# A matematika alapjai, 6. előadás és 1. ZH

Kornai András

BMETE91AM35 2021-22 Őszi Félév

# Ezen az órán

- Első félidő (12:15 – 13.00) előadás. Az itt tanultak a mai zárthelyiben még nem szerepelnek
- Második félidő (13:00 – 13:45) ZH. Papíron ceruzával, a végén lefényképezzük, ezt kérem emailben. `kornai@math.bme.hu`
- 24 órán belül LaTeXváltozat is beadható plusz pontokért! (de a 100% enélkül is elérhető)

# Logika

- A matematika alapjai két pilléren nyugszanak, ezek a halmazelmélet és a logika
- A halmazelmélet felépítését már elkezdtük (de lesznek még műveletek és struktúrák) és most a logika jön
- A halmazelméletnek van néhány változata (ZFC, NGB, KP ...), a logikának sokkal több
- Ahhoz hogy egy logikát definiáljuk az alábbi dolgok kellenek:
  1. Valami nyelv, amiben a formulákat le tudjuk írni
  2. Valami igazságfogalom
  3. Valami elképzelés arról, hogy a formulák mit jelentenek ‘modellelmélet’
  4. Valami bizonyítási módszer ‘bizonyításelmélet’
- A nyelvvel kezdjük
- A $\Sigma$ halmazt *ábécének* hívjuk, elemet *betűknek*
- Több betű egymás után rakásával kapjuk a *sztringeket (láncok, füzérek)*

# A formális nyelvelmélet alapjai

- Given an alphabet $\Sigma$, the set of all strings formed from these is denoted $\Sigma^*$. There is a special element $\lambda$ called the *empty string*.
- Length of $\lambda$ is 0, length of $a \in \Sigma$ is 1, length of $\alpha$ denoted $|\alpha|$ satisfies $|\alpha\beta| = |\alpha| + |\beta|$
- The main operation on strings is *concatenation* (writing them is sequence). For example, if $\alpha = abc$ and $\beta = AB$ then $\alpha\beta = abcAB$
- Concatenation is *not* commutative, $\beta\alpha = ABabc \neq \alpha\beta$
- We abbreviate $\alpha\alpha$ as $\alpha^2$, similarly for $\alpha^3$ etc.
- A **language** over the alphabet $\Sigma$ is a subset of $\Sigma^*$
- Since languages are sets, it is meaningful to speak of their union, intersection, and complement (relative to $\Sigma^*$)
- The **product** of languages $R$ and $S$, written $RS$, is $\{\alpha\beta | \alpha \in R, \beta \in S\}$
- The set $\cup_{i=0}^{\infty} R^i$ is written $R^*$ and is called the **Kleene closure** of $R$.

# A FORMÁLIS NYELVEK FŐBB TÍPUSAI

- A legegyszerűbbek azok, ahol explicite felsoroljuk az elemeket pl. $L = \{a, ab, ba, baab\}$
- **Regular** or **rational** languages are built from these using only Boolean and Kleene operations
- The most complex formal languages we can deal with are called **recursively enumerable**. For each of these, there is an algorithm (Turing machine) that halts whenever the string $\alpha \in L$ is where we start the computation
- Difference between recursively enumerable and recursive
- We can *prove* the existence of languages that are not r.e. but we cannot *construct* any!
- Summary: there are actually more complex formal languages than we can deal with