Lineáris algebra

5. Feladatsor

1. Határozzunk meg az elemi mátrixok deteminánsát és inverzét!

2.a)Mutassuk meg, hogy $n \times n$-es diagonális mátrixok szorzata is diagonális mátrix, felső háromszög mátrixok szorzata pedig felső háromszög mátrix!
b)Mikor invertálható egy diagonális mátrix és mi az inverze?
c) Mikor invertálható egy felső háromszög mátrix? Mutassuk meg, hogy ez is felső hároszög mátrix!

3.Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 \end{pmatrix}$, mutassuk meg, hogy $det(A) = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)$! Hogyan lehet ezt általánosítani $n \times n$-es mátrixokra?

4.Bizonyítsuk be, hogy ha egy A $n \times n$-es mátrix elemei a Pascal háromszögben lévő binomiális együtthatók, ahol a bal felső sarok a Pascal háromszög csúcsa és az első oszlop és első sor a háromszög két széle, akkor a mátrixba eső elemek egy 1 determinánsú mátrixot határoznak meg!

5. $A = \begin{pmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{pmatrix}$,
a) $detA =$?
b) Hogyan lehet ezt általánosítani?

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,
a) $detA =$?
b) Hogyan lehet ezt általánosítani?

7. Mi történik egy kifejtési tagban lévő inverziók számával, ha a mátrixot a mellékátlóra tükrözzük?

8. Mutassuk meg, hogy vektorteret alkotnak, adjunk meg bennük bázist, adjuk meg a tér dimenzióját R felett
a) komplex számok
b) $n \times n$-es valós szimmetrikus mátrixok!
c) $n \times n$-es valós felső háromszög mátrixok!
d)$n \times n$-es valós 0 nyomú mátrixok!
e) Mit mondhatunk, ha pld. d)-ben a valós test helyett C-t írunk?
f) valós együtthatós legfeljebb n-edfokú polinomok, melyek páros függvények

9. Bizonyítsuk be, hogy egy véges dimenziós vektortérben valódi altér dimenziója kisebb, mint a tér dimenziója. Mutassunk példát, hogy ez végtelen dimenzióra nem igaz!

10.Mutassuk meg, hogy alterek uniója nem altér!

11.Mutassuk, meg, hogy, ha vektorok összefüggőek, akkor, nem feltétlenül fejezhető ki mindegyik vektor a többiből!

12. Mely vektorterek izomorfak?
a)R^6 (R felett)
b)R^{3x2} (R felett)

c)C^3 (R felett)

13.a)Mutassuk meg, hogy egy $m \times n$-es valós mátrix oszlopvektorai összes valós lineáris kombinációi vektorteret alkotnak!
b)Mutassuk meg, hogy ebben bázis az oszlopvektorok egy maximális független rendszere!

14.Függetlenek-e:
$[1, 3, 2, 1], [2, 1, -1, 0], [-1, 2, 3, 1]$

15.Altere-e R^3-nak
a) egy origón átmenő sík helyvektorai?
b) egy origón át nem menő sík helyvektorai!

16.a)Bizonyítsuk be, hogy egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak. Mekkora ennek a dimenziója?
b) Mutassuk meg, hogy a homogén egyenletrendszer egy megoldása és az inhomogén egyenletrendszer egy megoldása mindig megoldása az inhomogén egyenletrendszernek!
c) Mutassuk meg, hogy az inhomogén egyenletrendszer minden megoldása megkapható, mint a hozzá tartozó homogén egyenletrendszer egy megoldása plusz egy fix megoldása az inhomogénnek!

17. Adjunk feltételt arra, hogy egy négyzetes mátrixú homogén lineáris egyenletrendszernek legyen nemtriviális megoldása!