A matematika alapjai, 3. előadás

Kornai András

BMETE91AM35 2022-23 Őszi Félév

Mi létezik valójában?

- Talán ez a filozófia legnehezebb kérdése
- Léteznek háromszögek? Hogyan? Találunk háromszögeket a természetben?
- Léteznek a foci szabályai? Hogyan? Megtalálhatóak a természetben?
- Fogadjuk el, hogy a *tárgyak* (fák, házak) valóban léteznek! [Sokan nem fogadják ezt el, ld. https://en.wikipedia.org/wiki/Phenomenalism]
- A foci szabályai olyanok mint a házak, a természetben nem találhatóak, az emberek hozzák létre őket
- A matematika olyan mint a foci: játék. Szórakoztató, és hasznos is (HF: írjuk le, miért hasznos a foci, ha ugyan hasznos egyáltalán)
- A matematikusok elfogadják a halmazok létezését

Hogy léteznek a halmazok?

- Úgy, hogy elfogadjuk a ZF(C) axiómákat
- Megengedhetnénk éppenséggel más létezőket is, pl. számokat, háromszögeket, függvényeket ...
- De nem kell! Ha egyszer a halmazokat feltételezzük, a többi már ingyen van
- Mennyit kell axiomatikusan megkövetelni? Kezdjük az üres halmazzal
- Be tudjuk bizonyítani az $\emptyset$ létezését?
- Az olcsó trükk: legyen ez axióma

Az üres halmaz

- $\exists x \forall y \neg(y \in x)$
- Lehet hogy több is van belőle? Lehet hogy ez hülye kérdés?
- Nem, mert a legtöbb ember egyetért, hogy a kerek háromszögek és a rózsaszín elefántok halmaza egyaránt üres, de ezek mégsem ugyanazok a halmazok!
- De a halmazelméletben csak egy üres halmaz lehet. Miért?
- Tegyük fel, hogy u és v üres halmazok. Mit mond az 1. axióma?
- Ha tehát létezik, akkor egyértelmű. De létezik-e vajon?
- Nézzük meg újra az axiómákat

Még mindig az üres halmaz

- Az $\emptyset$ az egy olyan x ami teljesíti a $\forall y \neg (y \in x)$ feltételt.
- De ez a $\forall y \neg (y \in x)$ egy *tulajdonság*, és a 3. Axióma (részhalmaz) garantálja, hogy ha ϕ egy tulajdonság p paraméterrel, akkor minden X halmazra létezik egy olyan Y részhalmaz ami pontosan azokat az elemeit tartalmazza X-nek amik a ϕ tulajdonságnak örvendenek
- Ha tehát létezik egy halmaz, bármilyen halmaz, mondjuk X, akkor abból ZFC3 segítségével meg tudjuk konmstruálni az üres halmazt!
- De mi van, ha semmilyen halmaz nem létezik? (A) Menj haza, tanulj valami mást (B) Ismerd el, hogy legalább *valamilyen* halmazok léteznek!
- Voltak nagyon komoly kisérletek arra, hogy ellentmondást találjanak a ZFC-ben, de eddig mindegyik kudarcot vallott. Ezért azt gondoljuk, hogy a ZFC megfelelően megbízható alapja a matematikának

Még egy szót az üres halmazról

- Vannak másfajta halmazelméletek, mert vannak másfajta axiómarendszerek. A ZF C nélkül más, mint a ZF C-vel. Sokat tanulmányozott axiómarendszerek a von Neumann-Gödel-Bernays (NGB), Morse-Kelley (MK), és Kripke-Patek – lehet, hogy mi is beszélünk majd ezekről egy kicsit. Vannak nagyon izgalmas rendszerek mint Aczel-é, amiben a ZFC8-at az AFA (Anti-Foundation Axiom) helyettesíti.
- Nézzük meg még egy kicsit alaposabban a ZFC-t. Ki tudjuk hozni máshogy is? Hát persze, ott van ZFC6, mit mond ki?
- Előszöris garantálja egy bizonyos végtelen halmaz létezését
- De ennél többet tesz, eleve garantáljha az $\emptyset$ létezését is!
- Attól függően, hogy milyen axiómarendszert használunk, vagy (A) axiomatikusan garantáljuk az üres halmaz létezését vagy (B) bizonyítjuk azt más axiómákból
- Lehetséges (C), valahogy megélni $\emptyset$ nélkül. Lehet, de nagyon kényelmetlen, ahogy az aritmetika is nagyon kényelmetlen volt

Még egyszer a $\cos(20)\cos(40)\cos(80)$-ról

- We will prove the addition formulas $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ and $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
- Wou may have learned the geometric proof for these in high scool: for detailed explanation of these there are videos e.g. on Khan Academy
- These actually require proving lots of lemmas which high-school geometry doesn't really teach rigorously
- We will return to this part of the proof when you have already studied complex numbers, matrix multiplication and isomorphy
- Once these pieces of algebra are at hand, the addition formulas will be trivial, but the pieces (including the Euler and de Moivre formulas) will be super-useful for many other things as well!
- We will need other pieces of algebra, in particular, you will also learn about polynomials and structures before we can complete

Set operations

1. Union, intersection, but no complementation in general – why not?
2. Subscripting, indexing
3. Partitioning
4. Cartesian (also called direct) product
5. Ordered pairs by sets
6. Alternatives to the standard definition
7. Back to direct products

Boolean operations

- When there is a base set (such as the set of integers) everything works!
- We get the de Morgan identities: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ and $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- Complementation is an involution $\overline{\overline{A}} = A$
- $\cup$ and $\cap$ are commutative, associative, idempotent
- Two kinds of distributive laws
- There is a 0 (the empty set) and a 1 (the universe)
- Will be generalized to *lattices* later on

Trouble with negation

- There is no "set of all sets"
- Why not? Because it would not be well founded (doable with AFA, but not with ZFC)
- Because it would give rise to Russel's Paradox: by Comprehension we could form the set of all sets that don't contain themselves!
- Paradox can be avoided by (a) positive comprehension (b) type theory
- Most math is done with (b) – types are built into ZFC
- Strongly related to type checking in programming languages
- You can have the *class* of all sets, and other classes (NGB set theory)

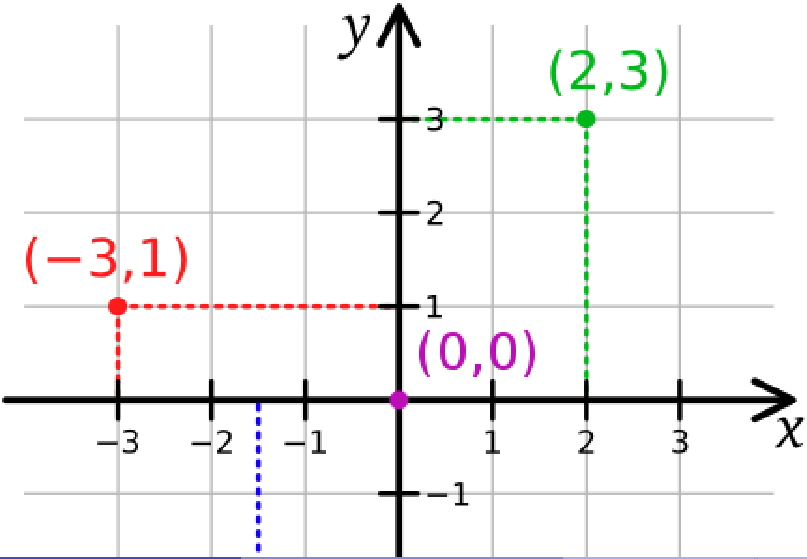
Subscripting, indexing

- The basic idea: instead of $A, B, C, \ldots, Z$ and running out of letters after 26, let's do $A_1, A_2, \ldots, A_{777}$ because we never run out of numbers
- But what if we do? There are things for which we don't have enough numbers, e.g. points in the interval (0,1)
- Let S be a set of indexes, with members α. (Note that α is a *variable* in this usage.) Further, for each member of S let us assume we already have some set A_α. We define $\bigcup_\alpha \mathrm{A}_\alpha$ and $\bigcap_\alpha A_\alpha$ exactly how?
- The special cases: when the index set is empty
- What are variables?
- What are families of sets?

Partitioning

- A *partition* of a set A is a family of sets A_α such that for any $\alpha \neq \beta$ we have $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ and $\bigcup_\alpha \mathrm{A}_\alpha = A$. By definition, we never consider the empty set a part of any partitition, so in the definition we may write "a family of *nonempty* sets"
- The partition can be finite (e.g. the sets of *even* and *odd* numbers partition the set of integers) or infinite
- Partitions are related to *equivalence relations*.
- There are two *trivial* partitions, when all elements are in the same set, and when all go in their own set

Descartes-szorzat: az eszme



HF

- Készíts .tex és .pdf fájlt a ZFC axiómákról a zfcskel.tex alapján akinek nincs kész pótolja
- Oldd meg az 1-9 problémák mindegyikét Chartrand-Polimeni-Zhang 1.1-ből (pp 17–18). Ezt még be lehet adni kézírással (nem papiron, fényképet és emailt kérek) de aki LaTeX-et használ az plusz pontot kap
- Innentől viszont már minden LaTeXkell legyen!