Deriválhatóság $\mathbb{R}^n$-en

1. Alapfogalmak

(0) Skalárszorzat $\mathbb{R}^n$-en

(1) Ekvivalens definíció egyváltozós függvény deriválhatóságára

(a) Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén: $\frac{a}{b} \longrightarrow 0$ iff $\frac{a}{|b|} \longrightarrow 0$

Valóban: $\frac{a}{b} \to 0$ iff $|\frac{a}{b}| \to 0$ és $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|} = \frac{|a|}{||b||} = |\frac{a}{|b|}| \to 0$ iff $\frac{a}{|b|} \to 0$

(b) $h \longrightarrow 0$ esetén

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to a$ iff $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - a \to 0$ iff $\frac{f(x+h)-f(x)-ah}{h} \to 0$ iff $\frac{f(x+h)-f(x)-ah}{|h|} \to 0.$

(c) Geometriai jelentés: $f(x+h) - f(x) \cong ah$ kis h-kra, azaz a függvény kicsiben lineáris.

• Azaz egyenessel közelíthető (kicsiben egyenes): az $(x, f(x))$-en átmenő a meredekségű egyenes egyenlete: $f(x+h) - f(x) = a((x+h) - x) = ah$ **iff** $a((x+h) - x) - 1 \cdot (f(x+h) - f(x)) = 0$, azaz az $(x, f(x))$-en átmenő $(a, -1)$ normálisú egyenes egyenlete.

Tehát
$$\boldsymbol{\frac{f(x+h)-f(x)-ah}{|h|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0}\,.$$

(2) Többváltozós függvények

(a) Definíció: a vektor, $a \cdot h$-ban a "$\cdot$" skalár szorzat

(b) Geometriai jelentés: $f(r+h) - f(r) \cong a \cdot h$. tehát $f(x+h, y+k) \cong f(x,y) + a_1 x + a_2 y$.

• Azaz síkkal közelíthető: az $(x, y, f(x,y))$-en átmenő $(a_1, a_2, -1)$ normálisú sík egyenlete: $a_1((x+h)-x) + a_2((y+k)-y) - 1 \cdot (f(x+h, y+k) - f(x,y)) = 0$ **iff** $f(x+h, y+k) = f(x,y) + a_1 h + a_2 k$.

(c) Jelölés: grad f

(3) Vektor-skalár függvények

(a) Definíció: a vektor, $a \cdot h$-ban a "$\cdot$" skalárRAL való szorzás

(b) Geometriai jelentés és kiszámítás: miután nincs probléma: skalárral való osztás kell, így teljesen analóg az egyváltozóssal: $\frac{r(t+h)-r(t)}{t} \to a$, vagyis t szerint kell deriválni, ha a függvény komponensenként van adva akkor úgy:

$$\frac{r(t+h)-r(t)}{t} = \frac{(x(t+h)-x(t), y(t+h)-y(t))}{t} = \left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h}, \frac{y(t+h)-y(t)}{t}\right) \to (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$$

Tehát a geometriai jelentés ugyanúgy, mint egyváltozóban: érintővektor

(c) Jelölés: $\dot{r}(t)$

(d) Példa (egyenes szakasz):
$r(t) = r_0 + e\,t,\ t \in I\,, \dot{r}(t) = e$, hiszen $r(t+h) - r(t) - e\,h = (r_0 + e\,(t+h)) - (r_0 + e\,t) - e\,h = 0.$

(4) Vektor-vektor függvények

(a) Definíció: Ah vektor-vektor függvény, de nem akármilyen, LINEÁRIS. Mit jelent ez, mi a közös a három speciális $a \cdot h$ kifejezésben?

(1) $a(h_1 + h_2) = a\,h_1 + a\,h_2$ (2) $a(c\,h) = c(a\,h)$

Tehát A **lineáris operátor**, azaz olyan vektor-vektor függvény, melyre:
(1) $A(h_1 + h_2) = A\,h_1 + A\,h_2$ (2) $A(c\,h) = c(A\,h)$
• Ez a "lineáris közelítés" általánosítása.

Tételek (Egydimenzióval analóg)
(1) Derivált egyértelmű
(2) Invariancia " + "-ra, és " $c\,\cdot$ "-ra
(3) Láncszabály (általános esetben " $\cdot$ " az a függvénykompozíció)
(4) Deriválható $\rightsquigarrow$ folytonos
(5) Konstans deriváltja 0
(6) Koordinátafüggvények deriválhatóak
$\frac{f(x+h,y+k)-f(x,y)-(g_1,g_2)\cdot(h,k)}{(h,k)} = \frac{x+h-x-g\cdot h}{|(h,k)|} = \frac{h-(g_1,g_2)\cdot(h,k)}{|(h,k)|} \longrightarrow 0$ nyilván ha $g_1 = 1, g_2 = 0$,
hisz ekkor $h - (g_1, g_2)\cdot(h,k) = h - h = 0$. Nyilvánvaló ezek alapján az is, hogy általában:
$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i \rightsquigarrow \operatorname{grad} f = e_i = (0, 0, \ldots, \overset{i}{1}, \ldots 0.)$$

Fontos példa
$G \subseteq \mathbb{R}^n, H \subseteq \mathbb{R},\ u = u(r) : G \to \mathbb{R},\ r = r(t) : H \to \mathbb{R}^n,\ f = u \circ r : H \to \mathbb{R}$
$$f'(t) = \big(u(r(t))\big)' = \operatorname{grad} f(r(t)) \cdot \dot{r}(t)$$
• Geometriai jelentés: $\operatorname{grad} u$ az $u(r) = c$ egyenletű felület érintősíkjának normálisa, speciálisan ha a felület egyenlete: $f(x,y) = z$ **iff** $u(x,y,z) = f(x,y) - z = 0 \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow \operatorname{grad} u = (f_x, f_y, -1)$.

Tétel (Kapcsolat egydimenzióval)
Vektor függvény deriválható iff koordinátánként az

• Tehát csak a többváltozós függvény deriválhatóságának definíciója ÚJ, a vektorfüggvény deriválhatósága visszavezethető erre.

2. Többváltozós függvények deriválhatósága

Csak kétváltozóra, többire analóg.

Legyen $\operatorname{grad} f \stackrel{\circ}{=} (g_1, g_2)$ és vizsgaljuk meg a definíciót speciálisan $(h,0)$-ra:
$$\frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0) - (g_1,g_2)\cdot(h,0)}{|(h,0)|} = \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0) - g_1 h}{|h|} \longrightarrow 0$$
$$\text{iff } \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0) - g_1 h}{h} \longrightarrow 0$$
$$\text{iff } \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h} - g_1 \longrightarrow 0$$
$$\text{iff } \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h} \longrightarrow g_1$$
Azaz ha $F(x) \stackrel{\circ}{=} f(x, y_0)$, akkor $g_1(x_0, y_0) = F'(x_0)$, vagyis a $\operatorname{grad} f$ első komponense úgy kapható, hogy a második változót állandónak tekintve csak az első szerint deriválunk. Persze a második komponens analóg módon kapható.

Definíció (**parciális derivált**)

$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ többváltozós függvény x_i szerinti parciális deriváltja az $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ helyen (ha létezik):

$$f_{x_i}(a) \mathrel{\mathring{=}} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x=a} \mathrel{\mathring{=}} \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_i + h, \ldots a_n) - f(a)}{h}$$

Példa

(a) $f(x, y) = xe^y + x^2y^3$

$f_x = e^y + 2xy^3,\ \ f_y = xe^y + 3x^2y^2$

(b) $f(x, y) = \frac{y^4+y^3}{x^2+y^2},\ f(0, 0) = 0$

Origón kívül triviális: koordinátafüggvényekből deriválhatóságot megőrző módon van összerakva. Az origóban:

$f(x, 0) = 0$ minden x-re $\rightsquigarrow$ $f_x(x, 0) = 0$ minden x-re, speciel $x = 0$-ra $f_x(0, 0) = 0$.

$f(0, y) = y^2+y$ minden y-ra $\rightsquigarrow$ $f_y(0, y) = 2y+1$ minden y-ra, speciel $y = 0$-ra: $f_y(0, 0) = 1$.

(c) $f(x, y) = (x + y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2},\ f(0, 0) = 0$.

Egyváltozóból tudjuk, hogy

(a) a $g(x) = f(x, 0) = x \sin\frac{1}{x^2},\ g(0) = 0$ nem deriválható $x = 0$-ban, így $f_x(0, 0)$ nem létezik és persze ugyanígy

(b) a $h(y) = f(0, y) = y^2 \sin\frac{1}{y^2},\ h(0) = 0$ deriválható $y = 0$-ban és $h'(0) = 0$, így $f_y(0, 0)$ létezik és $f_y(0, 0) = 0$.

Azt kaptuk tehát, hogy

Állítás

Ha f deriválható, akkor a $\operatorname{grad} f$ komponensei a parciális deriváltak.

• Tehát a parciális deriváltak létezése szükséges feltétele a deriválhatóságnak. A fenti állítás azonban fordítva nem igaz: létezhetnek a parciális deriváltak úgy, hogy gradiens nem létezik azaz a parciális deriváltak létezése nem elégséges feltétele a deriválhatóságnak. Valóban, $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2},\ f(0, 0) = 0$ esetén nyilván $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ és nincs határértéke az origóban ($f(x, 0) = 0,\ f(x, x) = 1/2 \neq 0$), azaz itt nem folytonos, azaz nem lehet deriválható. De belátható, hogy

Állítás

Ha a parciális deriváltak léteznek és folytonosak, akkor létezik gradiens (és akkor persze komponensei a parciális deriváltak)

• Tehát a parciális deriváltak (létezése +) folytonossága elégséges feltétele a deriválhatóságnak. Látni fogjuk, hogy nem szükséges, azaz a fenti állítás fordítva nem igaz: létezhet úgy is a gradiens, hogy a parciális deriváltak nem folytonosak.

Fontos példák

(a) $f(r) = |r| \rightsquigarrow \operatorname{grad} f = \frac{r}{|r|}$ az origón kívül és az origóban nem létezik derivált.

Valóban: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \rightsquigarrow f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, melyek folytonosak az origón kívül, hisz koordinátafügvényekből vannak folytonosságot megőrző módon felépítve.

Így az origón kívül: $\operatorname{grad} f = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y) = \frac{r}{|r|}$.

Az origóban viszont nem léteznek még a parciálisok sem, hisz sem $f(x,0) = \sqrt{x^2} = |x|$ sem $f(0,y) = \sqrt{y^2} = |y|$ nem deriválható az origóban (mint egyváltozós függvény).

(b) Legyen f valós függvény, $\operatorname{grad} f(|r|) = ?$

Láncszabály: $\operatorname{grad} f(|r|) = f'(|r|)\,\frac{r}{|r|}$. Például $\operatorname{grad} |r|^2 = 2r \cdot \frac{r}{|r|} = 2\frac{|r|^2}{|r|} = 2|r|$ az origón kívül és az oigóban is, hiszen $\frac{|0+h|^2 - 0^2 - 0 \cdot h}{|h|} = \frac{|h|^2}{|h|} = |h| \longrightarrow 0$.

• Az (a) példából speciálisan egydimenzióban persze tényleg: $f(x) = |x| \rightsquigarrow f'(x) = \frac{x}{|x|}$ az origón kívül és az origóban nem létezik derivált.
• $f(r) = |r|$ origóban való nem deriválhatóságának geometriai (fizikai) jelentése: a $z = \sqrt{x^2+y^2}$ (egyenletű) kúpnak az origóban nincs **egyértelmű** érintősíkja (ugyanúgy, ahogy az $f(x) = |x|$ gráfjának nincs egyértelmű érintője az origóban), a csúcsára állított kúp nem stabil.