Lineáris algebra

7. Feladatsor

1. Legyen V $GF(p)$ feletti n dimenziós vektortér!
a) Hány 1-dimenziós altere van V-nek?
b) Hány $n-1$-dimenziós altere van V-nek?
c) Hány k-dimenziós altere van V-nek?

2. Hány darab $n \times n$-es $GF(p)$-feletti reguláris mátrix van összesen?

3.Bizonyítsuk be, hogy ha W_1, W_2 a V véges dimenziós vektortér két altere, akkor $dim < W_1, W_2 >= dimW_1 + dimW_2 - dim(W_1 \cap W_2)$!

4.Azt mondjuk, hogy egy $A \in M_n[R]$ mátrix **ortogonális**, ha $A^{-1} = A^T$. Egy R^n-beli vektorrendszer **ortonormált**, ha minden vektornak önmagával vett skaláris szorzata 1, a többi vektorral pedig skaláris szorzata 0.
Bizonyítsuk be, hogy egy A mátrix pontosan akkor ortogonális, ha oszlopvektorai ortonormáltak! Bizonyítsuk be, hogy sorokra is hasonló állítás igaz!

5. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Határozza meg az A mátrix és az $[A|b]$ kibővített mátrix rangját $GF(2)$, $GF(3)$ és R felett! Mit mondhatunk az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer megoldhatóságáról mindhárom esetben!

6. Számítsuk ki az $f : (x, y, z) \rightarrow (x + y - 2z, x + z, 2x + y - z, -x - z)$ leképezés márixának rangját! Hány dimenziós f magtér és képtere? Adjuk meg a magtérnek és a képtérnek egy-egy bázisát!

7. Legyen $f : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció! Mutassuk meg, hogy vagy $V = Imf \oplus Kerf$ vagy vagy f^2 rangja kisebb f rangjánál!

8. Hány dimenziós alteret generálnak az alábbi vektorrendszerek?
Adjuk meg ennek az altérnek egy bázisát, illetve válasszuk ki ennek az altérnek egy bázisát a megadott generáló elemek közül!
a)$[1, 1, -1, 0], [2, 1, 0, 1], [3, 2, -1, 1]$;
b)$[1, 3, 2, 1], [0, 1, -1, 4], [1, 1, 1, 1], [-2, 1, 2, 1]$;
c)$[1, 2, 1], [2, 3, 1], [-1, -2, 1], [0, -1, 3], [1, 1, 1]$;
d)$[1, 1, 0, ..., 0], [0, 1, 1, 0, ..., 0], ..., [0, 0, ..., 1, 1], [1, 0, ..., 0, 1]$;
e) a valós polinomok vektorterében $\{p(x)|degp \leq 5, p(1) = 0, p(0) = p'(0)\}$;

9. Adjuk meg a mátrixát a következő lineáris leképezéseknek a megadott bázisban (vagy bázispárban)!
Adjuk meg a képtér és a magtér egy -egy bázisát!
a)$f(x, y, z) = (x + 2y - z, x - y + z)$ standard bázisban, illetve a $B'_1 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ és $B'_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$ bázispárban!
b) az $x = t, y = 2t, z = -t$ tengely körüli 90^o-os forgatás a standard bázisban!
c) a 3×3-as valós mátrixokon az $A \rightarrow A + A^T$ leképezés a standard bázisban!

10. Keressük meg a sajátértékeket és a sajátvektorokat, valamint a sajátaltereket! Adjunk meg a sajátvektorokból álló bázist, ha van ilyen! Adjuk meg a leképezések(mátrixaik) karakterisztikus- és minimálpolinomját!
a)f az $x - 2y + z$ síkra való merőleges vetítés;
b) f mátrixa a standard bázisban:

b1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b2) $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ b3) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11. Számítsuk ki a $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
mátrix n-edik hatványát diagonális alakra hozással!