Lineáris algebra

4. Feladatsor

1. Határozzunk meg egy olyan polinomot, amely a $p(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ és az $q(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ polinomoknak közös osztója, és minden közös osztójuknak polinomszorosa!

2. Legyenek megadva az alábbi mátrixok:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},\ B = (\,-1, -2, -3\,),\ C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -1 & 2+i \\ 2 & 3-i \\ 3 & 4i \end{pmatrix}.$$

Végezzük el az alábbi műveleteket, ha lehet:
$A + A$, $A + B$, AB, AC, $AC + 2C$, $AD - 3\overline{D}$, D^2,DD^T, $\overline{D}.\overline{D}^T$, BC, CB.

3. Tetszőleges $n > 1$-re adjunk meg olyan $n \times n$-es A B valós mátrixokat, melyekre $AB = 0$, de $BA \neq 0$!

4. Keressünk olyan $n \times n$-es A, B, C valós mátrixokat, melyekre:
a) van olyan k természetes szám, hogy $A^k = E$, de $A \notin \{E, -E\}$;
b) van olyan k természetes szám, hogy $B^k = 0$, de $B \neq 0$;
c) $C^2 = C$, de $C \neq 0$ és $C \neq E$.

5. Legyenek A és B tetszőleges $n \times n$-es mátrixok. Bizonyítsuk be, hogy az $AB - BA$ mátrix főátlójában az elemek összege 0!

6. Számítsuk ki a következő mátrixok determinánsát és inverzét:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \text{c)} \begin{pmatrix} 2i+2 & 2i-3 & i \\ 1 & i & 2i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.Lássuk be , hogy egy egész elemű mátrix inverze pontosan akkor egész elemű, ha a mátrix determinánsa $+1$ vagy -1.

8.Adjuk meg a következő egyenletrendszerek összes megoldását:

$$\text{a)} \begin{array}{rcl} x + 2y - z &=& 2 \\ 3x - y + 2z &=& 7 \\ x - z &=& -2 \\ 2x + y + z &=& 7 \end{array} \quad \text{b)} \begin{array}{rcl} x + y + z &=& 4 \\ -x + y - z &=& 2 \\ 2x + y + 2z &=& 1 \\ 4x + 4y + 4z &=& 1 \end{array} \quad \text{c)} \begin{array}{rcl} 7x + 14y - 21z &=& 7 \\ x + 2y - 3z &=& 1 \\ 5x + 10y + 15z &=& 5 \\ 3x + 6y - 9z &=& 3 \end{array}$$

9. Az a és b értékétől függően hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek?

$$\begin{array}{rcl} 2x + y + z &=& 4 \\ x + 2y - z &=& -3 \\ x - y + 2z &=& a \\ x + by + z &=& 3 \end{array}$$

10. Legyen adva egy k egyenletből és n ismeretlenből álló racionális együtthatós lineáris egyenletrendszer! Döntsük el, melyek igazak az alábbi következtetésk közül:
a) Ha $k \leq n$, akkor az egyenletrenszernek van megoldása.
b) Ha $k > n$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.
c) Ha $k < n$ és az egyenletrendszernek van megoldása, akkor végtelen sok megoldása is van.
d) Ha $k > n$ és az egyenletrendszernek van megoldśa, akkor csak egy megoldása van.
e) Ha létezik valós megoldás, akkor létezik (csupa) racionális megoldás is.
f) Ha bármely $k - 1$ egyenletet kiválasztva az így kapott egyenletrendszernek van megoldása, akkor az eredetinek is van megoldása.

11. Van-e olyan lineáris egyenletrendszer, amelynek:
a) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van és egyértelmű a megoldása;
b) 6 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;
c) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van és nincs megoldása;
d) 5 egyenlete, 5 ismeretlenje van és pontosan 5 megoldása van?

12. n elem sorbarendezésénél mi az inverziók számának lehetséges maximuma?

13. Hány inverzió van az alábbi permutációkban?
a) $1, 2, 3, 4$ b) $2, 4, 3, 1$ c) $n, (n-1), ..., 1$ d)$1, 3, ..., (2n-1), 2, 4, ..., 2n$

14.Legyen A 5×5-ös mátrix, amelynek determinánsa 3! Mi lesz a determinaánsa a következő mátrixoknak:
a)$2A^{-1}$ b)$(2A)^{-1}$ c) $A^2.A^T.A^{-1}$