Lineáris algebra

8. Feladatsor

1. Mutassuk meg, hogy az alábbi (valós) mátrixok mind hasonlók:
a) $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$, ahol a, b, c, d tetszőleges nem 0 értékek.
b) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix}$, ahol a, b, c, d tetszőleges nem 0 értékek.
c) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$, ahol $a \neq c$ tetszőleges egymástól különböző értékek.
d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Tegyük fel.hogy A 5×5-ös valós mátrixra létezik olyan v nem nulla valós vektor, melyre v, Av, A^2v, A^3v lineárisan összefüggők! Mutassuk meg, hogy R^5-nek van nemtriviális invariáns altere!

3.Lássuk be, hogy ha $AB = BA$, akkor A sajátalterei B-nek invariáns alterei!

4. Lássuk be, hogy ha $AB = BA$, ahol A és B komplex együtthatós mátrixok, akkor A-nak és B-nek van közös sajátvektora!

5. Melyek igazak egy vektortér minden f lineáris transzformációjára?
a) v sajátvektora f-nek $\Rightarrow$ v sajátvektora f^2-nek
b) v sajátvektora f^2-nek $\Rightarrow$ v sajátvektora f-nek
c) 0 sajátértéke f^2-nek $\Rightarrow$ 0 sajátértéke f-nek
d) ha $\mu^2 = \lambda$ és λ sajátértéke f^2-nek, akkor vagy μ vagy $-\mu$ sajátértéke f-nek.

6. Lássuk be, hogy egy V vektortérnek azon lineáris transzformációi, amelynek minden nem nulla vektor sajátvektora, vektroteret alkotnak! Hány dimenziós ez a vektortér?

7.Milyen kapcsolat van AB és BA minimálpolinomjai között, ha A és B négyzetes mátrixok? Mutassuk meg, hogy AB és BA sajátértékei megegyeznek!

8. Adjunk meg olyan mátrixot, amelynek karakterisztikus polinomja $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_o$!

9. Van-e olyan 3×3-as mátrix Q felett, amelyenk minimálpolinomja:
a) $x^2 - 2$
b) $x^2 + x$

10. Tegyük föl, hogy egy A komplex együtthatós mátrixra teljesül az $A^m = I$ azonosság, valamilyan $m \geq 1$ esetén! Igazoljuk, hogy A diagonizálható!

11.Van-e olyan komplex elemű mátrix, amelynek a karakterisztikus és minimálpolinomja a következő:
a) $p_1(x) = (x-1)^2(x-2)^3$, $m_1(x) = (x-1)(x-2)^2$;
b) $p_2(x) = x^6 + x + 1$, $m_1(x) = x^2 + x + 1$;
c) $p_3(x) = (x-1)^2(x-2)^2(x-5)$; $m_3(x) = (x-1)^2(x-2)^2$;
d) $p_4(x) = (x^3 - x - 4)^2$; $m_4(x) = (x^3 - x - 4)$.