A matematika alapjai, 9. előadás

András Kornai

BMETE91AM35 2022-23 Őszi félév

Óraterv

- ZH megb.
- Peano axiómák, igazság, folyt.

Igazság

- Kétféle igazságfogalom van: szintaktikai és szemantikai
- Jelben $\vdash$ '-ből következik' or -ből levezethető' ahol $A \vdash B$ azt jelenti B formálisan levezethető (bizonyítható) A-ból. Pl. a legtöbb rendszerben $x = 3 \wedge y = x \vdash y = 3$, és van egyfajta *bizonyításelmélet* (proof theory) ami képes erre. Ebben csak képleteket manipulálunk: meglevő képletekből újakat vezetünk le mechanikusan
- Van továbbá a $\models$ 'modellálja' reláció ahol $A \models B$ azt jelenti, hogy minden modellben ahol A teljesül ott B is igaz. Ehhez *modellelemélet* kell ami megmondja, hogy mi a viszony egy elmélet (formulahalmaz) és struktúrált halmazok (modellek) közt
- Jól megcsinált rendszerekben $A \vdash B$ -ből következik $A \models B$

Peano axiómák

- $1 \in \mathbb{N}$
- $' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injektív leképezés
- $\nexists x \in \mathbb{N} : x' = 1$
- $(P \subset \mathbb{N} \wedge 1 \in P \wedge (x \in P \Rightarrow x' \in P) \Rightarrow P = \mathbb{N}$ (teljes indukció axiómája, másodrendű megfogalmazásban)

Összeadás, szorzás rekurzív definíciója

- $x + 1 = 1 + x = x'$
- $(x + y)' = x + y' = x' + y$
- Ennek alapján $+$ mindenütt definiált $\mathbb{N}$-ben, a szokásos tulajdonságoknak örvend
- Szorzás hasonlóan:
  $x * 1 = 1 * x = x; x * (y') = x * y + x; x' * y = X * y + y$
- Ennek alapján * mindenütt definiált $\mathbb{N}$-ben, a szokásos tulajdonságoknak örvend (disztributivitás is teljesül)

A természetes számoktól az egészekig

- Képezzünk (x, y) rendezett párokat $\mathbb{N}$ elemeiből
- $(x, y) \equiv (z, w) \Leftrightarrow x + w = y + z$
- Az ekvivalenciaosztályok egy-egyértelműen megfeleltethetők az egész számoknak
- A műveletek kiterjeszthetők, de most már van 0 (az $[(x, x)]$ osztály, és lettek negatív számok is