A matematika alapjai, 4. előadás

Kornai András

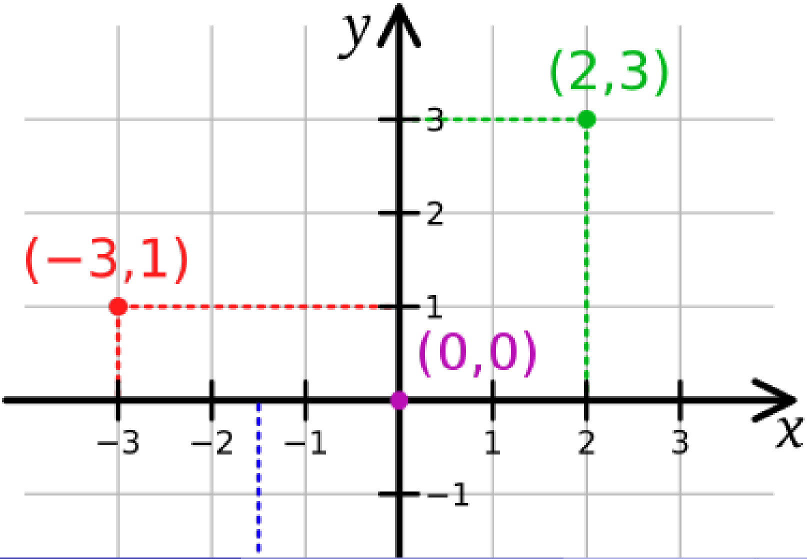
BMETE91AM35 2021-22 Őszi Félév

Formai dolgok

- A negyedik (így számozzuk) HF lesz ma (a negyedik előadáson) feladva
- Elég a pdf fájlt csatolni (most már minden latexben kell)
- A fájlnév HFNN_NEPTUN
- A Subject: MATALAP
- Szókoz, magyar karakterek *nélküli* fájlnevek

Goo

Descartes-szorzat: az eszme



Hogy kell az eszmét implementálni?

- *Rendezett párok* kellenek, amikre $(1,2) \neq (2,1)$
- Az első megközelítés (Haussdorf 1914): beszámozni a koordinátákat, (x,y)-t mint $\{\{x,1\},\{y,2\}\}$ tekintjük. Ez nehézkesebb, amikor x,y maguk is számok, és előfeltételezi a számok koncepcióját!
- A standard megközelítés (Kuratowski 1921): $(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{x\},\{x,y\}\}$
- Vannak változatai, de nem sok újdonságot hoznak
- A Descartes avagy *direkt* szorzat $A \times B$ tetszőleges A és B halmazokra mint $\{(a,b)|a \in A, b \in B\}$ van definiálva
- Hogy csinálunk ezekből n-eseket?
- Ebből jön ki egy csomó hasznos definíció, *reláció, függvény, művelet*

Megvannak az alapok, elkezdjük építeni a házat

- Igazából még csak az alapok fele van meg, a halmazelmélet, még hiányzik a matematikai logika, de azért belevágunk
- **Relációk** Egy (bináris) reláció R X (értelnezési) tartománnyal (domain) és Y képtérrel (codomain) $X \times Y$ egy olyan részhalmaza, melyre $\forall a \in X \exists b \in Y : (a, b) \in R$, és megfordítva, minden ami reláció X tartománnyal és Y képtérrel az ilyen
- A legfontosabb relációk az **egyenlőség** $=$; a **hasonlóság** $\sim$; és a **rendezés** $>$ or $\geq$
- A halmazelméleten belül csak két relációt tekintünk primitívnek: ezek az $\in$ (eleme) és az $=$ (egyenlő)
- E kettőt a ZFC1 köti össze
- Más a képtér és az értékkészlet!

Relációk

- A természetes nyelvben rengeteg példa: *x y-t okozza; x-nek van (birtokában) y; x (egyfajta) y ...*
- Az un. logikai mondattan minden igét az alany és a tárgy közti relációnak tekint: *x szereti y-t* úgy írjuk, hogy xLy vagy L(x,y)
- A komplexebb igékhez ternáris vagy magasabb aritású relációkra van szükség (*Ad(x,y-nak,z-t); Bérel(x,y-tól,z-t,t időre,p összegért)*)
- A kulcsötlet: egy rendezett hármas felfogható *bal asszociációval* mint ((a,b),c) vagy *jobb asszociációval* mint (a,(b,c))
- Kuratowski kódolásban: $\{\{\{a\}\{ab\}\}\{\{\{a\}\{ab\}\}\{\{a\}\{ab\}\}\{c\}\}\}$ or $\{\{a\}\{\{a\}\{\{b\}\{bc\}\}\}\}$
- HW4.1 Definiáljuk mikor nevezzük e két kódolást izomorfnak, és bizonyítsuk be, hogy ezek azok

A BINÁRIS RELÁCIÓK FŐBB TULAJDONSÁGAI

- Minden $R \subset (X \times Y)$ relációhoz elkészíthetjük a *megfordításukat* amit R^T-vel fogunk helölni, és a *komplementumukat*, amit R^C-vel vagy $\bar{R}$-sal
- Ez nem ugyanaz a két dolog! Az egyenlőségre $=^T$ is $=$ de $=^C \neq$ lesz
- HW4.2 Írjunk képleteket R^T-re és R^C-re!
- Egy reláció **reflexív** csakkor $\forall a \in X : aRa$
- Egy reláció is **irreflexív** csakkor $\nexists a \in X : aRa$
- Egy reláció is **szimmetrikus** csakkor $\forall ab : aRb \Rightarrow bRa$
- Egy reláció is **antiszimmetrikus** csakkor $\forall ab : aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$
- Egy reláció is **tranzitív** csakkor $\forall abc : aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$
- A relációk halmazok, lehet nézni az uniójukat, metszerüket, és komplementumukat (az $X \times Y$ univerzumban)
- A relációk kompozíciója is definiálható, ha a típusok összeíllenek: $R \subset X \times Y, S \subset Y \times Z$. Azt mondjuk, hogy

Major types of binary relations

1. Relations that enjoy the reflexive, symmetrical, and transitive properties are called **equivalence relations**
2. Relations that are reflexive, antisymmetric, and transitive are called **ordering relations**
3. Equivalence relations are covered in Chapter 9 of CPZ
4. They are closely related to partitions: every e.r. corresponds to a partition
5. We discuss CPZ 9.1-3 in class
6. HW4.3 is CPZ9.4
7. Divisibility (CPZ9.6). $a|b \Leftrightarrow b/a \in \mathbb{N}$
8. We do this now for natural numbers $\{1, 2, \ldots\}$, but it extends smoothly to integers $\mathbb{Z}$
9. HW4.4– is CPZ9.8,10,12,14,16,18,20,22