TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK

Tematika

1998 tavasz

I.évf. 13.-18.tk

1. Alapfogalmak (= $\mathbf{R}$–ről $\mathbf{R}^n$–re való általánosítás *röviden*) (2 hét)

$\mathbf{R}^n$ definíciója

$\mathbf{R}^n$ szerkezete: távolság és nagyság $\mathbf{R}^n$–en; (kiszúrt) környezet, torlódási–, izolált–, belső– határpont ; zárt– nyílt, korlátos halmaz. Poligoniális összefüggőség. Intervallum $\mathbf{R}^n$–beli megfelelője. Példák.

Konvergencia $\mathbf{R}^n$–en: konvergens–, divergens–, Cauchy–sorozat, részsorozat. $\mathbf{R}$–beli tételek létező és nem létező analogonjai. Bolzano–Weierstrass tétel $\mathbf{R}^n$–en. Koordinátánkénti konvergencia.

$\mathbf{R}^n$–ből $\mathbf{R}^m$–be képező (vektor)függvények: alapfogalmak, példák. Műveletek függvények körében, összetett függvény, inverz fogalma. Többváltozós függvény fogalma és szemléltetése (kétváltozós: felület, háromváltozós: szintfelület).

Vektorfüggvény határértéke és folytonossága, egyenletes folytonosság, korlátosság. Példák. Alapvető (a valóssal analóg) tulajdonságok (átviteli elv, műveletekre való invariancia), zárt korlátos halmazon folytonos függvények tulajdonságai. Vektorfüggvény folytonos iff koordinátánként az.

2. Példák kétváltozós függvények határértékére és folytonosságára (2 hét)

0) Konstansok és a koordinátafüggvények folytonosak; ezekből és elemi függvényekből alapműveletekkel és összetett függvény képzéssel kapott függvények folytonosak.

1) Alapesetek:

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\,, \qquad f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$

b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}\,, \qquad f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$

2) Polárkoordinátás helyettesítés:

a) alapesetek:

$f(x,y) = \dfrac{x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,, \qquad f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

b) polárral nehezen megoldható

b1) homogén fokszámú nevező

$f(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^4} \quad$ (**MO**. $f(x,y) = \dfrac{|y|}{(\frac{x}{y})^2+(\frac{y}{x})^2} \le |y| \quad$)

b2) nem homogén fokszámú nevező

b2.1) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^4+y^2} \quad$ (**MO**. $\left|\dfrac{xy^2}{x^4+y^2}\right| \le \left|\dfrac{xy^2}{y^2}\right| = |x| \xrightarrow[x\longrightarrow 0]{} 0 \quad$)

b2.2) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} \quad$ (**MO.** $\nexists \lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)$, mert $f(x,0) = 0 \xrightarrow[x\longrightarrow 0]{} 0$,
$f(x,x^2) = \dfrac{x^2x^2}{x^4+(x^2)^2} = \dfrac{x^4}{x^4+x^4} = \dfrac{1}{2} \xrightarrow[x\longrightarrow 0]{} \dfrac{1}{2} \quad$).

3) Nem pozitív nevező $f(x,y) = \dfrac{xy}{x-y} \quad$ (**MO**. $f(x, x+e^{-1/x}) \xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(0,0)]{} -\infty\,. \quad$)

4) Ismételt limes ($\lim\limits_{x\longrightarrow a}\lim\limits_{y\longrightarrow b} f(x,y)$) és limes: $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}\,, \qquad f(x,y) = x\sin\dfrac{1}{y}\,.$

3. Deriválhatóság (2 hét)

Vektorfüggvény deriváltoperátora: $\dfrac{f(x+h)-f(x)-\mathbf{D}h}{|h|} \xrightarrow[h\longrightarrow 0]{} 0$. Speciális esetek: gradiens, deriváltvektor definíciói. Illusztráló példák. A valóssal analóg alapvető tulajdonságok. Vektorfüggvény differenciálható iff koordinátánként az. A Jacobi mátrix.

Többváltozós függvények deriválása. Gradiens és parciális derivált összefüggése. Szint(equipotenciális) felületek. Geometriai szemléltetés (lásd 1. Melléklet). Folytonos deriválhatóság.

Többváltozós függvények deriválására vonatkozó elemi tételek: láncszabály, középértéktétel, Young tétel. Differenciál.

4. Példák kétváltozós függvények deriválhatóságának vizsgálatára (1 hét)

0) Konstansok és a koordinátafüggvények deriválhatóak: ezekből és elemi függvényekből alapműveletekkel és összetett függvény képzéssel kapott függvények deriválhatóak. Deriváltak kiszámítása.

1) Az alábbi f_n függvényosztály folytonosságának, deriválhatóságának, folytonosan deriválhatóságának vizsgálata:

$f_n(x,y) = \dfrac{x^n y}{x^2+y^2}$ ha $x^2+y^2 \neq 0$ és $f(0,0)=0$ ($n = 0,1,2,\dots$)

2) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ parciálisai léteznek az origóban: $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 1$, de f mégsem deriválható itt

3) Példa olyan függvényre, mely deriválható az origóban $f'(0,0) = (0,0)$, de parciálisai nem folytonosak:

$f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)\cdot \sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ ha $x^2+y^2 \neq 0$ és $f(0,0)=0$

5. Derivált alkalmazásai (3 hét)

Iránymenti derivált fogalma, kiszámítása, a parciális deriváltakkal és a gradienssel való kapcsolata, geometriai jelentése (lásd 2. Melléklet).

Lokális– és tartományi szélsérték. Létezésükre vonatkozó szükséges illetve elégséges feltételek. Nyeregpont. Illusztráló példák.

Az inverzfüggvény tétel mint az egyváltozós függvények inverzének létezésére vonatkozó tétel többdimenziós általánosítása (lásd 3. Melléklet). Példa.

Implicitfüggvény probléma. Példák, melyek esetén a lokális problémának nincs megoldása vagy több folytonos megoldása van (lásd 4. Melléklet). Az implicitfüggvény tétel kétváltozós esetben és fennállásának szemléletes magyarázata (lásd 5. Melléklet). Példák.

6. Többváltozós függvények integrálása (3 hét)

Jordan mérhetőség és terület, tulajdonságaik. A mérhetőségre vonatkozó alapvető kritérium, példa mérhető és nem mérhető halmazra.

Területi integrál. Definíció, tulajdonságok, integrálhatóság elégséges feltételei. Az egyváltozós esettel való analógia. Példa mérhető halmazon nem integrálható függvényre, integrál definíció alapján való meghatározására. Kettős integrál kiszámítása: kétszeres integrál, példák. Integrálási sorrend megváltoztatása. Példa. Gyakorló feladatok.

Területi integrál helyettesítéssel, integráltranszformáció. A fontosabb transzformációk: polár– és módostott polártranszformációk (elliptikus és hiperbólikus) és az $(xy, x/y)$ transzformáció. Példák. Gyakorló feladatok.

Jordan térfogat és térfogati integrál. Példák térfogati integrálra, az n–dimenziós tetraéder térfogata (lásd 6. Melléklet). Fontosabb térkoordinátatranszformációk: gömbi koordináták és módosításaik, példák, a négydimenziós gömb térfogata (lásd 7. Melléklet). Gyakorló feladatok.