

# A MATEMATIKA ALAPJAI, 2. ELŐADÁS

Kornai András

BMETE91AM35 2022-23 Őszi Félév

# ABOUT THE 0TH TEST

- Az első feladatot sokan jól csinálták, a másodikat senki, a harmadikra is voltak jó megoldások voltak kevesektől
- Informális megoldás, később majd a ZFC-ből fogunk kiindulni és megnézzük hogy jön ki az axiómákból
- A 2. feladatnál a megoldás heurisztikája a nehéz
- Belevágunk a  $\text{\LaTeX}$ elsajátításába, ld `zfcске1.tex` a honlapon.

# ZERMELO-FRAENKEL AXIOMS

1. **Axiom of Extensionality:** If  $X$  and  $Y$  have the same elements, then  $X = Y$ .

$$\forall u (u \in X \equiv u \in Y) \Rightarrow X = Y. \quad (1)$$

2. **Axiom of the Unordered Pair:** For any  $a$  and  $b$  there exists a set  $\{a, b\}$  that contains exactly  $a$  and  $b$ . (also called Axiom of Pairing)

$$\forall a \forall b \exists c \forall x (x \in c \equiv (x = a \vee x = b)). \quad (2)$$

3. **Axiom of Subsets:** If  $\varphi$  is a property (with parameter  $p$ ), then for any  $X$  and  $p$  there exists a set  $Y = \{u \in X : \varphi(u, p)\}$  that contains all those  $u \in X$  that have the property  $\varphi$ . (also called Axiom of Separation or Axiom of Comprehension)

$$\forall X \forall p \exists Y \forall u (u \in Y \equiv (u \in X \wedge \varphi(u, p))). \quad (3)$$

4. **Axiom of the Sum Set:** For any  $X$  there exists a set  $Y = \bigcup X$ , the union of all elements of  $X$ . (also called Axiom of Union)

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \equiv \exists z (z \in X \wedge u \in z)). \quad (4)$$

5. **Axiom of the Power Set:** For any  $X$  there exists a set  $Y = P(X)$ , the set of all subsets of  $X$ .

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \equiv u \subseteq X). \quad (5)$$

6. **Axiom of Infinity:** There exists an infinite set.

$$\exists S [\emptyset \in S \wedge (\forall x \in S) [x \cup \{x\} \in S]]. \quad (6)$$

7. **Axiom of Replacement:** If  $F$  is a function, then for any  $X$  there exists a set  $Y = F[X] = \{F(x) : x \in X\}$ .

$$\begin{aligned} \forall x \forall y \forall z [\varphi(x, y, p) \wedge \varphi(x, z, p) \Rightarrow y = z] \\ \Rightarrow \forall X \exists Y \forall y [y \in Y \equiv (\exists x \in X) \varphi(x, y, p)]. \end{aligned} \quad (7)$$

8. **Axiom of Foundation:** Every nonempty set has an  $\in$ -minimal element. (also called Axiom of Regularity)

$$\forall S [S \neq \emptyset \Rightarrow (\exists x \in S) S \cap x = \emptyset]. \quad (8)$$

9. **Axiom of Choice:** Every family of nonempty sets has a choice function.

$$\forall x \in a \exists A(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x \in a A(x, y(x)). \quad (9)$$

# LATEX BASICS

- Tegyéél latex-et a laptopodra. A <https://www.latex-project.org/get/> lapon lehet választani (TeXLive a Linuxhoz, MacTeX a Machez, vagy MikTeX a Windowshoz).
- Ezekhez van GUI, de a terminál mindenütt elég, ha valaki tudja szövegszerkesztővel (emacs, vi, vim, nano, etc) dolgozni
- write-compile-debug ciklus: megírjuk file.tex-et, a rendszer ezt file.pdf-fé kompilálja, tesztelés, úra.
- Az **első HF** megírni a ZFC-t  $\text{\LaTeX}$ -ben!
- Aki akarja az magyarul csinálja, de angolul érdemes kezdeni
- A honlapról letölthető `zfcskel.tex` jó kiindulópont

# A DOKUMENTUM ALAPSZERKEZETE

```
\documentclass{article}
\usepackage{colortbl}
\author{YOUR NAME}
\title{The ZFC axioms of set theory}
\date{}
\begin{document}
\maketitle

\begin{enumerate}

\item {\color{green} Extensionality} If  $X$  and  $Y$  ...
\begin{equation}
\forall u \dots
\end{equation}

\item {\color{green} Unordered Pair} For any  $a$  and  $b$ 
\begin{equation}
\forall a \forall b
\end{equation}
...

\item {\color{green} Choice} Every family of nonempty sets...
\begin{equation}
\forall x \in a \exists A(x,y) \rightarrow \dots
\end{equation}
\end{enumerate}

\end{document}
```

# MIÉRT HASZNÁL MINDEN MATHEMATIKUS $\text{\LaTeX}$ -ET?

- 1 A képletírás máshogy nehéz,  $\text{\LaTeX}$ -ben könnyű
- 2 A matematikusok túl sok szimbólumot használnak, sokkal könnyebb a nevüket megtanulni, pl. `\forall` és `\exists` a `\forall` és `\exists`, ...
- 3 Forma és tartalom világos különválasztása
- 4 “Tárgnyelv” és “metanyelv” világos különválasztása
- 5 Mindenfélét tud, platformfüggetlenül
- 6 Sokkal szebb tipográfia mint Word-ben vagy máshol
- 7 Az ekosisztéma többi részével jól integrálva (pl. weblapokhoz MathJax)