Lineáris algebra

3. Feladatsor

1. Lássuk be, hogy $(x-\alpha)^k$ pontosan akkor osztója a $p(x)$ polinomnak, ha $p^{(j)}(\alpha) = 0$ $j = 0, ..., k-1$-re!

2. Bizonyítsuk be a Schönemann-Eisenstein-féle irreducibilitási kritériumot!

3. Keressük meg az alábbi polinomok összes gyökeit! Bontsuk fel a polinomokat irreducibilis polinomok szorzatára $C[x]$-ben, $R[x]$-ben és $Q[x]$-ben!
a) $2x^6 + x^5 - 5x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 3x + 3$
b) $x^5 + 1$.

4. Adjuk meg az alábbi polinomok gyöktényezős alakját!
a) $x^3 - 1$
b) $x^2 + x + 1$
c) $x^n - 1$
d) $x^n + 1$
e) $x^{2n} - x^{2n-1} + ... + x^2 - x + 1$

5. Mit ad maradékul a $3x^{21} - 2x^{14} + 5x^9 - 7$ polinom $(x-i)$-vel, $(x+i)$-vel, x^2+1-gyel illetve $(x-1)^3$-el osztva?

6. Mutassuk meg, hogy egy valós együtthatós $p(x)$ polinomnak egy $a \in C \backslash R$ gyök és konjugáltja is ugyananyiszoros gyöke!

7. Adjuk meg azt a legalacsonyabbfokú egyfőegyütthatós
a) komplex együtthatós
b) valós együtthatós
polinomot, melynek i kétszeres 1 háromszoros gyöke!

8. Azt mondjuk, hogy egy ϵ egységyök **rendje** n, ha $\epsilon^n = 1$ és n a legkisebb ilyen természetes szám.
Ezt a tényt $o(\epsilon) = n$-nel jelöljük.
Bizonyítsuk be, hogy

a)Ha $o(\epsilon) = n$, akkor $o(\epsilon^k) = n/lnko(n, k)$.
b)Határozzuk meg a primitív n-edik egységgyökök számát!
c)Mutassuk meg, hogy ha $(k, l) = 1$, akkor egy primitív k-adik és egy primitív l-edik egységgyök szorzata primitív kl-edik egységgyök!

9. Bizonyítsuk be, hogy az $x^{p-1} + x^{p-2} + ... + x + 1$ polinom irreducibilis a racionális számtest felett és gyökei éppen a primitív p-edik egységgyökök!

10.Adjuk meg azt a legalacsonyabbfokú $p(x)$ polinomot, amelyre $p(x_k) = y_k$ $k = 1, 2, 3, 4$-re!

x_k	-1	0	1	2
y_k	-10	-5	0	5

b)Bontsa fel a polinomot gyöktényezők szorzatára.
c) Számítsa ki a gyökök összegét és szorzatát!

11. Bizonyítsuk be, hogy ha F véges test, akkor minden $f : F \to F$ függvény polinommal adható meg!

12. Határozzuk meg $x^n - 1$ és $x^k - 1$ közös gyökeit! Mutassuk meg, hogy az ezekhez tartozó gyöktényezők szorzata $x^d - 1$, ahol $d = (n, k)$!

13. Határozzunk meg egy olyan polinomot, amely a $p(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ és az $q(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ polinomoknak közös osztója, és minden közös osztójuknak polinomszorosa!