Integrálhatóság $\mathbb{R}^n$-en

Lényegében teljesen analóg az egyváltozós esettel, azzal a különbséggel, amivel már találkoztunk, hogy a nagyon egyszerű szerkezetű intervallum helyett többváltozóban a nagyon egyszerű halmazokat sokkal általánosabbak, ezeket is valahogyan jellemezni kell.

Alapgondolat. Mi kell az integrál fogalmához ?

f korlátos $A \subseteq R^n$-en, $P = \{A_i\}$ A egy felosztása,

$$s(P) = \sum \min_{i \in A_i} f(x) \cdot t(A_i)\,, \quad S(P) = \sum \max_{i \in A_i} f(x) \cdot t(A_i).$$

$$I \mathrel{\hat{=}} \sup_P s(P) = \inf_P S(P).$$

Integrálható ha ez fennáll. (Integrálközelítő összegekkel analóg.)

Mi az, amit $\mathbb{R}^n$-en még nem definiáltunk ? Hát a felosztáselemek *területe:* $t(A_i)$.

De hát azt már lényegében láttuk egydimenzióban (félig-meddig) a függvény alatti területnél is visszavezettük a már ismert területfogalomra (azzal közelítettük).

1. Terület

Definíció ($A \subseteq R^2$ **területe**, térfogat és magasabb dimenzió teljesen analóg)

Négyszögekkel lefedjük: ezek területösszege a **külső terület**, diszjunk négyszögeket írunk bele: ezek területösszege a **belső terület**, ha nem tartalmaz négyszöget, akkor a belső terület 0, és ha a két terület megegyezik, akkor az A **(Jordan)-mérhető** és területe a két megegyező terület.

Példa: nem mérhető a 0 és 1 közé eső racionális koordinátájú pontok halmaza, mert a külső terület 1, a belső 0.

Állítás (A gyakorlatilag fontos kritérium)

Ha A korlátos és határa véges sok $y = f(x)$, $x \in I$ vagy $x = g(y)$, $y \in J$, ($I, J \in \mathbb{R}$ intervallumok) folytonos görbe egyesítése, akkor A mérhető.

Példa E/14.9

2. Integrál fogalma

Ezek után az integrál definíciójának útjában már semmi sem áll: tavalyi definícióban intervallum helyett zárt, mérhető halmazt kell mondani. Valóban, ekkor a felosztás analógonja triviális: határuktól eltekintve diszjunkt mérhető halmazok rendszere, melyek uniója az adott halmaz és persze a tavalyi definícióban $x_{i+1} - x_i$-t kell kicserélni $t(A_i)$-vel és egy H halmaz **átmérője** persze $d(H) = \sup_{x,y \in H} |x - y|$, amivel egy felosztás fimonsága $\mu(P) = \max_i d(A_i)$. Ezek után minden automatikus: E/15.1-3.

Állítás

Intervallum helyett zárt, mérhető halmazra vonatkozóan az integrál minden tulajdonsága, az integrálhatóságra vonatkozo minden tétel érvényben marad (és a bizonyítás is lényegében analóg):

(i) Integrálható függvény 0 mértékű halmazon vett integrálja 0, az egység integrálja a terület

(ii) Integról lineáris homogén, additív halmazfüggvény, monoton, háromszögegyenlőtlenség, szélsőértékekkel való becslés.
(iii) (a) Mérhető zárt halmazon folytonos függvény integrálható.
(b) Mérhető zárt halmazon korlátos és 0 mértékű halmaz kivételével folytonos függvény integrélható

3. Integrál kiszámítása

Definíció (Normáltartomány)

Állítás
Minden normáltartomány korlátos, zárt és mérhető.

Állítás (Kettős integrál kiszámítása)
Normáltartományon integrálható függvény kettős integrálja átalakátható kétszeres integrállá (E/16.5): Ha $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\}$, akkor

$$\iint_A h(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} h(x,y)\,dy\,dx$$

Másik tengely szerinti eset persze analóg.

Példák E/16.7-13.

4. Integrál kiszámítása helyettesítéssel: integráltranszformáció

(a) Egyváltozós eset:

$g : I \to \mathbb{R},\ f \in R(g^*I), \exists g', g^{-1}$: $\displaystyle\int_{g^*I} f(x)\,dx \underset{\downarrow}{=} \int_I f(g(y)) \cdot g'(y)\,dy$

$\boxed{x = g(y),\ dx = g'(y)dy}$

Pl. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx \underset{\downarrow}{=} \int_1^e \frac{1}{1+y}\,dy = \ln|1+y|\Big|_1^e = \ln\frac{1+e}{2}$.

$\boxed{\begin{array}{l} e^x = y \rightsquigarrow x = \ln y \rightsquigarrow dx = 1/y \cdot dy, \\ x = 0 \rightsquigarrow y = 1,\ x = 1 \rightsquigarrow y = e \end{array}}$

(b) Kétváltozós eset:
$g : A \to \mathbb{R}^2,\ f \in R(g^*A), \exists g, g^{-1}$, A mérhető :

$$\iint_{g^*A} f(x,y)\,dx\,dy \underset{\downarrow}{=} \iint_A f(g_1(u,v), g_2(u,v)) \cdot |\det \overset{\substack{\textit{Jacobi determináns} \\ \uparrow}}{g'(u,v)}|\,du\,dv$$

$\boxed{(x,y) = (g_1(u,v), g_2(u,v))}$

Pl. Legyen K az origóközepű R sugarú körlapnak az első síknegyedbe eső része.

$$\iint_K xy\,dx\,dy \underset{\downarrow}{=} \int_0^R \int_0^{\pi/2} r\cos\varphi\, r\sin\varphi \cdot r\ d\varphi\,dr = \int_0^R \int_0^{\pi/2} \frac{r^3}{2} \sin 2\varphi\,d\varphi\,dr =$$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Polárkoordináták: } x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi\ \ (r \ge 0, 0 \le \varphi \le 2\pi) \rightsquigarrow \\ \rightsquigarrow g'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r\cos\varphi}{\partial r} & \frac{\partial r\cos\varphi}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial r\sin\varphi}{\partial r} & \frac{\partial r\sin\varphi}{\partial\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det g'(r,\varphi) = r \end{array}}$

$$= -\int_0^R \frac{r^3}{4} \cos 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} dr = -\int_0^R \frac{r^3}{4}(-1-1)\, dr = \int_0^R \frac{r^3}{2} dr = \frac{r^4}{8}\Big|_0^R = \frac{R^4}{8}\,.$$

Házi feladat Számítsuk ki ugyanezt az integrált a második, harmadik és negyedik körnegyedre is és értelmezzük az eredményt!

Példák E/17.15, Körkerület egy pontjából két egymással 30° szöget bezáró húr által közbezárt idom területe.

5. Térfogati integrál

Az $n > 2$ dimenziós mérhetőség és (térfogati, hármas, négyes stb.) integrál fogalma, tulajdonságai és kiszámítśa teljesen analóg a területi integrállal (négyszög $\rightsquigarrow$ n dimenziós tégla (minden koordináta egy adott számpár két eleme közé esik, azaz n darab zárt korlátos intervallum direkt szorzata), görbe $\rightsquigarrow$ $n-1$ dimenziós hiperfelület stb.). Lásd E/18.1-6.

Példák E/18.7, 18.13.

6. Térfogati integrál transzformációja

(a) Hengerkoordináták (térbeli polárkoordináták):

$\boldsymbol{x = r\cos\varphi}$, $\boldsymbol{x = r\sin\varphi}$, $\boldsymbol{z = z}$, $\boldsymbol{r \geq 0}$, $\boldsymbol{0 \leq \varphi \leq 2\pi}$, a Jacobi determináns: $\boldsymbol{r}$.

Példa Számítsa ki az $x^2 + y^2 = 4$ egyenletű henger azon darabjának térfogatát, mely az $x + y + z = 8$ és a $z = 0$ síkok közé esik!

MO. Legyen K a henger alapkörlapja. Hengerkoordinátákkal:

$$V = \iint_K \left(\int_0^{8-x-y} dz\right) dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{8-r\cos\varphi - r\sin\varphi} r\, dz\, dr\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (8 - r\cos\varphi - r\sin\varphi) r\, dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (8r - r^2\cos\varphi - r^2\sin\varphi)\, dr\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} 4r^2 - \left(\frac{r^3}{3}\cos\varphi + \frac{r^3}{3}\sin\varphi\right)\Bigg|_0^2 d\varphi = 16\varphi - \frac{8}{3}\underbrace{(\sin\varphi - \cos\varphi)\Big|_0^{2\pi}}_{0} = 32\pi\,,$$

ami egyebként persze a 8 magas henger térfogata, mert ennek ugyanakkora darabja van a $z = 8$ sík felett, mint alatt.

(b) Gömbi koordináták

$\boldsymbol{x = r\sin\vartheta\cos\varphi}$, $\boldsymbol{x = r\sin\vartheta\sin\varphi}$, $\boldsymbol{z = r\cos\vartheta}$, $\boldsymbol{r \geq 0}$, $\boldsymbol{0 \leq \varphi \leq 2\pi}$, $\boldsymbol{0 \leq \vartheta \leq \pi}$, a Jacobi determináns: $\boldsymbol{r^2\sin\vartheta}$.

Példa (gömb térfogata) A gömb esetén gömbi koordinátákban a határok:

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq r \leq R$. Így $\displaystyle\iiint_G dxdydz = \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^R r^2\sin\vartheta\, dr\, d\varphi\, d\vartheta =$

$$= 2\pi\frac{R^3}{3}\int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta = -2\pi\frac{R^3}{3}\cos\vartheta\Big|_0^\pi = -2\pi\frac{R^3}{3}(-1-1) = \frac{4\,R^3\pi}{3}\,.$$