Lineáris algebra

6. Feladatsor

1. Legyen $\phi : V \to W$ lineáris leképezés $v_1, ..., v_n \in V$ tetszőleges vektorok. Mely állítások következnek valamelyik másikból (esetleg több másikból)?
a)ϕ injektív b) ϕ szürjektív
c)$v_1, ..., v_n$ generátorrendszer V-ben d) $\phi(v_1), ..., \phi(v_n)$ generátorrendszer W-ben
e)$v_1, ..., v_n$ lineárisan független V-ben f) $\phi(v_1), ..., \phi(v_n)$ lineárisan független W-ben
g) van olyan bázis, melynek képe lineárisan független W-ben
Változik-e a következtetések rendszere, ha föltesszük, hogy $dimV = dimW$ véges szám.

2. Adjuk meg az alábbi lineáris leképezések mátrixát a megadott bázispárban!
Határozzuk meg a magterüket és a képterüket és azok dimenzióját!
a) a sík α szögű elforgatása az origó körül (a bázis mindkét térben (i) $\{(1, 0), (0, 1)\}$; (ii) $\{(1, 0), (\cos(\alpha), \sin(\alpha))\}$;

b) a legfeljebb n-edfokú valós polinomok terén a deriválás mátrixa (a bázis mindkét térben $1, x, x^2, ..., x^n$)
c)$R^3 \to R^3$ $(a, b, c) \to (a + b, 2a - c)$ (a standard bázisokkal)
d) a sík helyvektorainak tükrözése egy origón átmenő α irányszögű egyenesre (a standard bázisban)!

3. Adjuk meg az alábbi lineáris leképezések mátrixát a standard bázisban!
Adjuk meg a leképezés sajátértékeit és sajátvektorait, sajátaltereit; magterét és képterét és ezek dimenzióját!
a) R^3 pontjainak z tengely körüli elforgatása α szöggel.
b) R^3 pontjainak xy síkra való tükrözése.
c) R^3 pontjainak xy síkra való vetítése.
d) R^3 pontjainak z tengely irányú 3-szoros nyújtása!
e) R^3 pontjainak z tengelyre való tükrözése.
f) R^3 pontjainak z tengelyre való vetítése.

4. Az előző feladatot módosítsuk úgy, hogy a forgatás, tükrözés, vetítés tengelye, illetve síkja általános helyzetű, de továbbra is 0-n átmenő legyen!

5. Adjuk meg a vektoriális szorzás, mint lineáris transzformáció mátrixát a standard bázisban!Mi a magetere, képtere és sajátvektorai!

6.a) Adjunk meg egy lineáris transzformációt, amely az R^3 standard bázsiát v_1, v_2, v_3 vektorokba viszi!
Írjuk fel mátrixát a standard bázisban!
b) Adjunk meg egy lineáris transzformációt, amely az R^3 w_1, w_3, w_3 vektorait v_1, v_2, v_3 vektorokba viszi!
Írjuk fel mátrixát a standard bázisban!

7. Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!
a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

8.a) Az $xy + z$ felületet mibe viszi az a lineáris transzformáció, amelynek mátrixa az $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix?
b) Forgasssuk el α szöggel a standard bázis elemeit a z tengely körül. Mi lesz az $xy + z$ felület egyenlete az új bázisban?

9. Hozza kanonikus alakra az alábbi másodrendű görbe egyenletét és ábrázolja a görbét és az új koordinátarendszer tengelyeit az eredeti koordinátarendszerben!
$8y^2 + 6xy + 6x - 2y + 1 = 0$