Lineáris algebra

9. Feladatsor

1.Legyen A egy 10×10-es valós mátrix! Jelölje r_i A^i rangját! Lehet-e az $(r_1, r_2...)$ sorozat egyenlő az alábbiakkakl?
a) $(5, 6, ...)$; b) $(9, 8, 7, ..., 4, 4...)$; c) $(10, 9, 8, ...)$ d) $(8, 5, ...)$

2.Hozzuk diagonális alakra az alábbi kvadratikus alakokat! Döntsük el, hogy milyen a jellegük!
Adjunk meg olyan bilineáris függvényeket, amelyekhez ezek tartoznak!
a)$x_1^2 + x_1x_2$ b)x_1x_2 c) $x_1 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$
3.Mi a $\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$ bilineáris függvény mátrixa a standard bázisban és az $\{(1, 1), (0, 1)\}$ bázisban? Mi a hozzá tartozó kvadratikus alak! Mit mondhatunk a kvadratikus alak jellegéről?

4.Mutassuk meg, hogy egy négyzetes mátrix nyoma a sajátértékei összege, determinánsa pedig a sajátértékei szorzata!

5.a)Mutassuk meg, hogy előfordulhat, hogy két mátrix nem hasonló, de karakterisztikus és minimálpolinomjaik megegyeznek!
b) Mutassuk meg, hogy 3×3-as mátrixra nincs ilyen ellenpélda!

6.Legyen $A^k = 0$ (azaz A ú.n.) **nilpotens** mátrix! Mi lehet A karakterisztikus és minimálpolinomja?

7.a)Mi lesz az alábbi A mátrixok Jordan-féle normálalakja J?
b) Mik A determinánsosztói és az invariás faktorai?
c) $A^{100} =$?
d) $e^J =$?
e) $e^{3A} =$?
1)$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ...1 \\ 1 & 1 & ...1 \\ . & . & .... \\ 1 & 1 & ...1 \end{pmatrix}$ 2)$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

8.Bizonyítsuk be, hogy ortogonális mátrixok szorzata, inverze szintén ortogonális mátrix!

9. Bizonyítsuk be, hogy a valós $n \times n$-es mátrixok vektortere a szimmetrikus és antiszimmetrikus mátrixok alterének direkt összege!

10. Egy valós bilineáris függvény mátrixa egy bázisban $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
a) Határozzuk meg a hozzá tartozó kvadratikus alak mátrixát és jellegét!
b)Adjunk meg R^2-ben olyan bázist, amleyben a kvadratikus alak négyzetösszeg, és írjuk fel ebben a bázisban a kvadratikus alakot!

11.Egy $C^2 \times C^2$-en értelmezett komplex bilineáris függvény $g(\overline{u}, \overline{v}) = i\overline{u}_1v_2 - i\overline{u}_2v_1$. Írjuk fel a mátrixát! Hermite-féle-e a bilineáris függvény? Jellege=? Határozzunk meg olyan bázist, amelyben g mátrixa diagonális!
Írjuk fel itt a kvadratikus alakot!

12. Legyen $v1 = 1/\sqrt{2}(1, -1, 0, 0)$, $v_2 = 1/2(1, 1, -1, 1)$. Egészítsük ki R^4 egy ortonormált bázisává!
Írjuk fel benne az $(1, 2, 3, 4)$ vektort! Mik lesznek az együtthatók?

13.Normálisak-e, önadjungáltak-e, unitérek-e az alábbi mátrixok?

a)$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$ c)$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

14.Bizonyítsuk be, hogy ha A önadjungált és M unitér mátrix, akkor $M^{-1}AM$ öndajungált mátrix!