrt{2}\pi \int_0^{\pi/2} e^{2t} \cos t dt = \frac{2\sqrt{2}\pi}{5} \left[ e^{2t}(\sin t + 2\cos t) \right]_0^{\pi/2} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{5} (e^\pi - 2).$$

$$215. M_x = \frac{1}{14}, \quad M_y = \frac{1}{5}, \quad T = \frac{1}{4}, \quad x_s = \frac{4}{5}, \quad y_s = \frac{2}{7}.$$

$$216. M_x = \frac{3}{8}, \quad M_y = 3, \quad T = \ln 4, \quad x_s = \frac{3}{\ln 4} = 2,16; \quad y_s = \frac{3}{8 \ln 4} = 0,27.$$

$$217. M_x = \frac{13}{81}, \quad M_y = \ln 3, \quad T = \frac{2}{3}, \quad x_s = \frac{3 \ln 3}{2} = 1,65, \quad y_s = \frac{13}{54} = 0,24.$$

$$218. M_x = \frac{2a^3}{3}, \quad M_y = 0, \quad T = \frac{a^2\pi}{2}, \quad x_s = 0, \quad y_s = \frac{4a}{3\pi}.$$

$$219. M_x = \frac{2ab^2}{3}, \quad M_y = 0, \quad T = \frac{ab\pi}{2}, \quad x_s = 0, \quad y_s = \frac{4b}{3\pi}.$$

$$220. M_x = \frac{2a^3}{3}, \quad M_y = 0, \quad T = \frac{a^2\pi}{2}, \quad x_s = 0, \quad y_s = \frac{4a}{3\pi}.$$

$$221. M_x = \frac{2ab^2}{3}, \quad M_y = 0, \quad T = \frac{ab\pi}{2}, \quad x_s = 0, \quad y_s = \frac{4b}{3\pi}.$$

$$222. M_x = \frac{5}{2}a^3\pi, \quad M_y = 3a^3\pi^2, \quad T = 3a^2\pi, \quad x_s = a\pi, \quad y_s = \frac{5a}{6}.$$

(A  $T$ -re nézve l. a 99. feladatot.)

$$223. M_x = \frac{8a^3}{105}, \quad M_y = \frac{8a^3}{105}, \quad T = \frac{3a^2\pi}{32}, \quad x_s = y_s = \frac{256a}{315\pi}.$$

(A  $T$ -re nézve lásd a 103. feladatot.)

$$224. M_x = \frac{a^3}{3}, \quad M_y = \frac{a^3}{3}, \quad T = \frac{a^2\pi}{4}, \quad x_s = \frac{4a}{3\pi}, \quad y_s = \frac{4a}{3\pi}.$$

$$225. M_x = \frac{a^3}{3}(\pi^3 - 6\pi), \quad M_y = a^3(4 - \pi^2), \quad T = \frac{a^2\pi^3}{6}, \quad x_s = \frac{6a}{\pi^3}(4 - \pi^2),$$

$$y_s = \frac{2a}{\pi^3}(\pi^3 - 6\pi).$$

$$226. M_x = \frac{32a^3}{3}, \quad M_y = 5a^3\pi, \quad T = 3a^2\pi, \quad x_s = \frac{5a}{3}, \quad y_s = \frac{32a}{9\pi}.$$

(A  $T$ -re nézve l. a 120. feladatot.)

$$227. M_x = \frac{a^3}{30}(e^{3\pi} + 1), \quad M_y = -\frac{a^3}{10}(e^{2\pi} + 1), \quad T = \frac{a^2e^{2\pi}}{4},$$

$$x_s = -\frac{2a}{5e^{2\pi}}(e^{3\pi} + 1), \quad y_s = \frac{2a}{15e^{2\pi}}(e^{3\pi} + 1).$$

(A  $T$ -re nézve l. a 114. feladatot.)

### 13. Határozott integrál

---

	Téglalap- módszer	Trapéz- módszer	Parabola- módszer		Téglalap- módszer	Trapéz- módszer	Parabola- módszer
217.	1,23239;	1,22613;	1,23530.	218.	3,22023;	3,28326;	3,23961;
219.	36,6024;	34,7768;	35,6757.	220.	10,64646;	10,52355;	10,61165;
221.	44,5073;	44,2467;	44,4089.	222.	0,84459;	0,82999;	0,83682;
223.	1,08884;	1,19949;	1,08943.	224.	2,57979;	2,60902;	2,59083;
225.	0,94830;	0,94579;	0,94802.	226.	0,98560;	0,98517;	0,98546;
227.	0,91608;	0,91573;	0,91597.	228.	17,3843;	17,2277;	17,3222;
229.	5,40258;	5,40257;	5,40258.	230.	1,22939;	1,22905;	1,22927;
231.	0,69266;	0,69412;	0,69315.	232.	1,46746;	1,46746;	1,46746;
233.	0,83587;	0,83521;	0,83565.				



### ***Kedves Jegyzetfelhasználó!***

A jó jegyzet nagyon hatékony segítség a tanulásban. A legjobb jegyzeteket pedig még aktív mérnökként is használni lehet. Egyetemi tanulmányai alatt valószínűleg különböző színvonalú jegyzetekkel találkozott eddig, és fog találkozni ezután. ***Kérjük, hogy ennek a kérdőívnek a kitöltésével segítse alábbi törekvéseinket:***

- ennek a jegyzetnek a következő kiadásában kevesebb sajtóhiba legyen és indokolt esetben készüljön el az átdolgozott kiadása,
- a jegyzeteket értékelni lehessen, amelynek eredményeként a legjobb jegyzetek szerzői díjazást kaphatnak.

Kérjük, hogy a kiküldött kérdőívet a Jegyzetbolt bejárata (V2 földszint) mellett elhelyezett gyűjtőládába dobja be.

Fáradozását köszöni az *Egyetemi Jegyzetbizottság*.

---

A jegyzet címe: **MATEMATIKAI FELADATGYŰJTEMÉNY I.**

A jegyzet szerzői: **Babcsányi - Gyurmánczi - Szabó - Wettl**

A jegyzet azonosítója: **075001**

Melyik tárgyhoz használta a jegyzetet:

Kar:

Félév:

Tárgy neve:

A jegyzet hány százalékát tudta használni (pl. 75%):

A jegyzet a tárgy anyagának hány százalékát fedte le (pl. 50%):

A jegyzet minősítése:

(0: használhatatlan, 1: nagyon rossz, 2: rossz, 3: tűrhető, 4: jó, 5: nagyon jó)

Javaslat átdolgozásra:

A megtalált sajtóhibák:

(A túloldalon folytatható)





